ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell'8 gennaio 1899.

E. Beltrami Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Sulla distribuzione in latitudine dei fenomeni solari osservati al R. Osservatorio del Collegio Romano durante il 2° e 3° trimestre del 1898.* Nota del Socio P. Tacchini.

Ho l'onore di presentare all'Accademia i risultati ottenuti sulla frequenza relativa dei diversi fenomeni solari in ciascuna zona di 10 gradi durante il 2° e 3° trimestre del 1898.

Latitudine	2° trimestre 1898			3° trimestre 1898		
	Protuberanze	Facole	Macchie	Protuberanze	Facole	Macchie
90° + 80°	0,000			0,004		
80 + 70	0,012			0,000		
70 + 60	0,012			0,015		
60 + 50	0,055	0,000		0,008		
50 + 40	0,025 } 0,418	0,004		0,042 } 0,312	0,013	
40 + 30	0,086	0,026 } 0,373		0,068	0,055	
30 + 20	0,068	0,053		0,027	0,103 } 0,450	
20 + 10	0,068	0,117	0,192 } 0,341	0,061	0,121	0,118 } 0,441
10 . 0	0,092	0,173	0,149	0,087	0,158	0,323
0 — 10	0,062	0,244	0,106 } 0,659	0,084	0,190	0,265 } 0,559
10 — 20	0,098	0,233	0,553	0,167	0,155	0,294
20 — 30	0,147	0,109		0,095	0,121 } 0,550	
30 — 40	0,098	0,026 } 0,627		0,087	0,063	
40 — 50	0,092 } 0,582	0,011		0,160 } 0,688	0,021	
50 — 60	0,049	0,004		0,046		
60 — 70	0,012			0,015		
70 — 80	0,012			0,019		
80 — 90	0,012			0,015		

Come nel 1° trimestre, così nel 2° e 3° tutti i fenomeni solari furono molto più frequenti nell' emisfero australe. Le macchie si mantennero pure nella zona equatoriale ($\pm 20°$), le facole si estesero fino a $\pm 60°$ e le protuberanze figurarono in tutte le zone. Per ciò che riguarda le eruzioni, due sole furono osservate nei giorni 20 agosto e 15 settembre alla latitudine — 14° e — 20° assai deboli.

Astronomia. — *Osservazioni del pianetino ED 1898 fatte all'equatoriale di 0.ᵐ25.* Nota del Corrispondente E. MILLOSEVICH.

Dopo la presentazione della mia Nota nella seduta del 4 dicembre 1898 si aggiunsero 3 nuovi pianeti, due dei quali, EB ed EC 1898, furono trovati in una lastra fotografica al Lick Observatory fin dal 13 ottobre; e l'ultimo, ED 1898, venne scoperto da Charlois coll' euriscopio fotografico di Nizza.

Di quest' ultimo pianeta ho potuto fare le seguenti posizioni:

1898	Dic.	11	$8^h 38^m 49^s$	RCR.	α app.:	$4^h 38^m 57^s.31$	(9.480_n);	δ app.:	$+22°\ 3'53''\ 5$ (0.549)
»	»	12	6 29 1	»	» :	4 38 6 99	(9.651_n);	» :	+21 59 15 0 (0.666)
»	»	13	6 12 42	»	» :	4 37 12 87	(9.658_n);	» :	+21 54 7 0 (0.678)
»	»	16	9 14 28	»	» :	4 34 27 08	(9.293_n);	» :	+21 38 8 0 (0.525)
»	»	18	9 37 9	»	» :	4 32 44 30	(9.126_n);	» :	+21 28 3 8 (0.499)
»	»	22	9 11 12	»	» :	4 29 35 69	(9.168_n);	» :	+21 8 30 9 (0.508)

Matematica. — *Sulle equazioni a derivate parziali del 2° ordine.* Memoria del Socio U. DINI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Matematica. — *Sulle funzioni reali d' una variabile.* Nota del Corrispondente CARLO SOMIGLIANA.

Un problema d' idrostatica, che indicherò più innanzi, e la cui soluzione, quantunque abbastanza semplice, sfugge, a mio credere, agli ordinari procedimenti del calcolo infinitesimale, mi ha condotto ad alcune considerazioni, le quali possono forse essere di qualche interesse anche dal punto di vista puramente analitico.

§ 1. Dato un certo numero finito di numeri reali disposti in ordine qualunque

$$a_1\,,\,a_2\,,\,\ldots\,a_n \tag{1}$$

noi possiamo sempre disporli in un nuovo ordine

$$a'_1\,,\,a'_2\,,\,\ldots\,a'_n \tag{1'}$$

in modo che sia $a'_i \leq a'_{i+1}$ ($i = 1\,,\,2\,,\ldots\,n-1$). Diciamo allora che i nu-

meri a_i sono disposti in serie crescente. Questa disposizione si può sempre fare in modo unico, quando i numeri dati sono tutti differenti. Potrà esservi qualche arbitrarietà quando alcune delle a_i siano uguali fra loro. Questa arbitrarietà però non ha influenza sui valori delle a'_i che competono ai posti $1, 2, \ldots n$, per cui la serie dei *valori* (1′) è sempre unica.

Sia data ora una funzione $f(x)$ reale, ad un valore, sempre finita in un certo intervallo finito da $x = a$, ad $x = b$. Noi possiamo immaginare nello stesso intervallo infinite funzioni, sempre crescenti, le quali variino dal limite inferiore m al limite superiore M dei valori che la $f(x)$ assume nell' intervallo (a, b). Ora fra queste, date certe condizioni, ne esiste una, la quale ha, rispetto alla funzione data, proprietà analoghe a quella della serie (1′) rispetto alla serie (1), e può quindi, in certo modo, considerarsi come rappresentante la serie ordinata crescente degli infiniti valori della funzione data. Questa funzione si presenta spontaneamente nella soluzione del problema d'idrostatica, che indicherò.

Dividiamo l'intervallo (a, b) in un numero qualunque n di intervalli parziali, che indicheremo con $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$, e siano $x_1, x_2, \ldots x_n$ valori della variabile indipendente scelti arbitrariamente in ciascuno di questi intervalli; a questi corrisponderanno i valori

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$$

della funzione. Costruiamo poi una nuova funzione $f_n(x)$, fissando che essa sia costante in ciascuno degli intervalli δ_i, ed abbia precisamente il valore $f(x_i)$ in tutto δ_i.

Ordiniamo poi gli intervalli δ_i, supposti invariabilmente connessi coi rispettivi valori $f(x_i)$, in una nuova serie $\delta'_1, \delta'_2, \ldots \delta'_n$, in modo che i corrispondenti valori

$$f(x'_1), f(x'_2), \ldots, f(x'_n)$$

vengano a costituire una serie crescente, per la quale cioè si abbia $f(x'_i) \leq f(x'_{i+1})$; e indichiamo con $\varphi_n(x)$ la nuova funzione così ottenuta [1].

È chiaro che se noi supponiamo che il numero degli intervalli δ_i cresca indefinitamente, secondo una legge qualsiasi, ma in modo che, da un certo valore di n in poi, tutti gli intervalli stessi si riducano minori di una quantità prefissata arbitrariamente piccola, la funzione $f_n(x)$ tenderà, in generale almeno, a riprodurre la funzione data, cioè sarà

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x).$$

[1] Nei punti di separazione fra due intervalli δ_i, δ_{i+1} la f_n e la φ_n hanno una singolarità che può essere considerata come una mancanza di valore in quei punti. Per le considerazioni che seguono non vi è bisogno di determinare tali valori; però, volendo, si potrebbe fissare che le due funzioni assumano, come valore, la media dei due valori che esse hanno rispettivamente in δ_i e δ_{i+1}.

Ora noi dimostreremo che, sotto certe condizioni, anche la $\varphi_n(x)$ tende a costituire una nuova funzione, indipendente dalla legge di divisione dell'intervallo (a, b) e dalla scelta dei valori $x_1, x_2, \ldots x_n$ negli intervalli parziali. Questa funzione, quando esista, per la legge stessa di formazione, sarà sempre crescente, nel significato già usato, in tutto l'intervallo (a, b), e noi la chiameremo la *ordinata* di $f(x)$, indicandola con $Of(x)$; per cui sarà

$$Of(x) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(x).$$

Dalla definizione risulta immediatamente una proprietà fondamentale della $Of(x)$. Per ogni divisione dell'intervallo (a, b) in intervalli parziali si ha infatti

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\delta_i = \sum_{i=1}^{n} f(x'_i)\,\delta'_i$$

quindi al limite sarà

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b Of(x)\,dx\,. \tag{2}$$

Si vede subito quale sia la proprietà delle serie (1) (1') che corrisponde a questa delle funzioni $f(x)$, $Of(x)$.

§ 2. Supponiamo che la funzione data $f(x)$ sia continua ed escludiamo che possa essere costante in alcun tratto finito di (a, b).

Sia A uno qualunque dei valori che essa assume; a questo valore corrisponderà un gruppo di punti x_A, che chiameremo G_A, pei quali si ha

$$f(x_A) = A\,.$$

Questo gruppo potrà essere finito od infinito. Nell'intervallo compreso fra due punti x_A consecutivi, a cagione della continuità, la $f(x)$ assumerà valori o tutti maggiori, o tutti minori di A; e lo stesso avverrà nei due intervalli estremi compresi fra a e b ed il primo e l'ultimo rispettivamente dei punti x_A, se a e b non appartengono al gruppo G_A. Per cui mediante il gruppo G_A noi possiamo immaginare l'intervallo (a, b) diviso in due categorie di intervalli: l'una costituita da tutti gli intervalli, compresi fra due punti consecutivi x_A, nei quali $f(x)$ prende valori inferiori ad A, l'altra costituita dagli intervalli nei quali $f(x)$ prende valori maggiori di A.

Le somme delle lunghezze degli intervalli di ciascuna categoria sono sempre finite e determinate. Infatti nessuna delle due può superare $b - a$, ed entrambe sono composte di elementi tutti positivi. Indicando allora con l_A la somma degli intervalli nei quali $f(x) < A$, e con L_A quella degli intervalli nei quali $f(x) > A$, avremo

$$l_A + L_A = b - a\,.$$

Da queste considerazioni risulta che, colle ipotesi stabilite, ad ognuno dei valori A compresi fra il minimo valore m assunto dalla funzione ed il massimo M (non esclusi questi valori estremi) corrisponde *un* valore determinato $a + l_A$ (oppure $b - L_A$) della x compreso nell'intervallo (a, b).

Possiamo inoltre dimostrare che questa corrispondenza è biunivoca, cioè che per essa ad ogni valore della x non può corrispondere più di un valore della funzione, ossia che indicando con A′ un altro valore della funzione, differente da A, non può essere

$$l_{A'} = l_A .$$

Difatti supponiamo, per fissare le idee, che sia $A' > A$. La funzione $f(x)$ non può assumere il valore A′ in alcuno degli intervalli che compongono l_A; lo dovrà quindi assumere almeno in uno degli intervalli che compongono L_A. Ora se fosse $l_A = l_{A'}$, sarebbe anche $L_{A'} = L_A$, cioè $f(x)$ in tutti gli intervalli che compongono L_A supererebbe A′, e non potrebbe quindi assumere in tutto (a, b) alcuno dei valori compresi fra A ed A′; il che è contrario ad una delle proprietà fondamentali delle funzioni continue.

Da questo ragionamento segue che se $A' > A$, dovrà essere anche

$$l_{A'} > l_A \quad \text{e quindi} \quad L_{A'} < L_A .$$

Possiamo dunque concludere che *esiste una funzione* $\Gamma(x)$ *ad un valore e sempre crescente nell'intervallo* (a, b), *che varia da* m *ad* M, *e che può essere definita dalla relazione*

$$\Gamma(a + l_A) = f(x_A)$$

o, ciò che è lo stesso, dalla relazione

$$\Gamma(b - L_A) = f(x_A).$$

Questa funzione è anche necessariamente continua. Difatti, se presentasse una discontinuità, essendo essa sempre crescente, questa non potrebbe consistere che in un salto da un valore A ad un altro A′, che ne differisce di una quantità finita. Ma ciò è in contraddizione colla proprietà, già invocata, della funzione $f(x)$, per la quale essa deve assumere tutti i valori da m ad M.

Le considerazioni precedenti possono essere facilmente estese a funzioni più generali della $f(x)$ da noi studiata. Senza entrare in troppi particolari, osserveremo che ciò può farsi:

1°) per le funzioni continue che abbiano un numero finito di tratti di invariabilità. Questi tratti si riprodurranno allora inalterati nella $\Gamma(x)$;

2°) per le funzioni aventi un numero finito di discontinuità ordinarie, quando il valore della funzione in questi punti di discontinuità o manca, o è compreso fra i due valori limiti che la funzione assume a destra ed a sinistra di essi. In questi casi la $\Gamma(x)$ potrà presentare delle discontinuità analoghe.

§ 3. Ritorniamo ora alla questione enunciata nel § 1. La funzione $\Gamma(x)$ coincide, in generale, colla funzione, di cui ci siamo proposti di provare l'esistenza; cioè si ha

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \Gamma(x) .$$

Noi ci limiteremo, per ora, a dimostrare tale coincidenza per le funzioni che, oltre a soddisfare alle condizioni del paragrafo precedente, non fanno nell'intervallo dato che un numero finito di oscillazioni. Ciò del resto è sufficiente per le applicazioni che di queste proprietà si possono fare a problemi fisici.

Escludiamo ancora che vi possano essere nella $f(x)$ tratti di invariabilità o discontinuità. Per una tale funzione il gruppo G_A, qualunque sia il valore A, è composto di un numero finito di punti. Nell'intervallo compreso fra due consecutivi di questi punti x'_A, x''_A, se $f(x)$ è superiore ad A avrà almeno un massimo, e potrà avere anche dei minimi, i quali supereranno tutti A di una certa quantità finita ω.

Ciò posto, dato un numero positivo τ abbastanza piccolo perchè sia

$$0 < \tau < \omega ,$$

si potrà sempre trovare, a cagione della continuità di $f(x)$, nell'intorno a destra del punto x'_A, un punto $x'_A + \eta$, nel quale sia $f(x) = A + \tau$, mentre nell'intervallo $(x'_A , x'_A + \eta)$ la $f(x)$ è sempre minore di questo valore.

Analogamente nell'intorno a sinistra del punto x''_A si potrà sempre trovare un punto $x''_A - \varepsilon$ nel quale $f(x) = A + \tau$, mentre nell'intervallo $(x''_A - \varepsilon , x''_A)$ la $f(x)$ è sempre minore di questo valore.

L'intervallo (x'_A , x''_A) resterà così diviso nei tre intervalli seguenti:

$$\begin{array}{lll} (x'_A \quad , x'_A + \eta) & \text{nel quale} & f(x) < A + \tau \\ (x'_A + \eta , x''_A - \varepsilon) & \text{"} & f(x) > A + \tau \\ (x''_A - \varepsilon , x''_A) & \text{"} & f(x) < A + \tau \end{array}$$

mentre negli estremi di quegli intervalli si ha

$$\begin{array}{l} f(x'_A) \qquad = f(x''_A) \qquad = A \\ f(x'_A + \eta) = f(x''_A - \varepsilon) = A + \tau \end{array}$$

Similmente si può procedere se in (x'_A , x''_A) la $f(x)$ è inferiore ad A. Si potrà in questo caso, dato un numero σ abbastanza piccolo, dividere l'intervallo stesso nei tre intervalli

$$\begin{array}{lll} (x'_A \quad , x'_A + \eta) & \text{nel quale} & f(x) > A - \sigma \\ (x'_A + \eta , x''_A - \varepsilon) & \text{"} & f(x) < A - \sigma \\ (x''_A - \varepsilon , x''_A) & \text{"} & f(x) > A - \sigma \end{array}$$

mentre negli estremi si ha

$$f(x'_A) \quad = f(x''_A) \quad = A$$
$$f(x'_A + \eta) = f(x''_A - \varepsilon) = A - \sigma$$

Determinando così i numeri η ed ε per ciascuno degli intervalli (x'_A, x''_A), ed anche per gli estremi (a, x_A), (x_A, b), potremo escludere dall' intervallo (a, b) tutti i punti x_A mediante dei piccoli intervalli $(x_A - \varepsilon, x_A + \eta)$ tali che i valori di $f(x)$ in questi stessi intervalli sono compresi fra $A - \sigma$ ed $A + \tau$, mentre in ciascuno dei rimanenti la $f(x)$ o è sempre minore di $A - \sigma$, o è sempre maggiore di $A + \tau$. È chiaro poi che quando σ e τ si avvicinano allo zero, anche tutti i numeri ε ed η devono pure tendere a zero.

Supponiamo ora fissata una legge qualsiasi di divisione dell' intervallo (a, b) in intervalli parziali tendenti a zero; sia $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ una di queste divisioni e consideriamo la corrispondente funzione $\varphi_k(x)$ del § 1.

Per ogni valore A della $f(x)$ e per ogni numero σ e τ soddisfacente alle condizioni precedenti, noi possiamo sempre supporre n abbastanza grande, perchè tutti gli intervalli δ_i, nei quali cadono punti x_A siano *per intero* contenuti negli intervalli $(x_A - \varepsilon, x_A + \eta)$, cioè in modo che nessuno dei loro estremi coincida cogli estremi di questi.

Immaginiamo dapprima soppressi nella $f(x)$ gli intervalli $(x_A - \varepsilon, x_A + \eta)$, e, fissato per ogni intervallo δ_i, o porzione di intervallo δ_i rimanente, un valore $f(x_i)$ di $f(x)$, noi potremo dividere tutti questi intervalli in due gruppi, l'uno composto di tutti quelli nei quali $f(x_i) \leq A - \sigma$, l'altro di quelli nei quali $f(x_i) \geq A + \tau$.

Indicando con $\sum \delta'_i$ la somma dei primi, e con $\sum \delta''_i$ la somma dei secondi, avremo

$$\sum \delta'_i = l_{A-\sigma} \qquad \sum \delta''_i = L_{A+\tau}$$

e poichè (§ 2)

$$l_{A-\sigma} < l_A \qquad L_{A+\tau} < L_A$$

sarà

$$\sum \delta'_i < l_A \qquad \sum \delta''_i < L_A .$$

D'altra parte, indicando con $\sum \delta'''_i$ la somma degli intervalli che abbiamo trascurato, si ha

$$\sum \delta'_i + \sum \delta''_i + \sum \delta'''_i = b - a ,$$

e quindi, poichè $\sum \delta'''_i$ può rendersi piccola ad arbitrio, possiamo concludere che $\sum \delta'_i$, e $\sum \delta''_i$, per σ e τ abbastanza piccoli, differiranno rispettivamente da l_A ed L_A tanto poco quanto si vuole.

Ora immaginiamo di ordinare nell'intervallo (a, b) a partire da a gli intervalli δ_i' secondo la serie crescente dei valori in essi fissati per $f(x)$; e gli intervalli δ_i'' secondo la serie decrescente analoga a partire da b.

Da ciò che precede risulta che facendo crescere indefinitamente n ed impiccolire σ e τ, noi possiamo fare in modo che il valore massimo della prima serie ed il minimo della seconda vengano a coincidere nel punto $a + l_A$ (o $b - L_A$) col valore A.

Ma anche i valori di φ_n collo stesso procedimento dovranno in $a + l_A$ assumere al limite il valore A; difatti nell'intervallo compreso fra $a + l_{A-\sigma}$ e $b - L_{A+\tau}$ i valori di φ_n sono compresi fra due limiti i quali, per n abbastanza grande, differiscono da $A - \sigma$ ed $A + \tau$ di quantità piccole ad arbitrio.

Dunque possiamo concludere che, colle condizioni poste, la funzione *ordinata* $Of(x)$ esiste ed è identica alla $\Gamma(x)$.

Per brevità non insisteremo sulla estensione, abbastanza facile, di questo risultato ai casi in cui $f(x)$ soddisfa alle condizioni enunciate alla fine del § 2.

§ 4. Non sembra facile assegnare regole generali per calcolare la funzione *ordinata* di una data funzione, specialmente partendo dalla sua definizione. Talvolta può essere molto più opportuno ricorrere invece alla costruzione della funzione $\Gamma(x)$, come ora mostreremo con qualche esempio.

α) Se la funzione $f(x)$ nell'intervallo (a, b) è sempre decrescente, è evidente che la sua ordinata sarà $f(a + b - x)$.

β) Sia la $f(x)$ composta di due rami simmetrici rispetto al punto $\frac{b-a}{2}$, cioè soddisfaccia alla relazione

$$f\left(\frac{b-a}{2} + x\right) = f\left(\frac{b-a}{2} - x\right)$$

e di più fra $x = a$ ed $x = \frac{b-a}{2}$ sia $f(x)$ sempre crescente, per cui fra $\frac{b-a}{2}$ e b sarà sempre decrescente.

Sia α un valore di x compreso fra a e $\frac{b-a}{2}$ e sia $f(\alpha) = A$. La funzione assumerà valori inferiori ad A fra a ed α e fra $b - \alpha$ e b, dunque avremo $l_A = 2\alpha$ e perciò

$$Of(x) = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Se invece la $f(x)$ fosse dapprima decrescente fra a e $\frac{b-a}{2}$ poi crescente, si avrebbe

$$Of(x) = f\left(\frac{a+b-x}{2}\right).$$

Conclusioni simili si possono ottenere quando la funzione è composta di un numero qualunque di rami congruenti o simmetrici, nei quali essa è sempre crescente o decrescente.

γ) Possiamo considerare il procedimento che serve a formare la funzione φ_n sotto un punto di vista un po' più generale, supponendo di moltiplicare tutti i valori di $f(x)$ per una costante μ, e di moltiplicare tutti gli intervalli δ_i per un' altra costante λ. La funzione che così si ottiene invece della $\mathrm{O}f(x)$ sarà $\mu\ \mathrm{O}f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ e risulterà determinata nell' intervallo $(a\lambda, b\lambda)$. Indicando questa funzione con $\mathrm{O}_{\lambda,\mu} f(x)$ avremo

$$\mathrm{O}_{\lambda,\mu} f(x) = \mu \mathrm{O} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

e, come risulta immediatamente dalla definizione,

$$(3) \qquad \int_{a\lambda}^{b\lambda} \mathrm{O}_{\lambda,\mu} f(x)\, dx = \lambda\mu \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Questa formola, un po' più generale della (2), può essere utile pel calcolo di alcuni integrali definiti.

Sia, per darne un esempio semplicissimo, nell' intervallo (0,2)

$$f(x) = +\sqrt{1-(x-1)^2}$$

funzione geometricamente rappresentata dalla semicirconferenza di raggio 1, col centro nel punto $x=1$ e passante per l' origine. La sua ordinata $\mathrm{O}f(x)$ è in questo caso $f\left(\frac{x}{2}\right)$ ed è rappresentata dall' arco di quadrante ellittico di semiassi 2 , 1 . La funzione $\mathrm{O}_{\frac{\lambda}{2},\mu} f(x)$ sarà invece

$$\mathrm{O}_{\frac{\lambda}{2},\mu} = +\mu\sqrt{1-\left(\frac{x}{\lambda}-1\right)^2}$$

rappresentata da un arco di quadrante ellittico di semiassi λ , μ . Dalla (3), supposta nota l'area $\frac{1}{2}\pi$ del semicerchio di raggio 1, ricaviamo allora subito l'area $\frac{\pi}{4}\lambda\mu$ del quadrante ellittico.

§ 5. Ecco finalmente il problema idrostatico di cui ho parlato in principio.

Se in un vaso a sezione orizzontale costante abbiamo diversi liquidi di densità differente, non solubili l' uno nell' altro, e soggetti all' azione della gravità, essi potranno restare in equilibrio instabile essendo disposti in modo qualunque l' uno sopra l' altro, quando le loro superficie di separazione e la

superficie libera siano orizzontali. Però se una causa qualunque turba questo equilibrio, i liquidi assumeranno la disposizione d' equilibrio stabile, per la quale le loro densità devono formare una serie crescente dall' alto al basso.

Supponiamo ora di avere un liquido la cui densità varia con continuità dall' uno all' altro de' suoi strati orizzontali secondo una legge qualsiasi, come sarebbe ad es. un liquido omogeneo nel quale la temperatura variasse colla distanza dalla superficie libera. Il liquido si troverà, in generale, in condizione d' equilibrio instabile.

Ora, se cause esterne turbano tali condizioni, noi possiamo domandarci quale sarà la distribuzione della densità, che si avrà nel liquido, quando esso si sarà ridotto allo stato di equilibrio stabile, ammesso che ogni elemento liquido conservi la sua densità ed il suo volume nel passaggio da uno stato all' altro.

Se $f(x)$ è la funzione rappresentante la densità iniziale, x essendo la distanza dalla superficie libera, si vede subito che quella finale deve essere data, conservando le notazioni del § 1, da

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x)$$

e quindi dalla ordinata della funzione $f(x)$.

La relazione (2) rappresenta in questo caso la conservazione della massa.

Fisica. — *Due scariche derivate da un condensatore.* Nota del Socio A. Ròiti.

1. Tutto era disposto simmetricamente rispetto al condensatore C_2 (fig. 1) le cui armature comunicavano con due coppie di eliche formate con filo di rame grosso circa 2 mm., nudo ed assicurato a tre regoli di ebanite. Mediante pozzetti di mercurio le estremità delle eliche maggiori erano collegate cogli elettrodi d' un tubo di Röntgen, e quelle delle eliche minori con uno spinterometro. La carica arrivava al condensatore da una macchina elettroforica passando per i fili secondarî di due grandi rocchetti di Ruhmkorff. La macchina era mandata da un motorino idraulico ed era collegata con un tachimetro ed un freno opportuno per mantenerne costante la velocità.

Scostando i poli della macchina, scoccavano le scintille allo spinterometro, oppure s' illuminava il tubo, secondo che questo era *duro* o *tenero* e che le palline erano più o meno vicine fra loro. Ma in generale le due scariche non avvenivano simultaneamente.

Per ciò bisognava regolare le impedenze dei due rami derivati impegnando fra le varie spire delle eliche i fili di rame AA', BB' e così, fa-

cendo variare gradatamente l'autoinduzione di un ramo, quello per esempio contenente lo spinterometro, mentre rimaneva costante l'altro ramo, si arrivava ad un punto cui corrispondeva, per una data lunghezza della scintilla,

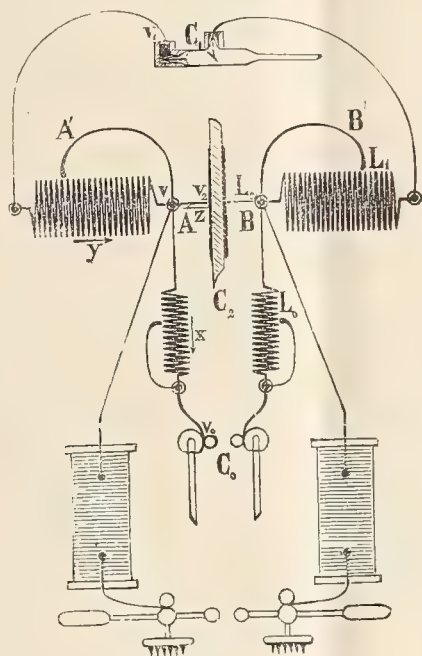



Fig. 1.

un massimo d'intensità dei raggi X emessi dal tubo, quale era accusata dall'attinometro a prisma fluorescente [1].

Una volta stabilite queste condizioni pel massimo, se si permutava il tubo collo spinterometro e si lasciava inalterato tutto il resto, le scintille scoccavano; ma il tubo rimaneva oscuro.

2. Affinchè si manifestasse il massimo per un altro valore dell'autoinduzione nel ramo del tubo, bisognava spostare i fili impegnati nelle eliche del ramo ove scoccavano le scintille, per modo che il rapporto delle due autoinduzioni riuscisse presso che costante.

3. Cambiando poi il condensatore, cambiava il valore di questo rapporto in maniera che, come prima approssimazione, si poteva ritenere che l'autoinduzione nel ramo del tubo dovesse mantenersi proporzionale al prodotto dell'autoinduzione nell'altro ramo per la capacità del condensatore.

4. Il massimo d'emissione dei raggi X aumentava colla lunghezza della scintilla, colla capacità del condensatore ed in generale col valore assoluto delle due autoinduzioni.

(1) *Criptocrosi.* Memorie dell'Accademia, serie 5ª, vol. II, pag. 135. — *Un attinometro pei raggi X.* L'Elettricista, anno V, n. 9.

Invertendo, con acconcio commutatore la corrente di carica, il tubo seguitava ad emettere i raggi di Röntgen, la qual cosa sta a provare che la scarica nel tubo era oscillante. E noterò che il più delle volte l'emissione era maggiore quando l'anticatodo comunicava coll'armatura negativa. che quando comunicava colla positiva. Questa e molte altre singolarità presentava il tubo di Röntgen; ma qui non voglio indugiarmivi, mirando piuttosto a chiarire le condizioni del sistema elettrico oscillante.

5. Messo in disparte il tubo di Röntgen, si colloca uno spinterometro in ciascuno dei rami derivati, e i due spinterometri sono uguali fra loro. Stabilito poi il rapporto delle due autoinduzioni per cui l'emissione dei raggi X risultava massima, si osserva che le scintille scoccano simultaneamente nei due rami anche quando la distanza esplosiva in quello di maggior impedenza è molto maggiore che nell'altro, fino ad un massimo.

Questa distanza esplosiva massima, a differenza della massima emissione degli X, non dipende sensibilmente dal valore assoluto delle due autoinduzioni; ma aumenta anch'essa colla capacità del condensatore, ed aumenta, com'è naturale, colla lunghezza dell'altra scintilla.

6. Mi sono industriato a spiegare questi fenomeni colla solita teoria mettendo in conto la capacità del condensatore, e le autoinduzioni e le resistenze dei due rami; ma mi sono persuaso che nè la soluzione approssimativa data al problema dal prof. A. Garbasso [1], nè un'altra soluzione più rigorosa favoritami dal prof. V. Volterra [2] sono a ciò sufficienti.

7. Quindi mi sono accertato che la resistenza dei rami derivati esercita un'influenza secondaria sull'andamento del fenomeno, poichè il rapporto delle autoinduzioni che determina il massimo rimane presso che inalterato per distanze esplosive diverse e per tubi di Röntgen molto varî.

D'altro canto ho riscontrato che fissando a tergo delle palline scaricatrici due dischi metallici in maniera che le scintille scoccassero fra di essi e perpendicolarmente al loro piano, il fenomeno poteva esserne alterato notevolmente. Mentre i dischi aggiunti allo spinterometro del ramo avente minor induzione non producevano effetti apprezzabili, li producevano marcatissimi se aggiunti all'altro spinterometro, e cioè riducevano meno lontano dall'unità il rapporto delle due autoinduzioni determinante il massimo, e facevano diminuire il valore di questo massimo.

8. Siffatte osservazioni mettono in evidenza la necessità di non trascurare, come si suol fare in casi consimili, le capacità dei rami scaricatori ed autorizzano, per una spiegazione approssimativa, a trascurarne le resistenze. Quindi il problema si può porre considerando un sistema di tre condensa-

[1] *Come si faccia la scarica d'un condensatore, quando ad essa si offrono due vie.* Nuovo Cimento, serie IV, tomo VI, pag. 15.

[2] Ringrazio anche qui il prof. V. Volterra dell'aiuto prestatomi nell'eseguire i calcoli che seguono.

tori simmetrici di capacità c_0, c_1, c_2, simmetricamente riuniti in parallelo fra due punti A, B mediante conduttori aventi autoinduzioni L_0, L_1, L_2 e disposti in modo che l'induzione muta sia trascurabile; indi supponendo che la differenza di potenziale fra A e B si faccia gradatamente aumentare fin che scocchi la scintilla fra le armature del condensatore avente il dielettrico più debole.

Sia c_0 questo condensatore rappresentante lo spinterometro che, essendo disposto per la minor distanza esplosiva, chiameremo *primario*; sia c_1 il condensatore rappresentante l'altro spinterometro che chiameremo secondario e le cui palline supporremo per ora abbastanza discoste perchè non vi scocchi la scintilla, e sia c_2 la capacità del condensatore vero e proprio, e quindi molto maggiore di c_1 e c_0 fino a che non avvenga la scarica.

Ma iniziandosi la prima scintilla, è come se le armature del condensatore primario fossero poste in corto circuito, e però la sua capacità c_0 acquistasse un valore infinito per conservarlo durante tutto il processo. E sarà facile introdurre nelle formole questa condizione quando si sia trovata la soluzione pel caso generale che le tre capacità abbiano valori finiti, che siano dati i valori iniziali delle differenze di potenziale sulle armature dei tre condensatori e che le intensità iniziali delle tre correnti sieno nulle.

9. Indicate con v_0, v_1, v_2, v le differenze di potenziale al tempo t dei tre condensatori e dei due punti di derivazione e con L_0, L_1, L_2 i coefficienti d'autoinduzione dei tre rami che guidano le correnti x, y, z, dovrà essere:

$$(1) \qquad x = c_0 \frac{dv_0}{dt}, \quad -y = c_1 \frac{dv_1}{dt}, \quad -z = c_2 \frac{dv_2}{dt}$$

$$(2) \qquad L_0 \frac{dx}{dt} = v - v_0, \quad -L_1 \frac{dy}{dt} = v - v_1, \quad -L_2 \frac{dz}{dt} = v - v_2$$

$$(3) \qquad x = y + z$$

Eliminando le x, y, z, fra le (1) e (2), si ottiene:

$$(4) \qquad c_0 L_0 \frac{d^2 v_0}{dt^2} + v_0 = v, \quad c_1 L_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + v_1 = v, \quad c_2 L_2 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + v_2 = v$$

le quali, essendo soddisfatta la condizione (3), cioè:

$$(5) \qquad c_0 \frac{dv_0}{dt} + c_1 \frac{dv_1}{dt} + c_2 \frac{dv_2}{dt} = 0.$$

dànno:

$$(6) \qquad \frac{v_0}{L_0} + \frac{v_1}{L_1} + \frac{v_2}{L_2} = v \left(\frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)$$

Ponendo poi:

$$v_0 = A \cos \alpha t \qquad v_1 = B \cos \alpha t \qquad v_2 = C \cos \alpha t$$

$$\beta_0 = 1 - L_0 c_0 \alpha^2 \qquad \beta_1 = 1 - L_1 c_1 \alpha^2 \qquad \beta_2 = 1 - L_2 c_2 \alpha^2$$

le (4) diventano:

$$\beta_0 A = \beta_1 B = \beta_2 C = \frac{v}{\cos \alpha t} \tag{7}$$

e la (6) equivale alla condizione:

$$L_0 L_1 \beta_0 \beta_1 + L_1 L_2 \beta_1 \beta_2 + L_2 L_0 \beta_2 \beta_0 = \beta_0 \beta_1 \beta_2 (L_0 L_1 + L_1 L_2 + L_2 L_0)$$

che sarà soddisfatta se per α^2 si prenderà una radice dell'equazione:

$$a\lambda^3 - b\lambda^2 + c\lambda = 0 \tag{8}$$

dove è:

$$a = c_0 c_1 c_2 (L_0 L_1 + L_1 L_2 + L_2 L_0)$$
$$b = c_0 c_1 (L_0 + L_1) + c_1 c_2 (L_1 + L_2) + c_2 c_0 (L_2 + L_0)$$
$$c = c_0 + c_1 + c_2 .$$

Quindi, posto:

$$\alpha'^2 = \lambda' = \frac{b + \sqrt{}}{2a} \qquad \alpha''^2 = \lambda'' = \frac{b + \sqrt{}}{2a} \qquad \alpha'''^2 = \lambda''' = 0$$

e per le (7):

$$A = H\beta_1\beta_2 \qquad B = H\beta_2\beta_0 \qquad C = H\beta_0\beta_1$$

risulterà:

$$v_0 = H'\beta'_1\beta'_2 \cos \alpha' t + H''\beta''_1\beta''_2 \cos \alpha'' t + H'''$$
$$v_1 = H'\beta'_2\beta'_0 \cos \alpha' t + H''\beta''_2\beta''_0 \cos \alpha'' t + H'''$$
$$v_2 = H'\beta'_0\beta'_1 \cos \alpha' t + H''\beta''_0\beta''_1 \cos \alpha'' t + H'''$$

e le H si dedurranno dai valori u_0, u_1, u_2 che saranno attribuiti a v_0, v_1, v_2 per $t = 0$.

Facendo poi $c_0 = \infty$, si otterrà:

$$\left\{\begin{aligned} &v_0 = u_0 \\ &v_1 = u_0 + \frac{u_1 - u_0}{2}(\cos \alpha' t + \cos \alpha'' t) + \\ &+ \frac{(u_0 - u_1)(L_0 c_1 + L_1 c_1 - L_2 c_2) + (u_0 + u_1 - 2u_2) L_0 c_2}{2\sqrt{b^2 - 4ac}} (\cos \alpha' t - \cos \alpha'' t). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

10. Avendo trascurato la resistenza della scintilla primaria, bisognerà che sia $u_0 = 0$, e se si considera il caso particolare che gli altri due condensatori ricevano la carica mentre sono riuniti in batteria, si potrà porre $u_1 = u_2 = \Delta$, indicata con Δ la differenza di potenziale necessaria affinchè scocchi la prima scintilla primaria.

In tal caso, ponendo:

$$K = \frac{c_1(L_0 + L_1) + c_2(L_0 - L_2)}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \tag{10}$$

ove è:

$a = c_1 c_2 (L_0 L_1 + L_1 L_2 + L_2 L_0)\,,\quad b = c_1 (L_0 + L_1) + c_2 (L_0 + L_2)\,,\quad c = 1$

risulterà:

$$\frac{v_1}{\Delta} = \frac{\cos \alpha'' t + \cos \alpha' t}{2} + K \frac{\cos \alpha'' t - \cos \alpha' t}{2}$$

od anche:

$$\frac{v_1}{\Delta} = \frac{K + 1}{2} \cos \alpha'' t - \frac{K - 1}{2} \cos \alpha' t\,. \tag{11}$$

La quale ci mostra che per ogni scintilla primaria, la variazione della differenza di potenziale allo spinterometro secondario è composta di due oscillazioni semplici che hanno le frequenze $\frac{\alpha'}{2\pi}$ e $\frac{\alpha''}{2\pi}$, e le ampiezze $(K - 1)\Delta$ e $(K + 1)\Delta$, e che si trovano in opposizione di fase al tempo $t = 0$.

11. Gli spostamenti massimi dell' oscillazione risultante saranno certamente compresi fra $+K$ e $-K$, e per conseguenza il valore di K determinerà la lunghezza della scintilla secondaria.

Ciò posto, osserveremo che K, al variare di L_0, assume il valor massimo:

$$K_m = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_0 + L_2}} = \sqrt{\frac{c_2 + c_1}{c_1}} \tag{12}$$

quando è verificata la condizione:

$$(c_1 + c_2)\, L_0 + c_2 L_2 - c_1 L_1 = 0 \tag{13}$$

il che equivale a dire che devono avere lo stesso periodo di vibrazione i due circuiti semplici formati dal ramo contenente il condensatore, e da uno degli altri due rami, giacchè i periodi proprî di questi due circuiti sono:

$$\sqrt{c_0 (L_0 + L_2)} \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} (L_1 + L_2)}$$

12. Intanto la (12) rende ragione del fatto che la scintilla massima, che si produce nel ramo secondario, aumenta insieme colla capacità c_2 del condensatore (§ 5), e diminuisce (§ 7) al crescere della capacità c_1 dello spinterometro, ed inoltre che dipende dal rapporto delle induzioni ma è indipendente (§ 5) dal loro valore assoluto.

Nel caso che sia trascurabile, com' era nelle esperienze, l' autoinduzione L_2 dei fili che vanno dai punti di derivazione A, B alle armature del condensatore, la cui capacità c_2 sia grande rispetto alla capacità delle porzioni di eliche escluse dai fili AA', BB', la condizione (13) pel massimo di K si può porre sotto la forma:

$$\frac{c_2 L_0}{L_1 - L_0} = \text{costante} \tag{14}$$

la quale, se si riflette che L_0 era sempre piccola confronto ad L_1, viene a giustificare la legge sperimentale di proporzionalità approssimativa enunciata al § 3.

13. Per indicare come ho condotto queste determinazioni, dirò che coll'apparato del prof. M. Wien (1) ho potuto costruirmi la curva dell'autoinduzione L_1 corrispondente alle varie disposizioni dei fili AA', BB' impegnati fra le spire delle eliche di maggior diametro, cioè di 12 cm. Le eliche minori, che avevano il diametro di cm. 4,5, le ho potute confrontare nella loro totalità colle precedenti; ma le autoinduzioni L_0 proprie di poche spire, le ho dovute ammettere proporzionali alle ordinate corrispondenti allo stesso numero di spire sulla curva relativa alle eliche maggiori.

I condensatori erano tutti costruiti con una medesima lastra di vetro, avevano le armature circolari di stagnola, e le loro capacità c_2 sono state calcolate colla formola:

$$C = \frac{c_2}{D} = \frac{10^{-20}}{9}\left[\frac{r^2}{4d} + \frac{r}{4\pi}\left(2 + \log\frac{16\pi r}{ed}\right)\right]$$

Per verificare la (14) ho eseguito i calcoli sopra una qualunque delle serie di osservazioni fatte tenendo costante il numero delle spire attive nel ramo contenente un tubo di Röntgen, e cercando per tentativi il numero delle spire che doveva lasciar libere nel ramo dello spinterometro affinchè i raggi X acquistassero l'intensità massima. Ed i risultati sono inscritti nella seguente tabella dall'ultima colonna della quale si vede che le oscillazioni intorno al valor medio sono compatibili cogli errori probabili in tal genere di determinazioni.

r cm.	d cm.	$10^{20}C$	$10^{-6}L_1$	$10^{-6}L_0$	$\frac{10^{20}CL_0}{L_1 - L_0}$	δ
16	0,16	11,25	0,383	0,0041	0,121	+10
10	0,19	3,93		0,0100	0,105	− 6
6	0,20	1,37		0,0300	0,116	+ 5
		11,25	0,725	0,0065	0,102	− 9
		3,93		0,0210	0,117	+ 6
		1,37		0,0523	0,107	− 4
					Media 0,111	

14. In appresso ho dato all'apparecchio una disposizione migliore che è rappresentata nella fig. 2. — Ai due lati del condensatore piano C_2 ed in comunicazione colle sue armature si trovano due recipienti d'ottone entro i quali possono più o meno introdursi le eliche secondarie, ed essere fissate

(1) Wied. Ann. Bd. 57, pag. 249.

da un bottone A, o B, in maniera da far variare le spire attive senza alterare la capacità c_2. L'estremità superiore di queste eliche è saldata ad una asticella che scorre a sfregamento e può nascondersi per intero entro

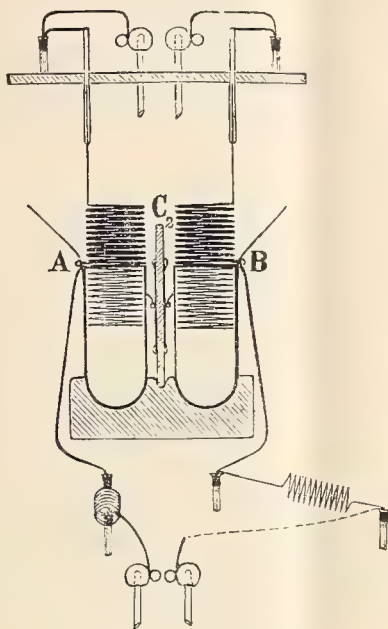



Fig. 2.

un cannello d'ottone, il quale superiormente comunica in modo invariabile con un pozzetto dello spinterometro secondario o del tubo di Röntgen.

Al bottone A, o B, fa capo o direttamente e col mezzo d'un pozzetto una delle eliche primarie (che nella figura per chiarezza sono state abbassate dal piano orizzontale passante per AB, e quella comunicante con B è stata abbattuta) e fanno pure capo i fili adduttori della carica, essendomi accertato che non monta fissarli quivi anzi che alle palline dello spinterometro primario.

Con questa disposizione e con un condensatore circolare del diametro di 30 cm., avente gli orli della stagnola ricoperti da un grosso strato di mastice isolante, ho ottenuto delle scintille secondarie fino a dodici volte più lunghe delle primarie.

15. Ma piuttosto che ad ottenere lunghe scintille, l'ho impiegata a verificare un altro punto della teoria svolta più sopra, e cioè a vedere se e quanto il valore del rapporto $\frac{v_1}{\Delta}$ dedotto dalle due distanze esplosive s'avvicini (§ 10) al valor massimo K_m. Conveniva dunque che rimanessi nei limiti delle tabelle che recano le differenze di potenziale corrispondenti alle varie distanze esplosive fra palline di diametro dato.

Perciò ho scelto la distanza esplosiva primaria di cm. 0,2 fra palline di 2 cm. e facendo variare via via di una unità il numero delle spire, ho

notato le varie distanze cui doveva condurre colla vite micrometrica due sfere di 5 cm. affinchè cominciassero a scoccare in successione regolare le scintille secondarie. Così ho trovato in media di parecchie osservazioni ben concordanti, che la massima distanza esplosiva era di cm. 1,15.

Ora, secondo il prof. A. Heydweiller [1], a scintille di cm. 0,2 fra sfere del diametro di 2 cm. corrisponde una differenza di potenziale come 27, ed a scintille di cm. 1,15 fra sfere di 5 cm. corrisponde 123,2, per cui:

$$\frac{v_1}{\Delta} = \frac{123,2}{27} = 4,56.$$

D'altra parte, con un condensatore avente la capacità calcolata

$$c_2 = 6,66 \times 10^{-20} \frac{\text{sec.}^2}{\text{cm.}}$$

e con un'autoinduzione secondaria $L_1 = 0,725 \times 10^6$ era richiesta per la massima distanza esplosiva l'autoinduzione primaria $L_0 = 0,031 \times 10^6$, per cui facendo $L_2 = 0$ nella (12), risulta:

$$K_m = \sqrt{\frac{L_1}{L_0}} = 4,90.$$

Il disaccordo non arriva al 7 per 100, ed è molto minore di quello che si può aspettare da determinazioni di questo genere, tanto più se si pensa che l'aver trascurata L_2 porta ad aver aumentato un pochino il valore di K, e che il riscaldamento dell'aria fra le palline primarie tende ad abbassare il valore di $\frac{v_1}{\Delta}$.

Le scintille si succedevano rapidissimamente perchè in queste ultime esperienze il condensatore era caricato da una macchina di Töpler con 36 dischi che ho fatto costruire dal sig. Silvio Lavacchini, meccanico del R. Istituto di studî superiori, su disegno gentilmente procuratomi dal prof. W. Voigt.

Ringrazio anche il dott. Guido Ercolini per l'assistenza prestatami nel fare le osservazioni.

(1) Wied. Ann. Bd. 48, pag. 235.

Zoologia medica. — *Ulteriori ricerche sul ciclo dei parassiti malarici umani nel corpo del zanzarone.* Nota preliminare di B. Grassi, A. Bignami e G. Bastianelli.

Continuando nello studio del ciclo evolutivo dei parassiti della malaria nel corpo dell'*Anopheles claviger Fabr.* (zanzarone), abbiamo seguito due vie. Abbiamo, cioè, esaminato un gran numero di zanzaroni presi in vita libera nelle camere e nelle capanne, ove dormivano uomini affetti da febbri malariche; in questi zanzaroni venivano osservati vari stadi di sviluppo del parassita. Da tale studio, vista la quantità del materiale adoperato, potevamo aspettarci, come avvenne di fatto, risultati notevoli. Contemporaneamente erano studiati i zanzaroni, raccolti nelle stalle e nei pollai, i quali, nutrendosi di sangue di uccelli e di mamiferi domestici, potevano servire fino ad un certo punto come controllo delle osservazioni precedenti.

L'altra via fu di seguire lo sviluppo dei parassiti in *Anopheles*, dai quali si facevano pungere in giorni ed ore determinate i malarici dell'ospedale. Venivano sezionati sistematicamente giorno per giorno e così si seguiva lo sviluppo regolare del parassita, mentre in altri zanzaroni che non avevano punto uomini malarici ed erano tenuti nelle stesse condizioni non si osservavano i parassiti in discorso.

Anche con questo metodo le nostre osservazioni sono state portate sopra un gran numero di individui.

La comparazione dei risultati ottenuti per le due vie diverse doveva servire alla ricostruzione del ciclo evolutivo dell'emosporidio della malaria umana.

Gli *Anopheles* sono stazionari circa dal principio di novembre nelle abitazioni, nelle stalle e nei pollai, senza uscir fuori tranne in casi eccezionali [1]. Ciò si verifica anche in Lombardia, dove questa stazionarietà dura dal principio di settembre. I zanzaroni nella campagna Romana seguitarono a pungere, mentre in Lombardia le loro punture andarono diradandosi di molto.

In queste condizioni le femmine [2] stazionarie nelle abitazioni di persone malariche dovevano infettarsi molto, e quelle dimoranti nelle stalle e nei pollai, dovevano mantenersi almeno in gran maggioranza non infette. Ciò inducevamo dal fatto che quando i zanzaroni erano abbondantissimi, era difficile trovarne di infetti, tanto che uno di noi, il Grassi, non ebbe a vederne uno solo in tante dissezioni che fece a Locate Triulzi. Conformemente alla nostra induzione, la

(1) Nelle case si trovano però quasi soltanto femmine. Gli ovari si mantengono molto arretrati nello sviluppo nella gran maggioranza dei casi. Le femmine si cibano di sangue: una volta sola ne trovammo una che avea nell' intestino granuli di clorofilla.

(2) Si noti che le femmine continuano a nutrirsi (ad intervallo di circa 2 giorni, se stanno alla temperatura di 30° circa) senza che gli ovari maturino.

percentuale di zanzaroni infetti raccolti in certe abitazioni di malarici andò crescendo fino a raggiungere il 75 %, mentre non abbiamo ancora trovato alcun zanzarone infetto ([1]) fra quelli presi in una stalla o in un pollaio; ma ciò deve anche mettersi in rapporto colla circostanza che il zanzarone infetto si libera dei parassiti (vedi più sotto).

Come si è detto, negli *Anopheles* catturati nelle abitazioni abbiamo potuto vedere tutte le fasi di sviluppo dell'emosporidio. Per brevità di descrizione riportiamo insieme i risultati di queste osservazioni con quelli ottenuti dalle culture metodiche.

Le colture erano fatte mettendo immediatamente dopo la puntura il zanzarone in stufa alla temperatura di 30°. Una serie di osservazioni datanti dai primi di novembre ci fa sospettare che alla temperatura di 14-15° (temperatura ambiente) nelle prime ore dopo la puntura, non si possa avere lo sviluppo dell' emosporidio.

Uno sviluppo si ha certamente tenendo i zanzaroni a temperatura di 20-22°, ma procede più lentamente che non a 30°, e l' esame degli insetti diventa più difficile perchè si liberano più lentamente del sangue. Sicchè i nostri risultati rispetto al tempo, a cui si riferiscono le singole fasi dopo la puntura, sono quelli che si ottengono tenendo l' *Anopheles* a 30° in stufa.

Per le febbri estivo-autunnali, abbiamo già detto in una Nota precedente che le forme della fase semilunare dell' uomo si sviluppano ulteriormente nel zanzarone.

Perchè lo sviluppo delle semilune abbia luogo, è necessario che esse siano mature; solo quando esaminando il sangue si riscontrano forme della fase semilunare che si trasformano rapidamente in corpi rotondi e si flagellano, si hanno risultati positivi: si può dire che quando queste forme sono completamente mature, se ne ottiene uno sviluppo regolare, nell' ospite nuovo.

Quale sia il modo di penetrazione della semiluna nelle pareti dell' intestino medio e quali fasi percorra prima di penetrarvi, non è argomento di questa Nota: ce ne occuperemo in un prossimo lavoro.

Dopo 2 giorni si vedono nell' intestino medio tra le fibre muscolari dei corpi subrotondi, od ovoidi, o più di rado rotondi, forniti di capsula (emosporidio in via di sviluppo).

Il pigmento si riconosce identico a quello delle semilune: esso sta vicino alla periferia in ammassi piuttosto grossi: di frequente appare disposto in due file parallele; a metà della lunghezza di ogni fila stanno le masse più grosse. A fresco il corpo dell' emosporidio è molto trasparente, con accenno di vacuoli.

([1]) Si eccettua il reperto delle spore (corpi bruni) di cui appresso.

Dopo 4 giorni i parassiti sono aumentati di volume, l'aspetto vacuolare è più evidente: il pigmento sembra in minore quantità ed è qua e là disperso.

Dopo 6 giorni i parassiti sono enormenente cresciuti di volume: stanno nello spessore dell' intestino medio, facendo ernia, ciò che era già cominciato allo stadio precedente, nella cavità del celoma, dalla quale apparentemente li separa una tunica esterna anista dell' intestino medio. Si vedono bene anche coi piccoli ingrandimenti. Vi si distinguono moltissimi corpiccioli: il pigmento è diminuito: si notano inoltre dei corpuscoli splendenti d'aspetto adiposo, che in parte esistevano già in stadi precedenti.

Dopo 7 giorni il parassita contiene un enorme numero di filamenti disposti a raggi attorno a parecchi centri: i filamenti sono lunghi circa 14 μ. e sono estremamente sottili. In alcuni individui si distingue con nettezza una massa chiara omogenea, in altri se ne distinguono due-tre, in altri infine non si riesce a vederne. Esiste ancora il pigmento: esso sta nelle masse chiare or ora indicate. Da questi parassiti schiacciati escono fuori i filamenti.

Se le singole forme fin qui descritte vengono studiate con i metodi citologici, è facile persuadersi che siamo davanti ad uno sporozoo, di cui seguiamo le varie fasi fino alla maturazione. Il processo trova riscontro in molte altre forme di sporozoi e consiste essenzialmente nell'aumento di volume accompagnato da incapsulamento e da moltiplicazione del nucleo che finisce (sesto giorno) a trovarsi diviso in numerosissimi nuclei piccolissimi, attorno ai quali si dispone un po' di protoplasma (sporoblasti senza capsula), lasciando dei residui di segmentazione (*nucleus de reliquat*).

Gli sporoblasti si trasformano direttamente in altrettanti sporozoiti, molto delicati, filiformi, ad estremità assottigliate, lunghi circa 14 μ.

Lo sporozoo maturo (settimo giorno) è appunto costituito da una capsula sottile, da innumerevoli sporozoiti e dai residui di segmentazione.

Nei giorni successivi si trovano aderenti ancora all' intestino le capsule rotte e afflosciate, e vicino ad esse gli sporozoiti: essi si disperdono per tutto il celoma. Più tardi si rinvengono accumulati in enorme numero soltanto nei tuboli componenti le glandole salivari: qui stanno, o dentro le cellule, o nel lume da queste delimitato.

In questo stadio si possono trovare ancora nell' intestino le capsule, o i residui di queste, ma in qualche individuo non si trova più nulla. È lecito ammettere che in quest'ultimo caso le capsule siano state riassorbite.

Gli sporozoiti quando sono ancora nella capsula appaiono immobili, così pure nelle glandole salivari: in un caso però, mentre erano dispersi in varie parti del corpo, li abbiano veduti mobili.

Per le terzane comuni (*primaverili*) le nostre osservazioni sono meno avanzate: fino ad ora abbiamo seguito lo sviluppo dell' Emosporidio soltanto

fino al 5° giorno. Lo studio della terzana presenta maggiori difficoltà perchè le forme mature e non sporulanti, che sono quelle che si sviluppano nell'*Anopheles*, non si trovano nel sangue in così gran numero come le forme semilunari: sicchè il reperto nel zanzarone è senza confronto più scarso.

Gli Emosporidi della terzana si distinguono nel corpo dell'*Anopheles* da quelli delle febbri estivo-autunnali almeno per gli stadi che abbiamo finora osservati. Il corpo dell' Emosporidio è più pallido, meno rifrangente ed un poco più grande ad uguale stadio di sviluppo; il pigmento è assai più scarso e più fino.

Naturalmente negli *Anopheles* che hanno punto parecchie volte si rinvengono uno accanto all' altro i differenti stadî di sviluppo: ciò vale tanto per la terzana primaverile quanto per le febbri estivo-autunnali.

In rari casi (zanzaroni presi nelle abitazioni dei malarici e nelle stalle) abbiamo riscontrato dei corpi speciali che meritano tutta la nostra attenzione.

Questi corpi sono di forma e di lunghezza varie: alcuni a forma di salsiccia, più lunghi di uno sporozoite e con strozzamenti, altri lunghi circa la metà di uno sporozoite, ovalari, dritti o curvi. Essi hanno una membrana robusta di color giallobruno e contengono un corpo paragonabile ad uno sporozoite, evidente sopratutto nelle forme corte. Si possono seguire i varî stadî di sviluppo della membrana. I corpi in discorso si trovano in mezzo a masse granulose senza capsula, o incapsulate.

Evidentemente si tratta di spore, quali si riscontrano in altri sporozoi. Come si sviluppino, non abbiamo potuto finora precisarlo.

Talvolta colpisce straordinariamente l' irregolarità loro, la quale può essere tale da far pensare a processi degenerativi.

Rivolgiamo l' attenzione alle glandole salivari di molti *Anopheles*, che hanno punto malarici da parecchio tempo. Nelle glandole salivari si vede *con molta frequenza* che le cellule invece di presentarsi ialine, hanno un contenuto che descriveremo con qualche particolare.

Talvolta tutta la cellula è riempita da corpicciuoli apparentemente rotondi, subrotondi o lievemente allungati, ammassati; di altre cellule essi occupano solo la parte centrale. Talvolta in un tubulo si trovano poche cellule contenenti questi corpicciuoli, ma più spesso uno o più tubuli ne sono ripieni. Se si schiaccia la glandola, fuoriescono dalle cellule suddette corpicciuoli fusiformi, molto più corti degli sporozoiti, più tozzi e forniti di nucleo. In qualche caso abbiamo veduto nella stessa cellula in mezzo a questi corpicciuoli corti dei filamenti, che si riconoscevano facilmente essere gli sporozoiti ordinarî, provenienti dalle capsule apertesi nel celoma. In un caso questi sporozoiti furono veduti al microscopio accorciarsi e prendere la forma dei corpicciuoli più corti ora descritti.

Accanto alle cellule contenenti questi corpi, se ne trovano altre contenenti una grossa massa, generalmente rotonda, talvolta curva, quasi a

sembrare una semiluna, ovvero varie masse simili, più piccole, d'aspetto jalino.

Questo reperto è stato osservato: 1) negli *Anopheles* provenienti dalle abitazioni e sezionati a periodi più o meno lontani dalla puntura; 2) negli *Anopheles* che avevano prodotto una terzana primaverile circa un mese prima.

In complesso da quanto finora abbiamo veduto risulta che, mentre il reperto di sporozoiti uguali a quelli delle capsule intestinali è andato diminuendo man mano che ci allontanavamo dal periodo in cui il zanzarone presentava i parassiti maturi nelle pareti intestinali, al contrario è andato aumentando il reperto dei corpi jalini descritti sopra.

Tutti questi fatti si possono spiegare ritenendo che gli sporozoiti non espulsi dalle glandole salivali vadano incontro ad un processo regressivo, si modifichino nella forma e nell'aspetto e finiscano per esser digeriti.

Le osservazioni fin qui riportate permettono di ricostruire il ciclo di vita degli Emosporidi umani nel corpo dell'*Anopheles claviger*: esso trova in gran parte riscontro in quello osservato da Ross per il *proteosoma* degli uccelli nel *grey mosquito*.

Tra le fibre della tunica muscolare dell'intestino medio, specialmente nei tre quarti posteriori di questo, i parassiti malarici si sviluppano ulteriormente.

Tale sviluppo si è constatato, sino ad ora, per i parassiti delle febbri estivo-autunnali e per quelli della terzana comune. Ma non tutte le forme di questi due parassiti sono capaci di svilupparsi nell'ospite nuovo. Per le febbri est.-aut. lo sviluppo si verifica quando vi sono nel sangue del paziente semilune adulte capaci di mutarsi in flagellati: per la terzana quando vi sono grossi corpi pigmentati sterili, già descritti da varî osservatori, che possono flagellarsi: cioè lo sviluppo si verifica quando vi sono nel sangue quelle forme che il Grassi e il Dionisi giudicano gameti. Come si è veduto, le prime fasi di vita nell'intestino del zanzarone presentano aspetto alquanto differente a seconda che provengono dalle semilune, o dai corpi pigmentati della terzana, tanto che è possibile, se non facile, la diagnosi differenziale tra le due forme.

L'emosporidio cresce piuttosto lentamente e presto si circonda di una capsula. Sulla rapidità dello sviluppo pare abbia importanza la temperatura dell'ambiente e forse anche la possibilità, in cui si trova il zanzarone di nutrirsi, o no di nuovo. Di mano in mano che lo sviluppo procede, il parassita fa sporgenza nella cavità del celoma. Esso raggiunge il diametro di circa 70 μ.

Mentre avviene questo progressivo aumento di volume, nell'interno del parassita si producono quegl'intimi mutamenti di struttura che conducono alla sporulazione (sporoblasti nudi che si trasformano direttamente in spo-

rozoiti). Ad un certo punto la capsula si rompe e gli sporozoiti si disperdono nel celoma.

In uno stadio più avanzato gli sporozoiti si trovano raccolti entro le cellule delle glandole salivari, alcune delle quali ne possono contenere un numero grandissimo. Dalle cellule vengono eliminati nel lume dei tuboli glandolari, dove qualche volta si possono vedere in tale abbondanza che lo riempiono in gran parte. Così si capisce come, quando l' *Anopheles* punge di nuovo l' uomo, possa infettarlo.

Questo passaggio dall' uomo all' *Anopheles* e da questo di nuovo all' uomo, viene *completamente* dimostrato dalle osservazioni e dagli esperimenti e costituisce il risultato più sicuro delle nostre ricerche.

L' emosporidio presenta un altro ciclo di vita nel corpo del zanzarone, la cui destinazione non è ancora chiarita. Mentre la grandissima maggioranza dei parassiti forma sporozoiti, alcuni terminano con la formazione delle spore giallo-brune descritte sopra.

Queste ultime sono state riscontrate da noi soltanto in rari esemplari. La grossa membrana, di cui sono provviste, fa pensare con fondamento che siano dotate di grande resistenza agli agenti esterni. Certamente colla morte delle zanzare possono passare nell' acqua.

Due ipotesi si possono fare sulla loro ulteriore evoluzione. Esse sono destinate o ad infettare la prole (soltanto?), o direttamente l' uomo che le ingoia coll' acqua.

Contro quest' ultima ipotesi stanno tutti i fatti epidemiologici, che sono stati invocati contro la così detta *teoria dell' acqua*: Bignami e Bastianelli ritengono più che inverosimile il concetto che l'uomo possa infettarsi bevendo le acque dei luoghi palustri. Ma non vogliamo qui entrare in questa discussione, che è stata fatta lungamente in vari scritti recenti.

Malgrado però tutto, nuovi esperimenti sono stati iniziati per vedere se l' ingestione di queste *spore* possa produrre la febbre malarica nell' uomo e ne attendiamo i risultati.

La prima ipotesi include l' idea della infezione ereditaria delle zanzare: include, cioè, il concetto che l' infezione sporozoica possa passare dalle zanzare alla nuova generazione. A favore di questa ipotesi sta, innanzi tutto, l' analogia della febbre del Texas, nella quale il passaggio dell' infezione dalla zecca madre ai figli è dimostrato: stanno inoltre, secondo due di noi, Bignami e Bastianelli, alcuni fatti epidemiologici che sarebbe difficile spiegare altrimenti. Ad esempio, come si potrebbe spiegare l' insorgere, nella campagna di Roma, dei primi casi di febbre estivo-autunnale sulla fine di Giugno o in principio di Luglio, mentre nella primavera malati con semilune non si trovano affatto? Si potrebbe forse osservare che si trovino eccezionalmente. Ma, ammesso anche il fatto eccezionale, come spiegare con esso il fatto costante, a cui si è sopra accennato? Tutto ciò porterebbe di necessità ad am-

mettere l' infezione ereditaria delle zanzare [1], se la difficoltà di spiegare un fatto potesse valere come argomento sufficiente a farne ammettere un altro.

Ma, volendo rimanere nei limiti dei fatti osservati, dobbiamo, per ora, lasciare la questione insoluta. Aggiungiamo soltanto, che tutte le ricerche fatte sulle uova di zanzaroni infetti non ci hanno permesso, sino ad ora, di rilevarvi alcun corpo parassitario: la qual cosa ci allontana dall' ipotesi, che l' infezione ereditaria delle zanzare, se pure avviene, si faccia direttamente dentro le uova.

E però propendiamo per l' idea che l' infezione della prole avvenga per ingestione delle spore da parte delle larve.

Conchiudendo possiamo affermare:

1° Gli Emosporodi della malaria (i fatti sopraesposti e quelli già noti dal punto di vista zoologico permettono di mantenere la famiglia degli *Emosporidi* o *Emamebini*, che si voglia dire), percorrono nell' uomo il ben noto ciclo di vita caratterizzato dalla lunga durata della fase ameboide e dalla mancanza di stadi incapsulati: in questo ciclo si riproducono un numero indeterminato di volte, ma danno anche luogo a forme che per l' uomo restano sterili (gameti di Grassi e Dionisi) [2].

Queste ultime pervenendo nell' intestino dell'*Anopheles claviger* Fabr. [3] allo stato d' insetto perfetto, si sviluppano come sporozoi tipici sino a formare un numero enorme di sporozoiti che accumolandosi nelle glandole salivari ritornano nell' uomo all'atto della puntura. Possono invece percorrere un altro ciclo di vita, che dà luogo alla formazione di spore.

2°. Lo sviluppo degli Emosporidii malarici nel corpo del zanzarone è dimostrato per il parassita delle febbri estivo-autunnali e per quello della terzana ordinaria [4].

3. Mentre è dimostrato il passaggio diretto degli emosporidi dall' uomo al zanzarone e da questo di nuovo all' uomo, il passaggio dalle zanzare alla prole è verosimile, ma in linea di fatto include una questione che resta ancora da studiare.

Aggiunte ulteriori. — Nelle larve di certi Culicidi la parete dell' intestino medio presenta degli Sporozoi: avremo presto occasione di stabilire se essi abbiano rapporti cogli Emosporidi.

[1] L. Pfeiffer ha trovato in una larva di *Culex* una *Glugea*, che potrebbe appartenere al ciclo evolutivo degli emosporidi.

[2] La sede di formazione delle semilune è il midollo osseo (Marchiafava e scolari): si può pensare che lo stesso accada per le forme analoghe delle febbri primaverili.

[3] Sinonimi: *Anopheles maculipennis* Meig. e *Zanzarone*.

[4] Ciò non esclude naturalmente che possa verificarsi anche in altre specie di ditteri.

I zanzaroni in certe località presentano spesso le spore, di cui si parla nella Nota.

Nelle uova molto sviluppate di alcuni zanzaroni abbiamo trovato numerosissimi corpi, che potrebbero interpretarsi come spore degli Emosporidi umani.

Abbiamo ottenuto un altro caso di terzana comune colle punture di soli sette zanzaroni.

Matematica. — *Sulla convergenza delle frazioni continue algebriche.* Nota del dott. ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Se indichiamo con x il punto generico di un insieme infinito ed ordinato Γ, e rappresentiamo con $t = \varrho e^{i\theta}$ un punto qualunque, del piano della variabile complessa, essendo date $n+1$ funzioni arbitrarie:

$$a_{0,x}(t)\,,\ a_{1,x}(t)\,,\dots,\ a_{n,x}(t)\,,$$

delle due variabili $x\,,t$, dalla forma lineare alle differenze:

$$\mathrm{A}(y) = a_{0,x}(t)y_{x+n} + a_{1,x}(t)y_{x+n-1} + \cdots + a_{n,x}(t)y_x\,,$$

si possono imaginare generate infinite specie di algoritmi di cui, nel caso di forme del 2° ordine, il più semplice ed importante è quello delle frazioni continue.

Le condizioni di convergenza di quegli algoritmi sono ancora poco note; il solo ad occuparsene, e per certi speciali algoritmi detti « *generalizzati delle frazioni continue* », fu il prof. Pincherle [1] il quale peraltro ha sempre ammesso che, in ogni punto t, di un determinato intorno, convergano regolarmente verso limiti unici, le successioni:

$$a_{s,0}(t)\,,\ a_{s,1}(t)\,,\ a_{s,2}(t)\,,\ \dots$$
$$(s = 0\,,1\,,\dots n)$$

Per gli algoritmi periodici, a mo' d'esempio, non si saprebbe applicare alcun criterio di convergenza, e nemmeno si saprebbe rispondere alla domanda: *se la frazione continua algebrica* PERIODICA:

$$a_0(t) + \cfrac{b_1(t)}{a_1(t) + \cfrac{b_2(t)}{a_2(t) + \cdots}}$$

possa, in qualche caso, definire una funzione analitica della t.

[1] Sarebbe troppo lungo ricordare tutti gli importanti lavori del Pincherle su questo argomento; citerò, p. es.: *Contributo alla generalizzazione delle frazioni continue* (Mem. Acc. di Bologna, a. 1894).

Poichè gli algoritmi periodici sono particolarmente importanti per la rappresentazione approssimata delle funzioni algebriche [1], così mi sono occupato di stabilire delle condizioni sufficienti per la loro convergenza, ed ho brevemente esposto il metodo ed i principali risultamenti, in una nota che è in corso di stampa. Qui tratterò, con maggior larghezza, il caso più semplice ed ovvio delle frazioni continue; ma il ragionamento sarà condotto per modo che risulti manifesta la possibilità della generalizzazione ad algoritmi di ordine superiore.

1. Sia la forma alle differenze

$$\text{(1)} \qquad A(y) = y_{x+2} + a_x y_{x+1} + b_x y_x ,$$

e sia φ_x un suo integrale. Si avrà identicamente:

$$\text{(2)} \qquad \frac{\varphi_{x+2}}{\varphi_{x+1}} = a_x + b_x \frac{\varphi_x}{\varphi_{x+1}} .$$

Se, in un determinato punto x_0, sono soddisfatte le condizioni:

$$\text{(3)} \qquad \left| \frac{\varphi_{x_0+1}}{\varphi_{x_0}} \right| > 1$$

$$\text{(4)} \qquad |a_{x_0}| > |b_{x_0}| + 1 + \eta ,$$

con η quantità positiva, sarà ancora:

$$\text{(5)} \qquad |a_{x_0}| + |b_{x_0}| > \left| \frac{\varphi_{x_0+2}}{\varphi_{x_0+1}} \right| > 1 + \eta .$$

Se poi, la condizione espressa dalla (4), è soddisfatta in tutti i punti dell' insieme ordinato Γ, che vengono dopo x_0, si avrà costantemente:

$$\left| \frac{\varphi_{x+1}}{\varphi_x} \right| > 1 + \eta ,$$

e *la successione dei valori assoluti che la* φ *prende nei punti del campo* Γ, *tenderà all' infinito sempre crescendo.*

2. Sieno ora a_x, b_x, funzioni razionali ed intere della variabile complessa t:

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} a_x = a_{0,x}\, t^r + a_{1,x}\, t^{r-1} + \cdots + a_r \\ b_x = b_{1,x}\, t^{r-1} + b_{2,x}\, t^{r-2} + \cdots + b_r , \end{cases}$$

supponiamo inoltre che $a_{0,x}$ sia sempre diversa dallo zero e, che così, il grado di $a_x(t)$ sia superiore a quello di $b_x(t)$.

[1] Cfr. *Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche periodiche* (Rend. Circolo Mat. di Palermo, tomo VI); *Un contributo alla teoria delle forme lineari alle differenze*, § V (Annali di Mat. 1895).

La condizione (4) prenderà la forma:

$$|a_{0,x}t^r + \cdots + a_{r,x}| > |b_{1,x}t^{r-1} + \cdots + b_{r,n}| + 1 + \eta,$$

e sarà certamente soddisfatta se:

$$(8) \qquad |a_{0,x}|\varrho^r > |a_{1,x} + b_{1,x}|\varrho^{r-1} + \cdots + |a_{r,x} + b_{r,x}| + 1 + \eta.$$

Poniamo che esista, diverso dallo zero, il limite inferiore α delle $|a_{0,x}|$, ed esistano anche, finiti e determinati, i limiti superiori $A_0, A_1, \dots A_r$, dei moduli: $|a_{0,x}|, |a_{1,x} + b_{1,x}|, \dots, |a_{r,x} + b_{r,x}|$.

La condizione (8) sarà, a più forte ragione, soddisfatta se:

$$\alpha\varrho^r > A_1\varrho^{r-1} + \cdots + A_r + 1 + \eta.$$

Quest' ultima però è certamente soddisfatta per tutti i punti $t = \varrho e^{i\theta}$, che sono esterni al cerchio (R_1), dove sono racchiuse tutte le radici della equazione, a coefficienti reali:

$$(9) \qquad \alpha\varrho^r - A_1\varrho^{r-1} - \dots - A_r - 1 - \eta = 0;$$

ed allora per tutti i punti situati fuori di questo cerchio, o sulla circonferenza, si avrà la limitazione:

$$A_0\varrho^r + A_1\varrho^{r-1} + \dots + A_r > \left|\frac{\varphi_{x+1}(t)}{\varphi_x(t)}\right| > 1 + \eta.$$

Cioè: *Se $\varphi_x(t)$ è un integrale della $A(y)$ che in due punti consecutivi x_0, $x_0 + 1$, dell'insieme Γ, e per un determinato valore $t_0 = \varrho_0 e^{i\theta_0}$, assume valori crescenti, in modulo,*

$$|\varphi_{x_0+1}(t_0)| > |\varphi_x(t_0)|,$$

la successione:

$$|\varphi_x(t)|, |\varphi_{x+1}(t)|, |\varphi_{x+2}(t)|, \dots$$

tende all' infinito, sempre crescendo, per ogni punto t situato fuori di un cerchio (R_1) che contenga nel suo interno il punto t_0 e tutte le radici della equazione numerica (9).

In particolare: *Nessuna delle funzioni $\varphi_{x_0}(t)$, $\varphi_{x_0+1}(t)$, ... può aver radici situate fuori del cerchio (R_1).*

3. È facile determinare anche un cerchio (R_μ) tale che, per tutti i punti situati fuori di questo cerchio, o sulla sua circonferenza, sia:

$$\left|\frac{a_x}{b_x}\right| > \mu,$$

in qualunque modo il numero positivo μ sia stato scelto.

Basterà infatti determinare un limite superiore dei moduli delle radici della equazione numerica:

$$\begin{cases} \alpha\varrho^r - B_1\varrho^{r-1} - \cdots - B_r = 0 \\ B_s = \text{lim sup. di } |a_{s,x} + \mu b_{s,x}|, \end{cases}$$

per avere il raggio di quel cerchio.

È chiaro altresì che, fuori del cerchio che contiene tutte le radici della equazione numerica:

$$\alpha\varrho^r - A_1\varrho^{r-1} - \dots - A_r - \mu = 0\,,$$

si ha costantemente

$$\left|\frac{\varphi_{x+1}(t)}{\varphi_x(t)}\right| > \mu\,. \tag{11}$$

Prendendo quello dei due cerchi che ha maggior raggio e chiamandolo ancora (R_μ) avremo che: *fuori di un tale cerchio, e sulla sua circonferenza, sono costantemente soddisfatte le due relazioni*:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{a_x(t)}{b_x(t)}\right| > \mu \\ \left|\dfrac{\varphi_{x+1}(t)}{\varphi_x(t)}\right| > \mu \end{cases} \tag{12}$$

4. Mantenendo, per i coefficienti della $A(y)$ e per il suo integrale $\varphi_x(t)$, le condizioni ammesse nei numeri precedenti, indichiamo ora con $\psi_x(t)$ un altro integrale della $A(y)$, del quale ammetteremo soltanto che *le sue espressioni, che potremo chiamare iniziali*, $\psi_{x_0}(t)$, $\psi_{x_0+1}(t)$, sieno tali che *esista un limite superiore finito* M *per i valori assoluti della differenza finita*:

$$\left|\Delta\frac{\psi_{x_0}(t)}{\varphi_{x_0}(t)}\right| = \left|\frac{\psi_{x_0+1}(t)}{\varphi_{x_0+1}(t)} - \frac{\psi_{x_0}(t)}{\psi_{x_0}(t)}\right| \tag{13}$$

Dico che allora *la espressione* $\dfrac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)}$, *per ogni punto t esterno ad un cerchio di raggio determinato, al crescere indefinito di x, tende ad un limite finito e determinato* $U(t)$; *e che questo è funzione analitica della t regolare fuori di quel cerchio.*

Ed infatti, si ha identicamente:

$$\frac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)} = \frac{\psi_{x_0}(t)}{\varphi_{x_0}(t)} + \sum_{n=1}^{x-x_0} u_n \tag{14}$$

$$u_n = \frac{\psi_{x_0+n}(t)}{\varphi_{x_0+n}(t)} - \frac{\psi_{x_0+n-1}(t)}{\varphi_{x_0+n-1}(t)}\,,$$

$$u_n = \frac{D_{x_0+n}}{\varphi_{x_0+n}(t)\,\varphi_{x_0+n-1}(t)}\,,\quad D_{x_0+n} = \begin{vmatrix} \psi_{x_0+n} & \varphi_{x_0+n} \\ \psi_{x_0+n-1} & \varphi_{x_0+n-1} \end{vmatrix} \tag{15}$$

Facilmente si scorge che:

$$D_{x_0+n} = -\,b_{x_0+n-1}\,D_{x_0+n-1}\,; \tag{16}$$

e perciò:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = -\,b_{x_0+n-2}\cdot\frac{\varphi_{x_0+n-1}(t)}{\varphi_{x_0+n}(t)}\cdot\frac{\varphi_{x_0+n-2}(t)}{\varphi_{x_0+n-1}(t)}\,.$$

Siccome però:

$$\left|\frac{\varphi_{x+1}(t)}{\varphi_x(t)}\right| > |a_x| - |b_x| > 1 + \eta \,,$$

così avremo:

$$(17) \qquad \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| < \frac{|b_{x_0+n-2}|}{|a_{x_0+n-2}| - |b_{x_0+n-2}|} \,;$$

e, fuori dal cerchio (R_μ), sarà

$$(18) \qquad \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| < \frac{1}{\mu - 1} \,.$$

Basta solo che sia $\mu = 2 + \eta$ *per essere certi della convergenza della serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \,,$$

cioè della esistenza del limite

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)} = U(t)$$

per ogni punto t *situato fuori del cerchio* R_μ *o sulla sua circonferenza.*

Dico inoltre che, *per i punti di una stessa circonferenza* (R_μ)*, la frazione* $\frac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)}$*, tende uniformemente al limite* $U(t)$.

Ed infatti:

$$\left| U(t) - \frac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)} \right| = \left| \sum_{n=x-x_0}^{\infty} \frac{D_{x_0+n}}{\varphi_{x_0+n}\, \varphi_{x_0+n-1}} \right| < \left| \frac{D_{x_0}}{\varphi_{x_0+1}\, \varphi_{x_0}} \right| \sum_{n=x-x_0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu - 1} \right)^n ,$$

cioè:

$$\left| U(t) - \frac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)} \right| < \left| \frac{D_{x_0}}{\varphi_{x_0+1}(t)\, \varphi_{x_0}(t)} \right| \frac{1}{\mu - 2} \left(\frac{1}{\mu - 1} \right)^{x-x_0-1}$$

Ma:

$$\left| \frac{D_{x_0}}{\varphi_{x_0+1}(t)\, \varphi_{x_0}(t)} \right| = \left| \frac{\psi_{x_0+1}(t)}{\varphi_{x_0+1}(t)} - \frac{\psi_{x_0}(t)}{\varphi_{x_0}(t)} \right| = \left| \Delta \frac{\psi_{x_0}}{\varphi_{x_0}} \right| ;$$

e questa espressione ammette, per ipotesi, un limite superiore M per tutti i punti esterni ad (R_1); dunque in fine:

$$(19) \qquad \left| U(t) - \frac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)} \right| < M \frac{1}{\mu - 2} \cdot \left(\frac{1}{\mu - 1} \right)^{x-x_0-1} .$$

Si scorge di qui che, per ogni valor fissato di μ, si può scegliere x abbastanza grande perchè, in tutti i punti t, situati fuori del cerchio (R_μ), o sulla circonferenza, sia

$$\left| U(t) - \frac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)} \right| < \varepsilon$$

essendo ε piccola a piacere.

Rimane così dimostrata la convergenza uniforme della $\frac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)}$ verso la $U(t)$ lungo ogni circonferenza (R_μ), se $\mu > 2$.

Per un noto teorema, dovuto a Weierstrass, potremo dunque concludere che $U(t)$ *è una funzione analitica di t regolare fuori del cerchio* (R_2).

5. Tutte le condizioni richieste per le $\varphi_x(t)$, $\psi_x(t)$ sono certamente soddisfatte dai numeratori e dai denominatori della ridotta di ordine x nella frazione continua:

$$a_0(t) + \cfrac{b_1(t)}{a_1(t) + \cfrac{b_2(t)}{a_2(t) + \cdots}} . \tag{20}$$

Quando dunque il grado di una qualunque della $a_x(t)$ *non sia superato da quello della* $b_x(t)$ *corrispondente, ed esistano limiti superiori finiti per i valori assoluti delle somme dei coefficienti di potenze simili di* t *nei due polinomi* $a(t)$, $b(t)$; *e, di più, i valori assoluti dei coefficienti della massima potenza di* t *in* $a_x(t)$, *non abbiano limite inferiore nullo, si può asserire che la frazione continua* (20) *converge fuori di un cerchio di raggio determinato e rappresenta una funzione analitica della* t, *regolare fuori di quel cerchio.*

Si noti che l'esistenza di quei limiti superiori, ed inferiori finiti, è posta fuor d'ogni dubbio quando i coefficienti $a_{h,x}$, $b_{k,x}$ delle potenze di t nei due polinomi $a_x(t)$, $b_x(t)$, non abbiano che un numero finito di valori diversi in tutto il campo Γ; così in particolare: *Una frazione continua periodica algebrica* (20) *è sicuramente convergente fuori di un dato cerchio, e definisce una funzione analitica, alla sola condizione che il grado di ogni* $b_x(t)$ *sia inferiore di quello della* $a_x(t)$ *corrispondente.*

Così *le frazioni continue, più spesso considerate* [1]

$$a_{0,0}t + a_{1,0} + \cfrac{b_1}{a_{1,0}t + a_{1,1} + \cfrac{b_2}{a_{2,0}t + a_{2,1} + \cdots}} \tag{21}$$

nelle quali le b_x *sono supposte costanti rispetto a* t, *e le* a_x *sono lineari nella* t, *convergono sicuramente fuori di un dato cerchio, quando sono periodiche.*

Matematica. — *Sulla rappresentazione approssimata di funzioni algebriche per mezzo di funzioni razionali.* Nota di E. Bortolotti, presentata dal Socio Cerruti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] Possé, *Sur quelques applications des fractions continues algébriques*, St Petersbourg 1886; Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen* (t. I, cap. V.).

Fisica terrestre. — *La gravità sul Monte Bianco.* Nota di P. Pizzetti, presentata dal Socio Blaserna.

1. Nei *Comptes rendus* dell' Accademia delle scienze di Francia [1] sono dati i risultati delle misurazioni della gravità fatte, mediante l'apparecchio Sterneck, sulla sommità del Monte Bianco e in alcuni punti del versante francese di questa montagna. Intendo qui di raffrontare i valori osservati dal sig. Hansky con quelli teorici che si deducono dalla nota formola di Helmert. Il confronto, per sè interessante, mi ha dato gradita occasione di applicare molto comodamente un metodo grafico, pel calcolo delle anomalie della gravità, da me esposto nel 1893 negli *Atti della società ligustica di scienze naturali e geografiche* [2]. Ho limitati i miei calcoli alle due stazioni: vetta del Monte Bianco e Chamonix.

Occorrerebbe naturalmente poter calcolare la componente verticale della attrazione esercitata dalla massa montuosa sui punti di stazione. Ed è superfluo dire che un tal calcolo non può farsi, per ora, con precisione, per più ragioni, e prima di tutto perchè manca una carta abbastanza minuta del colosso alpino. In attesa tuttavia della carta 1: 20000 che sta eseguendosi dai fratelli Vallot, ho creduto di poter fare il calcolo, almeno all'ingrosso, valendomi della carta 1: 100000 del nostro Istituto geografico militare, e completando alla meglio le indicazioni, scarseggianti per la regione francese, coi dati che ho potuto dedurre dalla bella carta della Svizzera di Keller [3].

2. Sia G la gravità media, R il raggio medio terrestre, H l'altezza della stazione sul livello del mare, g la gravità osservata. Allora

$$g' = g + \frac{2G}{R} H \tag{1}$$

è la gravità ridotta al livello del mare, se si fa astrazione dall'effetto della massa continentale sopraelevata al Geoide nella regione che si studia. Per confrontare la gravità così ridotta col valore dato dalla formola teorica occorre ancora sottrarre alla g' la componente verticale della attrazione esercitata dalla detta massa. Se il terreno intorno al punto di stazione è pres-

[1] Hansky, *Sur la détermination de la pesanteur au sommet du Mont Blanc, à Chamonix et à Meudon.* C. R. Seduta del 5 dicembre 1898, tome CXVII, n. 23.

[2] Vol. IV, fasc. 3°.

[3] *Keller's zweite Reisekarte der Schweiz, 1: 440000* (Zurigo 1880 ?).

sapoco orizzontale e se la densità θ della roccia si ritiene costante, questa attrazione è, per approssimazione, espressa da

$$(2) \qquad A = \frac{3}{2}\frac{G}{R}\frac{\theta}{\theta_m}H$$

dove θ_m è la media densità terrestre. Se invece la superficie del terreno non può ritenersi con sufficiente approssimazione, orizzontale, allora bisogna sottrarre alle quantità A la attrazione esercitata, secondo la verticale, da una massa ideale di densità θ, la quale si estenda dalla superficie del terreno fino al piano orizzontale del punto P di stazione. Supposta divisa la projezione orizzontale della superficie in tanti settori, di vertice P e di ampiezza angolare β, si attribuisca una unica quota media h a tutti i punti della superficie che, in un dato settore, si trovano alla stessa distanza orizzontale r da P. Allora la attrazione locale sarà espressa, invece che dalla (2), da

$$(3) \qquad A' = \frac{3}{2}\frac{G}{R}\frac{\theta}{\theta_m}\left\{H - \sum\frac{\beta}{2\pi}\int_0^a\left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)dr\right\}.$$

La quota h (variabile con r) si intende contata dal piano orizzontale di P. La sommatoria $\sum$ si riferisce ai varii settori, e il limite a è la massima distanza da P, alla quale si reputa necessario spingere la esplorazione del terreno intorno a P per tener conto di tutti gli elementi *apprezzabili* dalla attrazione locale. Tenuto conto della grossolana approssimazione alla quale si mira in tal sorta di calcoli, è sufficiente in pratica dare ad a un valore di 30 o 40 kilometri al più.

Il metodo grafico da me suggerito e impiegato consiste:

1° nel rilevare il *profilo medio* di ogni settore, ossia determinare un certo numero di valori di h per corrispondenti valori di r;

2° *trasformare* questi profili coll'aiuto di un sistema di *curve* [1], a ciascuna delle quali corrisponde un certo valore del parametro r; il punto (h, r) del profilo *primitivo* ha, nel profilo *trasformato*, la ordinata h e si trova sulla curva di parametro r;

3° misurare, col planimetro, l'area α (che intendiamo espressa in cm^2) racchiusa dal profilo trasformato. Ciò fatto la (3) si trasforma in questa:

$$(4) \qquad A' = \frac{3}{2}\frac{G}{R}\frac{\theta}{\theta_m}\left(H - \frac{10 \cdot \beta}{2\pi}\sum\alpha\right),$$

supposto, per semplicità, che tutti i settori abbiamo uguale apertura. Che se l'apertura è diversa e se di più, per maggiore generalità, si suppone diversa, pei varii settori, anche la densità media θ, allora alla (4) è da sostituire la

$$(5) \qquad A' = \frac{3}{2}\frac{G}{R}\left\{\frac{H}{\theta_m}\sum\frac{\theta\beta}{2\pi} - \frac{10}{\theta_m}\sum\frac{\alpha\beta\theta}{2\pi}\right\}.$$

[1] Vedi la tav. IX annessa ai citati *Atti della Società ligustica*, vol. IV.

3. Riserbandomi di pubblicare altrove per esteso i profili e gli altri particolari del calcolo, mi limito a dare qui i risultati.

a) Per la stazione *Vetta* del Monte Bianco ho posto $\beta = 45°$, e agli otto settori ho dato come linee mediane quelle di azimut $22° \, ^1/_2$, $67° \, ^1/_2$, ecc. (azimut contati da Nord verso Ovest).

Disegnati alla meglio i profili della superficie del terreno *secondo queste linee mediane* ed eseguita la *trasformazione*, come ho detto, le aree dei profili trasformati sono risultate ordinatamente:

53,8 50,7 140,8 121,1 126,5 125,9 128,6 136,3 cm²

$$\sum \alpha = 883{,}7 \,, \qquad \frac{\beta}{2\pi} \sum \alpha = \frac{1}{8} \sum \alpha = 110{,}5 \,.$$

Attesa la estrema irregolarità della superficie studiata, ho ritenuto opportuno controllare all'ingrosso questo risultato così: Disegnati sulla carta, intorno al vertice come centro, i circoli di raggi corrispondenti alle distanze di 1^{km}, 2^{km}, 3^{km} ecc. e percorrendo successivamente le varie circonferenze, ho cercato di valutare la quota media lungo ognuna di esse. Ho ottenuto [1] (trascurando le diecine di metri) per

$r =$ 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 20, 40 km.
$h_m =$ 400, 800, 1200, 1400, 2000, 2300, 2800, 2800, 3800 metri

ascisse ed ordinate di un profilo medio complessivo, che ho *trasformato*, come sopra. L'area trasformata risultò di

105,5 cm²

che è assai poco differente dalla media 110,5 delle aree dei profili singoli.

Per la stazione *Vetta* abbiamo $H = 4807$ e la gravità osservata è $g = 9{,}79472$. La gravità ridotta al livello del mare colla formola (1) è

$$g' = 9{,}80954 \,.$$

La gravità calcolata colla formola di Helmert

$$\gamma = 9^m{,}7800 \, \{ 1 + 0{,}005310 \ \text{sen}^2 \varphi \}$$

sarebbe invece, per $\varphi = 45°50'$:

$$\gamma = 9{,}80672$$

e quindi
$$g' - \gamma = 0^m{,}00282.$$

Questa differenza, assai notevole, dimostra come non si possa qui ammettere ciò che in altri casi si è invece verificato, voglio dire una *com-*

[1] Queste quote medie sono state ottenute *senza consultare i singoli profili* già disegnati.

pleta o quasi completa compensazione fra l'attrazione positiva delle masse montuose visibili e quella negativa di supposte deficienze interiori. L'attrazione locale $0^m,00282$ è molto sensibile. Se valendoci delle formole (4), ricerchiamo *quale densità media si debba attribuire alla massa sovrincombente al geoide nella regione qui studiata* affinchè si abbia

$$A' = 0,00282\,,$$

osservando che $\log \frac{3}{2}\frac{G}{R} = 4,36342 - 10$ e che

$$H - \frac{10\beta}{2\pi}\sum\alpha = 3702^m$$

otteniamo

$$\frac{\theta}{\theta_m} = 0,330$$

e quindi $\theta = 1,8$ circa.

b) Stazione di *Chamonix*. Anche qui ho preso: $\beta = 45°$, prendendo però per le linee mediane dei settori quelle di azimut 45°, 90°, . . . 345°, 0°. Per le aree trasformate α, ho ottenuti i valori:

13,0 44,2 77,4 44,4 8,5 19,0 53,4 64,6 cm²,

$$\frac{\beta}{2\pi}\sum\alpha = \frac{1}{8}\sum\alpha = 40,6.$$

D'altra parte la gravità osservata è

$$g = 9,80394.$$

L'altezza è $H = 1050$, e quindi la gravità al livello del mare

$$g' = 9,80729.$$

Colla formola di Helmert invece per $\varphi = 45°,55$, si ha

$$\gamma = 9,80680,$$

quindi
$$g' - \gamma = 0,00049.$$

Calcolando, come nel caso precedente, la densità media θ che, in base alla formola (4), corrisponde al valore $A' = 0,00049$ si trova

$$H - \frac{10\beta}{2\pi} - \alpha = 644^m$$

e quindi $\frac{\theta}{\theta_m} = 0,329$; $\theta = 1,8$ circa, con una notevole concordanza col risultato ottenuto nella stazione di *Vetta*.

4. Pur tenendo conto della piccola densità di quella parte della massa montuosa che è occupata dai ghiacciaj e dalla neve, è tuttavia necessario ammettere che la densità media delle roccie accessibili sia notevolmente supe-

riore a 1,8. Siamo dunque condotti anche qui ad ammettere che vi siano a grandi profondità delle deficienze o attenuazioni di massa le quali compensino, benchè solo in piccola parte, l'attrazione della massa apparente.

Per poter rappresentare *materialmente*, come è utile di fare in queste ricerche, queste deficienze mediante uno strato indefinito di densità negativa di un certo spessore, occorre introdurre nella (5) quei valori di θ che le esplorazioni geologiche indicano come più probabili, e quindi vedere quale differenza ancora si manifesta fra la gravità corretta

$$g + 2\frac{GH}{R} - A'$$

e il valore teorico γ. Di questo paragone intendo occuparmi in una prossima Nota.

Fisica. — *Sulle modificazioni che la luce subisce attraversando alcuni vapori metallici in un campo magnetico.* Nota del prof. D. Macaluso e del dott. O. M. Corbino, presentata dal Socio Blaserna.

In una Nota precedente (¹) abbiamo esposto i risultati di alcune esperienze, dalle quali si dedusse che se ad un fascio di luce polarizzata rettilineamente si fanno attraversare, nella direzione delle linee di forza di un campo magnetico, dei vapori incandescenti di sodio o di litio che in questo si trovano, il piano di polarizzazione delle radiazioni, le cui lunghezze d' onda sono immediatamente vicine a quelle corrispondenti alle righe di assorbimento, subisce una rotazione tanto maggiore quanto più piccola è la distanza sullo spettro tra i posti occupati da quelle radiazioni ed i bordi di ciascuna delle due righe in parola.

Quantunque i fenomeni da noi studiati potessero facilmente così spiegarsi, ammettendo cioè che sian dovuti a semplici rotazioni del piano di polarizzazione iniziale, pure ci è nato il dubbio che la vibrazione rettilinea primitiva avesse potuto, oltre che mutare di direzione, subire anche una deformazione, piccola però certamente nel caso in cui il fenomeno erasi potuto studiare nei suoi particolari, quando cioè le linee primitive di assorbimento erano molto larghe. Ed infatti se tale deformazione (trasformazione della retta in ellisse) fosse stata notevole, se cioè il rapporto dell' asse minore al maggiore della supposta ellisse non fosse stato molto inferiore ad uno, i contrasti tra le bande oscure e luminose viste nell' esperienze surriferite avrebbero dovuto essere minori, cioè nel posto delle linee oscure avrebbe dovuto aversi una semplice diminuzione di luce.

(¹) Rend. d. R. Acc. d. Lincei, vol. VII, serie 5ª, pag. 293.

Per risolvere il nostro dubbio ci siamo serviti di un compensatore di Babinet.

Gli spigoli del doppio cuneo di quarzo che lo costituisce erano disposti normali alle linee verticali del reticolo ed a 45° dalle sezioni principali dei nicol che erano paralleli tra loro.

Si regolava dapprima l' oculare e la lente cilindrica in modo che si vedessero nettamente nel campo luminoso le righe di Fraunhofer e due grossi rigoni orizzontali oscuri. Ciascuno di questi corrispondeva, come si sa, a quella parte del fascio luminoso che aveva attraversato il doppio cuneo in un posto tale che le due metà (polarizzate in piani ortogonali) nelle quali quei raggi si dividevano, avessero acquistato, l' una rapporto all' altra, una differenza di fase eguale a π.

A corrente magnetizzante interrotta perciò vedevansi le righe di assorbimento in esame tagliate normalmente dai rigoni oscuri.

Eccitando il campo, come era da aspettarsi, comparivano lungo i rigoni oscuri, ed a questi normali, delle righe o bande, alternativamente luminose ed oscure, distribuite esattamente come quelle che si avevano nelle esperienze a nicol incrociati, descritte nella Nota precedente (vedi fig. *a* della Nota stessa). Lungo una linea poi interposta, a egual distanza dai due rigoni, e che chiameremo linea neutra, comparivano delle altre bande, distribuite come quelle che si avevano nell' esperienze a nicol paralleli (vedi fig. *c* della Nota precedente). Ciò sarebbe conforme alla supposta rotazione dei piani di polarizzazione, poichè il compensatore, pei posti corrispondenti ai rigoni equivale ad una lamina mezza onda, e per quelli della linea neutra ad una lamina monorifrangente.

Però i punti di mezzo di queste bande non erano esattamente sull' asse delle linee orizzontali considerate, nè su una retta a queste parallele, ma spostati verticalmente e in senso opposto dai due lati di ogni riga di assorbimento. Questi spostamenti si invertivano con l' inversione del campo magnetico; era anzi questo il metodo più sicuro per poterli apprezzare con sicurezza, essendo del resto molto piccoli, specialmente se le righe di assorbimento erano assai slargate. Col diminuire della larghezza di queste righe, al diminuire della quantità del vapore metallico nella fiamma, mentre, come si è visto in altre esperienze, le linee laterali si restringevano e, per così dire, si addossavano alla riga centrale, il loro spostamento, nel senso parallelo alle righe di assorbimento ed inverso dai due lati di queste, cresceva, in modo che quando non era più possibile col nostro oculare di vedere separate le linee laterali oscure dalla centrale, questa presentava l' aspetto di una linea serpeggiante, nella quale i punti di inflessione erano sulla linea neutra e sui rigoni.

Per una data larghezza della riga di assorbimento, il piccolo spostamento in parola andava rapidamente diminuendo col crescere della distanza delle linee chiare ed oscure dall' asse della corrispondente riga: anzi non era sicu-

ramente apprezzabile, tanto sui rigoni che sulla linea neutra, che per le più vicine linee fiancheggianti quelle di assorbimento.

La discussione di questi e di altri particolari del fenomeno porta alla conseguenza che la luce dai due lati di ciascuna linea di assorbimento è polarizzata ellitticamente, che le ellissi sono già molto appiattite a piccolissima distanza da ciascun bordo della riga centrale, che il rapporto dell' asse minore al maggiore tende rapidamente a zero e che il senso della rotazione della particella luminosa è opposto dai due lati delle righe e si inverte con l' inversione del campo. Un opportuno esame ci ha poi confermato quel che era da aspettarsi, dietro le esperienze del Zeemann e anche del Konig, che il senso di rotazione delle particelle luminose è lo stesso di quello della corrente magnetizzante per il bordo meno refrangibile ed inverso per l' altro bordo.

Queste apparenze del resto sono conformi ai risultati che si hanno, ripetendo con una fiamma che dia larghe righe di assorbimento, quelle esperienze che il Konig [1] fece con fiamme contenenti poco sodio, in modo da avere righe sottili.

Sostituendo infatti nella nostra disposizione sperimentale il compensatore Babinet con una doppia mica Bravais quarto d' onda, con la linea di separazione delle due miche normale alle striature del reticolo, di ogni riga di assorbimento, la quale è senza il campo diritta e continua, la metà superiore si sposta, eccitando il campo, in un senso, e la metà inferiore di quantità uguale in senso opposto; e questo spostamento tanto nell' una che nell' altra metà avviene anche per le sfumature che accompagnano l' intera riga. Ne segue che lungo una stessa retta, parallela alla riga di assorbimento, si hanno, come la doppia mica ci rivela, due raggi circolari inversi di diversa intensità. Questi raggi all' uscita dal vapore attivo, ricomponendosi debbono dar luogo, come si sa, ad un raggio ellittico, nel quale l' eccentricità dell' ellisse deve essere tanto più piccola quanto meno il rapporto delle intensità dei due circolari è diverso da uno; ed il movimento della particella vibrante si fa nello stesso senso che nel raggio di maggiore intensità.

Poichè dai due lati di ogni riga di assorbimento, sotto l' influenza del campo, i moti rotatori corrispondenti al circolare di maggiore intensità sono inversi, anche inversi dai due lati di ogni riga devono essere i moti ellittici risultanti sopra considerati.

Dalle surriferite esperienze e da quelle esposte nella Nota precedente si ricava:

1°. Che se un raggio di luce circolare attraversa del vapore di sodio o di litio incandescente che si trovi in un campo magnetico, e se il periodo delle sue vibrazioni *differisce pochissimo* da quello proprio del vapore stesso

[1] Wied. Ann. Bd. 62, S. 240, 1897.

senza l' azione del campo, esso si propagherà con velocità diversa a seconda del senso della rotazione della particella luminosa: e precisamente con velocità maggiore se questa rotazione va nel senso della corrente magnetizzante e con velocità minore se questa rotazione è inversa.

2°. La differenza tra questi due valori della velocità diminuisce rapidamente al crescere della differenza fra i suddetti periodi di vibrazione e non cambia di segno col cambiare di segno di questa differenza.

3°. Il raggio circolare suddetto nell' attraversare il vapore metallico è anche diversamente assorbito, a seconda del senso di rotazione della particella luminosa. Se il periodo di vibrazione del raggio incidente è minore di quello proprio del vapore assorbente, viene assorbito di preferenza il raggio la cui vibrazione circolare va nello stesso senso delle corrente magnetizzante. L' inverso avviene se il periodo del raggio incidente è invece maggiore.

Questo è conforme alle esperienze dello Zeeman e del Konig.

Fisica terrestre. — *Sopra un nuovo tipo di sismoscopio.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio Tacchini.

Ho avuto già l' occasione d' intrattenere più volte questa Accademia sopra diversi strumenti sismici da me ideati in quest' ultimi anni. Ma si è trattato sempre di strumenti più o meno costosi e complicati, che dovendo servire all' analisi più o meno completa dei terremoti non possono essere affidati che ad osservatorî geodinamici di 1° o tutto al più di 2° ordine, sotto la direzione cioè di persone esperte nel maneggio di simili apparecchi.

Oggi credo opportuno di far conoscere il mio *sismoscopio elettrico a doppio effetto*, che tanto per la sua semplicità, quanto per il suo modicissimo prezzo, potrebbe essere destinato con vantaggio alle stazioni sismiche di 3° ordine, quelle appunto più numerose e dove non sempre si può contare su persone abbastanza familiari con tal genere di strumenti.

La prima idea di questo sismoscopio mi venne sulla fine del 1894, quando dovendosi far costruire, tra gli altri strumenti sismici, anche qualche sismoscopio per l' osservatorio di Costantinopoli, passai in rivista la numerosa falange di quelli fino ad ora costruiti od ideati. Desiderando arrestarmi ad un tipo di strumento che riunisse alla più grande sensibilità anche la massima economia, esclusi tutti quelli che fornivano anche qualche criterio sulla direzione ed intensità del movimento sismico, sembrandomi sufficiente, per le ragioni esposte, che in una stazione di 3° ordine il sismoscopio si limitasse, come l' indica il suo nome, ad indicare soltanto l' avvenimento e l' ora d' una scossa. Tra i restanti sismoscopî mi parve abbastanza buono l' avvisatore a sfera del *Cecchi*, dal quale il Brassart doveva in appresso derivare

il suo avvisatore a *dischetto*, ma senza paragone meno soddisfacente del primo, per le ragioni già altre volte esposte.

Orbene, il mio sismoscopio consiste precisamente nell' accoppiamento di due avvisatori *Cecchi*, di cui l' uno, conservando il peso in basso, oscilla piuttosto rapidamente, mentre l'altro è dotato d' un periodo alquanto più lungo d' oscillazione, per essere costituito da un' asticina d' acciaio un po' più grossa e per essere il peso portato in questa fino alla massima altezza. Se ora si fa in modo che l' estremità superiore della prima asticina possa venire a ritrovarsi ad una piccolissima distanza da quella della seconda, e di più si colleghino le due asticine coi due poli d' una batteria elettrica, si capisce come in seguito al movimento di uno dei due avvisatori, e tanto meglio di tutti e due alla volta, si stabilisca un contatto elettrico, destinato a far agire l' orologio sismoscopico o qualsiasi altro apparecchio. Un sismoscopio costituito, come il mio, dalla riunione di due asticine, dotate d' un ritmo d' oscillazione abbastanza diverso, riunisce in sè molta probabilità di funzionare per svariate specie di movimento del suolo, avuto riguardo al periodo più o meno breve delle onde sismiche (1). Già il Bovieri (2) aveva voluto trarre profitto da questo principio, costruendo un sismoscopio mediante tre asticine oscillanti con diverso ritmo e disposte sulla stessa base secondo i vertici d' un triangolo equilatero. Ma quanto l' idea era buona, altrettanto difettosa e anche dispendiosa era la disposizione adottata, per poter fare agire elettricamente lo strumento. Infatti al di sopra delle tre asticine si disponeva in posizione orizzontale un telarino a triangolo equilatero, di fina lamina metallica, i cui tre vertici s' appoggiavano alle tre estremità superiori delle stesse asticine. Questo telarino doveva cadere quando, per la vibrazione anche di una sola delle tre asticine, fosse venuto a mancare uno dei tre punti di appoggio. Ognun capisce come la sovrapposizione di questo telarino, per quanto leggerissimo, bastasse in occasione di terremoti debolissimi per impedire alle asticine d' entrare in sensibile oscillazione e perciò a l' istrumento di funzionare.

Nella descrizione del 1° modello del mio sismoscopio io stesso avevo discussa l' opportunità dell' utilizzare parecchie asticine, vibranti più o meno rapidamente; ma ritengo anche oggi che vi sia convenienza ad arrestarsi a due soli ritmi d' oscillazione, considerato che il voler utilizzare ritmi inter-

(1) Lo stesso principio, qui utilizzato per registrare le scosse ondulatorie, può servire alla costruzione d'un sismoscopio doppiamente sensibile, destinato a rivelare la componente verticale del movimento. Basterebbe infatti tanto nel comune avvisatore *Brassart* per le scosse sussultorie, quanto nella parte sussultoria del microsismografo *Cecchi* ed in quella identica del microsismoscopio *Guzzanti* (Boll. della Soc. Sism. It., vol. I, 1895, pag. 149), rendere mobile anche lo scodellino di mercurio sospendendolo ad una molla a spirale, tale da farlo oscillare con un ritmo assai diverso dal periodo d'oscillazione inerente alla punta di platino, destinata a toccare il mercurio.

(2) Ing. Francesco Bovieri, *Sopra un nuovo sismoscopio* (sismoscopio a triangolo). Atti dell'Acc. Pontificia de' Nuovi Lincei, tom. XLVI, 1892-93, pag. 45.

medî non può essere forse nella pratica che d'un vantaggio ben limitato. Infatti, siccome i periodi estremi d'oscillazione, che si possono facilmente realizzare in un sismoscopio, non possono variare che entro limiti assai ristretti, si capisce come al passaggio d'onde sismiche dotate anche d'un ritmo intermedio, esse possano ancora fare entrare in sufficiente oscillazione o l'una o l'altra delle due asticine e forse tutte due alla volta. Di più si abbia presente il maggior costo del sismoscopio e la maggiore difficoltà del maneggio che esigerebbe l'impiego di numerose asticine vibranti (1).

Il 1° modello del mio sismoscopio fu costruito per l'osservatorio di Costantinopoli, dove fece ottima prova (2). Un 2° modello, alquanto migliorato, fu fatto costruire nel 1897, al mio ritorno da Costantinopoli, dal prof. P. Tacchini per essere distribuito ad alcune stazioni di 3° ordine della rete sismica italiana (3). In seguito all'esperienza fatta durante un triennio con i due precedenti modelli, nella 2ª metà del 1898 credetti d'apportare ancora altre notevoli migliorìe, pur restando inalterato il principio dello strumento; ed è così che è nato il 3° modello rappresentato nell'annessa figura, e del quale dò quì sotto una breve descrizione (4).

Sopra una base in ghisa di forma rotonda sono fissate verticalmente due asticine cilindriche d'acciaio: l'una sottile F gravata, piuttosto in basso, di una lente di piombo L, e che perciò oscilla rapidamente; l'altra F' di maggior diametro, destinata ad oscillare alquanto più lentamente, a causa d'un'altra consimile lente di piombo L' posta alla sua estremità superiore. A questa 2ª massa di piombo è fissata lateralmente una piastrina di platino d nella quale è praticato un piccolo forellino, destinato a ricevere nel suo centro, senza toccarla, la punta, pure di platino, dell'asticina a ritmo rapido. Siccome le due asticine sono isolate elettricamente dalla base e comunicano con

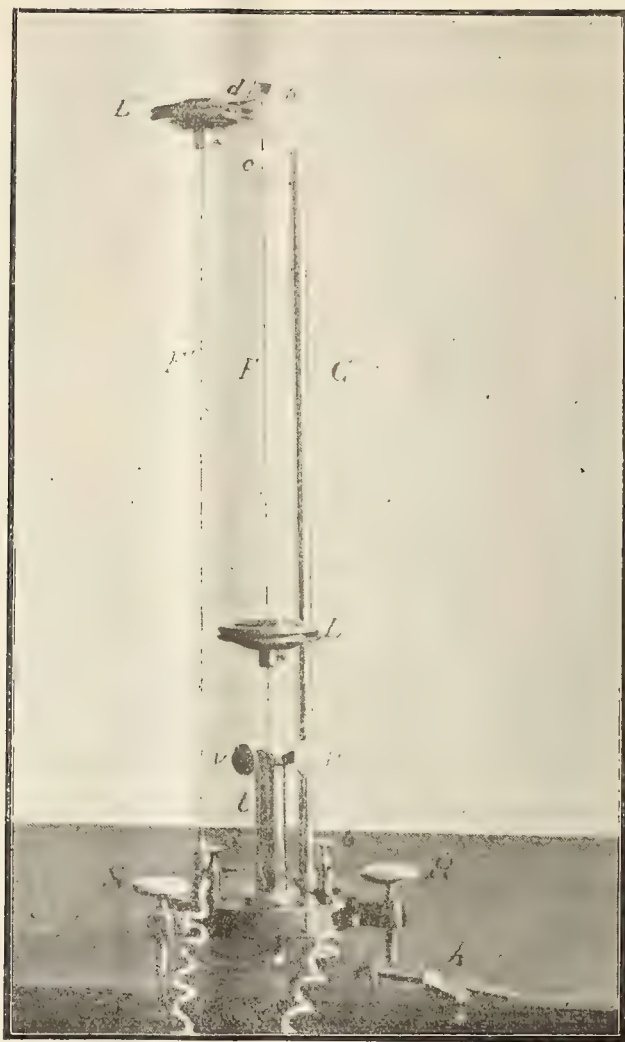
(1) Questo mio modo di vedere sembra non sia condiviso dal dott. Cancani, il quale ha fatto costruire recentemente il suo *sismoscopio ad effetto multiplo* (Boll. della Soc. Sism. It., vol. IV, 1898, pag. 68), nel quale si utilizzano i diversi ritmi d'oscillazione di ben 7 asticine.

(2) G. Agamennone, *Sismoscopio elettrico a doppio effetto.* (Boll. della Soc. Sism. It., vol. III, 1897, pag. 37).

(3) Id., *Alcune modificazioni al sismoscopio elettrico a doppio effetto e istruzioni per l'installazione ed il funzionamento del medesimo.* Ibidem, pag. 157.

È precisamente questo 2° modello che ha figurato nella mostra dell'Uff. Centr. di Met. e Geodinamica all'Esposizione nazionale di Torino del 1898.

(4) Questo 3° modello, malgrado le migliorìe introdotte, non viene a costare più d'una quarantina di lire italiane, comprese le spese d'imballaggio. Il costruttore ne è stato, sotto la mia direzione, il meccanico dell'Ufficio Centr. di Meteorologia e Geodinamica in Roma, sig. L. Fascianelli, il quale m'ha secondato mirabilmente affinchè lo strumento riuscisse anche elegante ed il più economico possibile. Diversi esemplari di questo sismoscopio sono stati già acquistati, oltre che dall'Uff. Centr. di Met. e Geod., nelle Indie inglesi ed olandesi, in Inghilterra, in Bulgarìa, ecc.

i due morsetti *a* e *b*, si capisce come facendo fare capo a quest' ultimi i due poli d' una batteria, la corrente elettrica non possa stabilirsi se non nel caso che in seguito all' oscillazione dell' una o dell' altra delle due asticine, e tanto meglio se di entrambe alla volta, vi sia contatto tra la punta di platino ed il forellino che la circonda. La base dell' istrumento è munita

1/4

di due viti di livello *R* ed *S* che permettono di rendere verticale l' asticina di maggior diametro, la quale, gravata com' è in alto dalla lente di piombo *L'*, potrebbe altrimenti piegarsi sensibilmente da una parte o dall' altra. Per rendere poi agevole l' operazione del centramento della punta di platino entro il forellino, l' asticina di minor diametro *F* è saldata in basso all' estremità superiore d' un grosso filo d'acciaio, che alla sua volta è fissato alla base dello strumento ed è circondato da un tubo *t* di ottone. Quest' ultimo ter-

mina in alto con un anello e due viti orizzontali v e v' ad angolo retto tra loro le quali sono destinate a spingere in un senso o nell' altro l' estremità superiore del grosso filo di acciaio, e per conseguenza a spostare la punta di platino secondo due direzioni tra loro ortogonali. Tenuto conto che la sovrapposta asticina è circa 5 volte più lunga del pezzo di acciaio e che perciò lo spostamento delle viti v e v' moltiplica in egual misura quello che si produce alla punta di platino, naturalmente il passo di dette viti è assai piccolo (meno di $^1/_2$ millimetro), affinchè il centramento possa ottenersi in modo graduale fino al punto voluto. Questa nuova disposizione permette di ottenere il centramento in un modo assai più rapido di quello usato nei due precedenti modelli di sismoscopio, specialmente perchè non si ha più bisogno di perturbare ogni volta la massa di piombo L' che porta il forellino. Nonostante questo grande vantaggio, si è creduto ancora di conservare la colonna C, allo scopo di poggiarvi la mano quando si voglia smorzare le oscillazioni dell' una o dell' altra massa.

Un' altra innovazione, benchè di minor conto, consiste nell' aver praticato nella piastrina d, fissata alla massa L', tre forellini di diverso diametro, invece d' uno solo; e ciò allo scopo di far variare a piacere la sensibilità dello strumento, a seconda delle condizioni più o meno favorevoli di tranquillità del locale in cui l' installazione dev' esser fatta. Se sotto questo punto di vista l' installazione è ottima, egli è chiaro potersi fare uso del più piccolo forellino, in modo che lo spazio, che intercede tra la punta di platino ed il bordo interno del foro, si riduca soltanto a qualche decimo di millimetro.

Per facilitare poi il centramento — anche se a causa della collocazione speciale, lo strumento non potesse essere guardato dall' alto in basso — al di sopra della piastrina, in cui sono praticati i forellini, vi è uno specchietto s inclinato a 45°, il quale permette di guardare in direzione orizzontale e di vedere così i forellini come se fossero praticati nella lastrina d tenuta verticalmente. E siccome poco al di sotto della punta di platino si trova fissato sull' asticina F un dischetto di carta bianca c, opportunamente inclinato per essere bene illuminato da una sorgente di luce, ne risulta che ogni forellino si vede entro lo specchio come un dischetto luminoso e la punta di platino figura entro uno di essi come un dischetto nero d' un diametro un po' più piccolo e che deve appunto essere reso concentrico al primo, manovrando con delicatezza le due viti di rettifica v e v'.

Come si potrà capire facilmente, il sismoscopio è d' una sensibilità tanto maggiore quanto minore è il forellino adoperato, poichè basta allora la più piccola oscillazione o della punta di platino, o del forellino, perchè il contatto elettrico abbia luogo. Per questa ragione non solo bisogna installare lo strumento in un edificio solido, e preferibilmente a pianterreno e meglio ancora in un sotterraneo, il più possibilmente lontano da vie frequentate o da altre cause disturbatrici, ma conviene inoltre proteggerlo con una campana

di vetro, o qualche altro acconcio riparo, dall' agitazione dell' aria, dalla polvere e dalla molestia eventuale d' animali. Lo strumento, com' è costruito, può funzionare bene anche in un locale umidissimo, poichè le parti più delicate sono verniciate o nichelate e, quel che più importa, il contatto elettrico si fa tra superficie di platino; ma senza dubbio il sismoscopio sarà ancor meglio preservato col tempo se, sotto la custodia che lo protegge, si ponga eziandio qualche sostanza essiccante.

Lo strumento deve essere fissato solidamente ad una mensola di marmo o di ferro, incastrata ad un muro maestro mediante una chiavarda h, ed i fili elettrici che fanno capo ai morsetti a e b potranno attraversare entro un secondo foro la mensola stessa, oppure passare nascosti sotto una banda circolare di grossa stoffa, su cui dovrà poggiare la custodia dello strumento.

I fili elettrici fanno poi capo all' orologio sismoscopico, il quale può essere collocato a quella distanza che si vuole dallo strumento e possibilmente in un locale asciutto, affinchè l' orologio non abbia a risentire i danni dell' umidità. È anche buono che l' orologio sia posto in un sito frequentato, affinchè dal ritrovarsi arrestato o in marcia, secondo che prima era in azione oppure fermo sulle XII, si possa senza troppo ritardo sapere che il sismoscopio ha funzionato, anche nel caso che si voglia fare a meno d' una suoneria elettrica, comandata dallo stesso orologio sismoscopico, e ad azione continua od intermittente.

Fisica terrestre. — *Nuovo sismometrografo a registrazione veloce-continua.* Nota del dott. Adolfo Cancani, presentata dal Socio Tacchini.

I varî sismometrografi a due velocità costruiti già da molti anni nel Giappone, e da poco tempo in Italia, rappresentano evidentemente un ripiego, una via di accomodamento, nella soluzione del problema della registrazione completa di un diagramma sismico in tutti i suoi particolari.

Difatti, fino ad ora si è ragionato nel seguente modo: per ottenere un diagramma perfetto in tutti i suoi particolari occorrerebbe dare alla zona su cui avviene la registrazione una velocità di svolgimento permanentemente assai grande, di parecchi metri all' ora; e siccome il maneggio e il consumo di tanta carta implicherebbero, nella pratica, difficoltà grande, spesa e fastidio non sopportabili, è necessario ricorrere all' espediente di dare alla zona di registrazione una velocità abitualmente moderata, e scegliere tra i tanti congegni conosciutissimi e più o meno antichi, usati dagli orologiai e dagl' ingegneri, uno qualunque che meglio si presti a far cambiare bruscamente la velocità ordinaria della zona in altra di valore venti o trenta volte maggiore.

È evidente come questa soluzione fin qui adottata, in base al ragionamento sopra esposto, risolva il problema soltanto a metà, e lo risolva nella parte meno importante. Ed infatti quando per effetto del movimento stesso del terreno, in una fase più o meno avanzata di questo movimento, scatta la grande velocità, non solo è già trascorsa la parte più interessante del diagramma, cioè la fase iniziale dei tremiti preliminari, ma la direzione stessa delle componenti registrate sulla zona, è, come si sa dai sismologi, ben cambiata da quella primitiva, corrispondente fedelmente alla provenienza della scossa.

Ho adunque pensato ad una soluzione completa del problema sopra esposto, e sono riuscito a trovarla con l' apparecchio costruito nell' Osservatorio Geodinamico di Rocca di Papa, della cui disposizione dò qui brevemente un cenno, riservandomi a darne quanto prima una descrizione particolareggiata ed esporre i risultati ottenuti nel *Bollettino della Società sismologica italiana.*

Ho già dimostrato (¹) come il metodo di registrazione con fili di vetro su carta affumicata sia, sotto ogni riguardo, superiore a tutti gli altri; questo per ciò è stato da me preferito.

La registrazione si effettua per mezzo di due stili tubulari di vetro schiacciati conici che corrispondono alle due componenti N-S ed E-W e che terminano in due fili capillari pure di vetro, che colla loro estremità toccano una zona di carta laccata e affumicata di 14 cm. di larghezza. L' amplificazione degli stili è di 1 a 50. Le loro dimensioni sono: 60 cm. di lunghezza, un cm. di larghezza ad una estremità, un mm. all' altra. La zona è chiusa in sè stessa, è lunga m. 1,80, si ricambia ogni 12 ore, e corre con la velocità di 6 m. all' ora.

Il cilindro destinato a porre in moto la zona è di 16 cm. di diametro, è comandato da un comune roteggio a peso, con regolatore a ventole, ed è sostenuto da un asse su cui è tracciata una vite del passo di 0,33 mm. In tal modo viene impresso alla zona uno spostamento laterale di 1 mm. ad ogni suo giro. Nelle 12 ore viene così tracciata per ciascuna componente un' elica di 40 giri, di 72 m. di lunghezza e di 1 mm. di passo. Quest' elica occupa quindi solamente 4 cm. di larghezza della zona.

I tracciati delle due componenti occupano adunque alla fine delle 12 ore, 8 cm. di larghezza, rimanendo 3 striscie, due marginali e una centrale di 2 cm. di larghezza, libere per le escursioni degli stili. Questi sono disposti in modo che, uscendo dalla zona possono liberamente rientrarvi, possono sovrapporsi senza urtarsi e rimanere sempre liberi nelle loro oscillazioni, anche quando vengono sollevati automaticamente all' estremità per il tracciamento dell' ora.

(¹) A. Cancani, *Sopra i varî sistemi di registrazione nella sismologia.* Bollettino della Società sismologica italiana, vol. IV, pag. 73.

Quando l'asse e il cilindro portatore della zona, al termine delle 12 ore hanno compiuto la loro corsa, si riconducono facilmente d'un tratto nella posizione iniziale. A tale scopo i cuscinetti metallici su cui appoggia l'asse del cilindro si aprono a cerniera, si solleva l'asse, si trasporta lateralmente nella posizione iniziale e si richiudono.

L'affumicatura di due zone, l'una per il giorno, l'altra per la notte, non richiede più di 5 minuti di tempo, la spesa giornaliera della carta laccata ed il fissaggio con alcool e gomma lacca non supererebbe i 30 centesimi se ogni giorno si volessero fissare le zone; ma siccome ciò non occorre di fare che una o due volte per settimana, la spesa giornaliera non supera i 10 centesimi.

Il metodo di registrare le ore, da me prescelto, consiste nel sollevare per pochi secondi ad ogni quarto d'ora i fili di vetro registratori. Le ore sono distinte da una interruzione alquanto più lunga di quella corrispondente ai quarti.

L'apparecchio registratore sopra descritto, è stato da me applicato ad un pendolo di 7 m. di lunghezza e di 100 kg. di massa. I movimenti di nutazione vengono in questa impediti con una sospensione a 3 fili partenti dal fulcro.

Con tali disposizioni vengono soddisfatte tutte le esigenze pratiche e scientifiche per la soluzione del problema proposto.

Mi riservo di far conoscere all'Accademia i risultati forniti dall'apparecchio, quando avrò da esso raccolto un conveniente numero di diagrammi.

Fisica terrestre. — *Periodicità dei terremoti adriatico-marchigiani e loro velocità di propagazione a piccole distanze.* Nota del dott. ADOLFO CANCANI, presentata dal Socio TACCHINI.

Geologia. — *Il Raibliano del monte Iudica nella provincia di Catania.* Nota di BIONDO NELLI, presentata dal Corrispondente DE STEFANI.

Geologia. — *Le roccie trachitiche degli Astroni nei Campi Flegrei.* Nota di LUIGI PAMPALONI, presentata dal Corrispondente DE STEFANI.

Chimica. — *Stereoisomeria delle desmotroposantonine e degli acidi santonosi.* Nota preliminare di A. ANDREOCCI, presentata dal Socio S. CANNIZZARO.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Segretario Tommasi-Crudeli legge, a nome dei Soci Taramelli, rel., e Capellini, una relazione colla quale si propone la inserzione nei volumi delle Memorie, d'un lavoro del dott. G. De Angelis d'Ossat avente per titolo: *Seconda contribuzione allo studio della fauna fossile paleozoica delle Alpi Carniche. — Fossili del Siluriano superiore e del Devoniano.*

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, poste ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Beltrami dà il doloroso annuncio della perdita fatta dalla Classe nella persona del Socio nazionale Teodoro Caruel, mancato ai vivi il 4 dicembre 1898; apparteneva il defunto Socio all'Accademia, sino dal 1° gennaio 1880.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Tommasi-Crudeli presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci Cossa e Taramelli.

Il Presidente Beltrami presenta una pubblicazione del Corrispondente E. Cesàro e accompagna la presentazione colle seguenti parole:

« I nuovi *Elementi di Calcolo infinitesimale* del prof. Ernesto Cesàro posseggono in grado eminente i pregi d'ogni altra pubblicazione di questo valoroso Collega, fra cui una grande limpidezza di concetto e d'espressione ed una straordinaria abbondanza di applicazioni e di esempi svariatissimi, attinti con isquisito accorgimento alle fonti più elette e svolti con ammirabile eleganza. La mole del libro non è tale naturalmente da poterne fare un trattato completo sulla materia, ed a misura che ci si addentra nei capitoli più elevati del calcolo integrale e della dottrina delle equazioni differenziali l'esposizione, senza nulla perdere della sua nitidezza, si va necessariamente facendo più mingherlina e più rudimentale: ma per queste parti possono ampiamente supplire i maggiori trattati già noti, mentre meno opportunamente questi servirebbero ad introdurre i discenti nelle dottrine fondamentali, le quali trovano invece nel libro del Cesàro uno svolgimento più che sufficiente per chi non debba ricorrere, o non si proponga di ricorrere che più tardi, ai classici *Fondamenti* del Dini ».

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Tommasi-Crudeli dà comunicazione degli elenchi dei lavori presentati per prender parte ai concorsi scaduti col 31 dicembre 1898.

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio di S. M. il Re per la *Minerologia* e *Geologia*.

(Premio L. 10,000 — Scadenza 31 dicembre 1898)

1. Alberti Giuseppe. *La geologia postoligocenica del Veronese* (ms.).

2. Amighetti Alessio. *Una gemma subalpina. Escursioni autunnali e conversazioni sulla geologia applicata al lago di Iseo* (st.).

3. D'Achiardi Giovanni. *Contributo di mineralogia italiana:* a) *Le Tormaline del granito Elbano*, p. I e II (st.). — b) *Indice di rifrazione delle Tormaline elbane* (st.). — c) *Il granato dell' Affaccata nell' isola d' Elba* (st.). — d) *Auricalcite di Campiglia Marittima e Valdaspra* (st.). — e) *Le andesiti augitico-oliviniche di Torralba* (*Sardegna*) (st.). — f) *Note di mineralogia toscana* (st.). — g) *Di alcune forme cristalline della Calcite di Montecatini in Val di Cecina* (st.). — h) *Osservazioni sulle Tormaline dell' isola del Giglio* (st.) — i) *Anomalie ottiche dell' Analcima di Montecatini in Val di Cecina* (st.). — k) *Sul contegno ottico della Fluorina di Gerfalco e del Giglio* (st.). — l) *Due esempi di metamorfismo di contatto* (*Urali-Elba*) (st.). — m) *Note di mineralogia italiana*, I, II (st.). — n) *I quarzi delle gessaie toscane* (st.).

4. De Gregorio Antonio. 1) *Fauna eocenica di Roncà* (st.). — 2) *Catalogo alfabetico sinonimico e bibliografico di tutti i pettini lisci e sublisci viventi e terziari del mondo* (st.).

5. De Lorenzo Giuseppe. 1) *Osservazioni geologiche nei dintorni di Lagonegro in Basilicata* (st.). 2) *Avanzi morenici di un antico ghiacciaio del monte Sirino* (st.). — 3) *Sul trias dei dintorni di Lagonegro in Basilicata* (st.). — 4) *Per la geologia della penisola di Sorrento* (in collabor. con Bassani) (st.). — 5) *Fossili nelle argille sabbiose postplioceniche della Basilicata* (st.). — 6) *La fauna bentho-nektonica della pietra leccese* (st.). — 7) *Il postpliocene morenico del gruppo del Sirino in Basilicata* (st.) — 8) *Sulla geologia dei dintorni di Lagonegro* (st.). — 9) *Le montagne mesozoiche di Lagonegro* (st.). — 10) *Osservazioni geologiche sul tronco ferroviario Casalbuono-Lagonegro* (st.). — 11) *Osservazioni geologiche nell' Appennino della Basilicata meridionale* (st.). — 12) *Lava pahoehoe effluita il 24 maggio 1895 dal cono terminale del Vesuvio* (st.). — 13) *Efflusso*

di lava dal gran cono del Vesuvio cominciato il 3 luglio 1895 (st.). — 14) *Sulla probabile esistenza d'un antico circo glaciale nel gruppo del Volturino* (st.). — 15) *Studî di geologia nell' Appennino meridionale* (st.). — 16) *Per la geologia della Calabria settentrionale* (con Böse) (st.). — 17) *Fossili del trias medio di Lagonegro* (st.). — 18) *Cenni geologico-agrari sulla Basilicata* (st.). — 19) *Guida geologica dei dintorni di Lagonegro in Basilicata* (st.). — 20) *I grandi laghi pleistocenici delle falde del Vulture* (st.).

6. Lotti Bernardino. *Geologia della Toscana* (ms.).

7. Spezia Giorgio. 1) *La pressione nell' azione dell' acqua sull' apofillite e sul vetro* (st.). — 2) *La pressione nell' azione dell' acqua sul quarzo* (st.). — 3) *Sul metamorfismo delle roccie* (st.). — 4) *Contribuzione di geologia chimica. Esperienze sul quarzo* (st.). — 5) *Id. Esperienze sul quarzo e sull' opale* (st.).

8. Viola Carlo. *Miscellanea cristallografica* (ms.).

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio straordinario di S. M. il Re per la *Matematica*.

(Tema: *Perfezionare in qualche punto importante lo studio del moto di un corpo solido.* — Premio L. 5000. — Scadenza 31 Dicembre 1898).

1. Filomuso Onorio. *Nuovo studio sul moto di un corpo solido* (ms.).

2. Gallo Adolfo. 1) *Teoria circa il moto di un corpo solo solido (di forma costante)* (ms.). — 2) *Nuova teoria del moto locale* (st.).

Elenco dei lavori presentati per concorrere ai premi del Ministero della P. I. per le *Scienze matematiche*.

(Due premi del valore complessivo di L. 3400 — Scadenza 31 dicembre 1898).

1. Amodeo Federico. 1) *Curve aggiunte e serie specializzate* (st.). — 2) *Curve k-gonali di 1ª e di 2ª specie* (st.). — 3) *Curve k-gonali di* s^{esima} *specie* (st.). — 4) *Sistemi lineari di curve algebriche di genere massimo ad intersezioni variabili collineari* (st.). — 5) *Spazio normale e genere massimo delle curve di ordine m, k-gonali, di specie s* (st.). — 6) *Sulla introduzione alla geometria proietiva* (st.).

2. Bernardi Giuseppe. *I due teoremi sull' estrazione abbreviata della radice quadrata e della radice cubica contenuti nell' introduzione delle Tavole dei quadrati e dei cubi dei numeri interi da 1 a 1000, esposti con dimostrazioni interamente rifatte e notevolmente migliorate* (ms.).

3. Bortolotti Ettore. 1) *Un contributo alla teoria delle forme lineari alle differenze* (st.). — 2) *Sui determinanti di funzioni nel calcolo alle differenze finite* (st.). — 3) *La forma aggiunta di una data forma lineare alle differenze* (st.). — 4) *Le forme lineari alle differenze equivalenti alle loro aggiunte.* Nota 1ª (st.). — 5) *Idem.* Nota 2ª (st.). — 6) *Sul teorema di moltiplicazione delle operazioni funzionali distributive a determinazione unica* (st.). — 7) *Sulla generalizzazione della proprietà del determinante Wronskiano* (st.). — 8) *Le operazioni equivalenti alle loro aggiunte* (st.) — 9) *Introduzione e sviluppo del concetto di numero nella analisi algebrica* (st.). — 10) *Sulla convergenza degli algoritmi periodici e sulla risoluzione approssimata delle equazioni algebriche* (ms.). — 11) *Sulla convergenza delle frazioni continue algebriche* (ms.). — 12) *Sulla rappresentazione approssimata di funzioni algebriche per mezzo di funzioni razionali* (ms.). — 13) *Sulla variazione annua della temperatura nel clima di Roma.* Nota 1ª (st.). — 14) *Idem.* Nota 2ª (st.). — 15) *Sulla relazione fra il carattere termico di una stagione e quello delle stagioni seguenti* (st.).

4. Delitala Giuseppe. 1) *Un problema sulle triangolazioni e relativa compensazione* (st.). — 2) *Deviazioni e loro applicazioni* (st.). — 3) *Azimut e coordinate piane* (st.). — 4) *Il problema di Snellius ampliato in generale* (ms.). — 5) *Della compensazione nel problema di Snellius ampliato* (ms.). — 6) *Del segmento d'errore proporzionale nelle condizioni di chiusura delle poligonali.* (ms.). — *Influenza degli errori angolari nei problemi di Pothenot e di Snellius ampliato* (ms.). — 8) *Contributo allo studio del problema di Pothenot* (st.). — 9) *Addizione allo studio del problema di Pothenot* (ms.). — 10) *Formule definitive di risoluzione del problema di Pothenot* (ms.). — 11) *Il correlativo del teorema di Stewart* (ms.). — 12) *La risoluzione del tetragono piano* (ms.). — 13) *Delle trasformazioni lineari nel piano* (ms.).

5. Palatini Francesco. 1) *Sulle soluzioni, che soddisfano al problema geometrico, delle equazioni di condizione delle trasformazioni cremoniane delle figure piane* (st.). — 2) *Sistemi omaloidici e varietà di ordine* n *e dimensione* i + 1 *immerse in uno spazio lineare di* n + i *dimensioni* (ms.). — 3) *Linee contenute nelle rigate di ordine* n *immerse nello spazio lineare di* n + 1 *dimensioni* (ms.). — 4) *Osservazioni sulle corrispondenze univoche fra i gruppi di* h *punti del piano ed i punti dello spazio lineare di* 2h *dimensioni* (st.). — 5) *Alcune proprietà del sistema di superficie di ordine* r *passanti per gli spigoli di un* (r + 1) — edro *completo, e alcuni teoremi sulle superficie algebriche in relazione con la teoria delle polari* (ms.). — 6) *Osservazioni sulla Nota « Pro fusione » del prof. De Amicis* (st.). — 7) *Una lezione sulla teoria della similitudine* (st.). — 8) *Sopra una serie di segni positivi e negativi* (ms.). — 9) *Una definizione*

di poligono convesso (st.). — 10) *Sulla polisezione dell'angolo* (ms.). In collaborazione con Ferruccio Mariantoni.

6. PIRONDINI GEMINIANO. 1) *Alcune proprietà della sviluppante di cerchio* (st.). — 2) *Una questione geometrica* (st.). — 3) *Sur les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable* (st.). — 4) *Quelques propriétés des surfaces moulures* (st.). — 5) *Projection orthogonale sur une surface de révolution* (st.). — 6) *Sur le cylindre orthogonal à quelques surfaces* (st.). — 7) *Projezione stereografica e sua applicazione allo studio di alcune linee sferiche* (ms.). — 8) *Une nouvelle méthode élémentaire pour étudier les lignes planes, et son application à la spirale logarithmique* (ms.). — 9) *Sur quelques lignes liées à l'hélice cylindrique* (ms.). — 10) *Una corrispondenza particolare fra i punti di due linee piane* (ms.). — 11) *Alcune proprietà delle normali di un elicoide e di una superficie di rivoluzione* (ms.). — 12) *Alcune proprietà delle coniche* (ms.).

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio Carpi per il biennio 1897-98 — *Fisica-matematica.*

(Premio L. 900. — Scadenza 31 Dicembre 1898).

CANOVETTO C. 1) *Sulla direzione degli areostati. Impiego del metallo e di un nuovo motore. Teoria termodinamica di detto motore.* — 2) *Sulla resistenza dell' aria e sulla forma di solido di minor resistenza.*

CORRISPONDENZA

Il Segretario TOMMASI-CRUDELI dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la R. Accademia di scienze e lettere di Copenaghen; l'Accademia di scienze naturali di Filadelfia; la Società geologica di Sydney; la Società di scienze naturali di Emden; il R. Osservatorio di Edinburgo.

Annunciano l' invio delle proprie pubblicazioni:

L'Accademia delle scienze di Cracovia; la Società zoologica di Londra; le Università di Rostock e di Erlangen; l' Istituto Teyler di Harlem.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta dell' 8 gennaio 1899.

Amodeo F. — Spazio normale e genere massimo delle curve di ordine m, k-gonali, di specie s. Napoli, 1898. 8°.

Angelitti F. — Le stelle che cadono e le stelle che salgono. Firenze, 1898. 4°.

Baggi V. — Trattato elementare di geometria pratica. Disp. 60. Torino, 1898. 8°.

Barth J. — Norrönaskaller. Crania antiqua in parte orientali Norvegiae meridionalis inventa. Ud. af G. A. Guldberg. Christiania, 1896. 8°.

Bazin H. — Expériences nouvelles sur l'écoulement en deversoir exécutées à Dijon de 1886 à 1895. Paris, 1898. 8°.

Cesáro E. — Elementi di calcolo infinitesimale con numerose applicazioni geometriche. Napoli, 1899. 8°.

Choffat P. — Recueil d'études paléontologiques sur la faune crétacique du Portugal. Vol. I. Espèces nouvelles ou peu connues. 2e sér. Lisbonne, 1898. 4°.

Cossa A. — Il Conte Amedeo Avogadro di Quaregna. Milano, 1898. 8°.

De Lorenzo G. — Ancòra del Vesuvio ai tempi di Strabone. Roma, 1898. 8°.

Festskrift til Hs. Maj. Kong. Oscar II ved Regjerings-Jubilaeet den 18de september 1897 fra det k. norske Frederiks Universitet. Bd. I-II. Christiania, 1897. 8°.

Fregni G. — Di altre celebri iscrizioni etrusche incise in simboli ed in figure etrusche. Modena, 1898. 8°.

Ganfini C. — Un caso di gravidanza gemellare mostruosa. Genova, 1898. 8°.

Grön K. — Studier over gummös (« tertiaer ») Syfilis. Kristiania, 1897. 8°.

Gruss G. — Základové theoretické Astronomie. I. v Praze, 1897. 8°.

Lachi P. — Contributo alla conoscenza delle anomalie di sviluppo dell'embrione umano. — Inclusione della vescicola ombelicale nel sacco amniotico. Genova, 1898. 8°.

Lussana S. — A proposito di un metodo sensibile e comodo per la misura delle quantità di calore. Firenze, 1898. 8°.

Id. — Influenza della temperatura sul coefficiente di trasporto degli ioni. Venezia, 1898. 8°.

Manzari A. — Il termine forza in rapporto all'energia ginetica ed alla statica. Napoli, 1899. 8°.

Norman J. M. — Norges arktiske Flora. I. II. Kristiania, 1894-95. 8°.

Raddi A. — Lo stato attuale della spiaggia ligure di Chiavari ed i mezzi per la sua difesa. Chiavari, 1898. 8°.

Salazar A. E. — Kálkulos sobre las Kañerías de Agua. Santiago, 1898. 8°.

Sars G. O. — Fauna Norvegiae Bd. I. Phyllocarida og Phillopoda. Christiania, 1896. 4°.

Sauvage H. E. — Vertébrés fossiles du Portugal. Lisbonne, 1897-98. 4°.

Schiött. P. O. — Samlede Philologiske Afhandlinger. Christiania, 1896. 8°.

Steenstrup J. J. S. — Spolia atlantica. Kolossale Blaekprutter fra det nordlige Atlanterhav. Kiöbenhaven, 1898. 4°.

Taramelli T. — Considerazioni a proposito della teoria dello Schardt sulle regioni esotiche delle Prealpi. Milano, 1898. 8°.

Id. — Del deposito lignitico di Leffe in provincia di Bergamo. Roma, 1898. 8°.

Uchermann V. — De Dövstumme i Norge. Bd. I-II (con atlante). Kristiania, 1892-97. 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 22 gennaio 1899.

A. Messedaglia Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Dimostrazione semplice della sviluppabilità in serie di Fourier di una funzione finita e ad un solo valore.* Nota del Socio straniero V. Voigt.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla rappresentazione approssimata di funzioni algebriche per mezzo di funzioni razionali.* Nota di E. Bortolotti, presentata dal Socio Cerruti.

Il metodo che ha dato Bernoulli, per il calcolo approssimato della radice reale di modulo massimo di una equazione numerica, è di facilissima applicazione, ed avrebbe grande utilità pratica quando si avesse modo di verificare, a priori, l'esistenza di una radice di modulo massimo e si conoscessero i limiti dell'errore.

Dimostrerò ora che: vi sono equazioni algebriche per le quali, fuori di un cerchio di raggio determinato, esiste sempre una radice di modulo massimo, e che questa può, col metodo di Bernoulli, essere rappresentata da frazioni razionali, sempre più approssimate alla radice stessa; nel senso che gli sviluppi in serie di potenze di $\frac{1}{t}$, di questa e di quelle, hanno un numero, sempre crescente, di termini comuni.

Proverò ancora che: la successione di quelle frazioni razionali tende alla radice in modo uniforme lungo circonferenze concentriche; e troverò, nel senso superiormente indicato, i limiti degli errori.

Poichè la presente comunicazione fa seguito ad una Nota « *Sulla convergenza delle frazioni continue algebriche* », presentata insieme con questa all'Accademia, non parlerò quì che di equazioni del 2° grado; ma i risultamenti saranno immediatamente estendibili anche ad equazioni di grado superiore, ciò che del resto ho dimostrato in una Nota preventiva, che è in corso di stampa coi tipi di G. Civelli in Bologna.

Per classi, abbastanza estese, di equazioni alle quali non sarebbe applicabile il metodo di Bernoulli, troverò un altro metodo, altrettanto facile e rapido, di risoluzione approssimata.

Farò poi risaltare le relazioni fra questo metodo e quello, esposto dal Lagrange, che dà lo sviluppo di una irrazionale numerica del 2° grado, in frazione continua periodica.

Darò ancora una dimostrazione, molto semplice, del teorema di Lagrange, ed in fine, estenderò al calcolo della radice quadra approssimata di un polinomio razionale, alcuni metodi dati fino ad ora solo per le radici quadrate dei numeri.

1. Sia la forma alle differenze:

$$\text{(1)} \qquad A(y) = y_{x+2} + \sum_{h=0}^{r} a_h t^{r-h} \cdot y_{x+1} + \sum_{k=1}^{r} b_k t^{r-k} \cdot y_x$$

e supponiamo che i coefficienti a_h, b_k, sieno tutti costanti rispetto ad x.

In questo caso, se $\psi_x(t)$ è integrale di $A(y)$, lo è anche $\psi_{x+1}(t)$; ed allora, se in un punto x_0 è: $|\psi_{x_0}| < |\psi_{x_0+1}|$, per quanto è stato dimostrato al n. 4 della Nota precedente, *il limite, per x che tende all'infinito, del rapporto* $\dfrac{\psi_{x+1}(t)}{\psi_x(t)}$ *sarà una funzione analitica della t, regolare fuori di un cerchio di raggio determinato.* Posso ora aggiungere che, *fuori di quel cerchio, rappresenta la radice di modulo massimo della equazione algebrica*:

$$\text{(2)} \qquad X^2 + a(t)\,X + b(t) = 0$$

$$a(t) = \sum_{h=0}^{r} a_h t^{r-h}\ , \quad b(t) = \sum_{k=1}^{r} b_k t^{r-k}.$$

Ed invero, se α, β sono le radici, in ordine di modulo non crescente, si ha identicamente [1]:

$$\text{(3)} \qquad \psi_x = k_1 \alpha^x + k_2 \beta^x$$

[1] Cfr. Lagrange, Opere, t. I, pag. 24: *Sur l'intégration* . . .

con k_1 e k_2 costanti rispetto ad x. Di qui:

$$(4) \qquad \frac{\psi_{x+1}}{\psi_x} = \frac{k_1\alpha^{x+1} + k_2\beta^{x+1}}{k_1\alpha^x + k_2\beta^x} = \alpha \frac{k_1 + k_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{x+1}}{k_1 + k_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x}.$$

Ma, dalla condizione:

$$(5) \qquad |a| > \mu |b|$$

che, per qualunque μ, sappiamo (Nota preced. n. 3) esser soddisfatta fuori di un cerchio determinato (R_μ), si ha:

$$|\alpha| + |\beta| > \mu |\alpha| . |\beta| ;$$

ed in conseguenza

$$(6) \qquad \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \frac{1}{\mu - 1}.$$

Basta dunque che sia $\mu = 2 + \eta$ perchè si possa dedurre che: *in tutti i punti fuori del cerchio* (R_μ) *esiste una radice di modulo massimo*; e, in conseguenza delle (6) e (4), sarà:

$$(7) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\psi_{x+1}(t)}{\psi_x(t)} = \alpha(t) .$$

Convengono in questo risultamento il citato teorema di Bernoulli ed un noto teorema di Poincaré (¹).

2. Se alla ψ_x si attribuiscono i valori iniziali:

$$-\psi_0 = 1 \ , \quad -\psi_1 = a(t) \ , \quad -\psi_2 = a^2(t) + b \ . \ . \ .$$

cioè: se si prende per ψ_x il numeratore della ridotta di ordine x nella frazione continua:

$$(8) \qquad -a(t) - \cfrac{b(t)}{a(t) - \cfrac{b(t)}{a(t) - \cdots}} ;$$

ricordando quanto si è visto al n. 4 della Nota precedente, avremo:

$$(9) \qquad \left|\alpha - \frac{\psi_{x+1}(t)}{\psi_x(t)}\right| < \left|\frac{b(t)}{a(t)}\right| \sum_{n=x}^{\infty} \left\{\frac{|b(t)|}{|a(t)| - |b(t)|}\right\}^n$$

$$< \left|\frac{b(t)}{a(t)}\right| \frac{|b(t)|^x}{(|a(t)| - |b(t)|)^{x-1}} \frac{1}{|a(t)| - 2|b(t)|}.$$

(¹) American Journal, t. VII.

Se poniamo che il grado di $a(t)$ superi quello di $b(t)$ per ν unità, il secondo membro risulta del grado $-\nu(x+1)$ in t; d'altra parte ψ_x è il denominatore della ridotta di cui il numeratore è ψ_{x+1}; concludiamo dunque:

La frazione continua (8), *per tutti i punti situati fuori di un cerchio determinato* (R_2), *quando il grado di* $a(t)$ *sia di* ν *unità* ($\nu \geqq 1$) *superiore a quello di* $b(t)$, *converge verso la radice* α *di modulo massimo della equazione algebrica* $X^2 + a(t)\ X + b(t) = 0$.

La ridotta di indice x *di questa frazione continua, sviluppata in serie di potenze di* $\frac{1}{t}$, *ha tutti i suoi termini, fino a quello di ordine* $-\nu(x+1)$, *coincidenti con lo sviluppo di* $\alpha(t)$.

3. L'equazione:

$$a(t)\ X^2 + b(t)\ X - c(t) = 0\,, \tag{10}$$

mediante la sostituzione $X = \frac{Y}{a(t)}$, si trasforma nell'altra

$$Y^2 + b(t)\ Y - a(t)\,.\,c(t) = 0\,. \tag{11}$$

Se il grado di $b(t)$ non è superiore a quello di $a(t)\,.\,c(t)$, non si potrà applicare, con sicurezza, il metodo esposto ai numeri precedenti. L'equazione si può risolvere, per altro, con un metodo altrettanto rapido di approssimazione e per qualunque grado di $b(t)$, *ogni qualvolta il prodotto* $a\,.\,c$ *sia di grado pari.*

Si ponga infatti $b = b_1 - b_2$, con che l'equazione (10) diventa

$$aX^2 + b_1 X = b_2 X + c\,;$$

indicando con y una radice, si avrà identicamente:

$$y = \frac{b_2 y + c}{ay + b_1} = \frac{b_2}{a} + \frac{c - \frac{b_1 b_2}{a}}{ay + b_1} \tag{12}$$

e di qui:

$$ay = b_2 + \cfrac{ac - b_1 b_2}{b_1 + b_2 + \cfrac{ac - b_1 b_2}{b_1 + b_2 + \cdots}}\,. \tag{13}$$

Basterà, ora, che le b_1 e b_2 sieno determinate in modo che il grado di $b_1 + b_2$, rispetto a t, sia superiore a quello di $ac - b_1 b_2$, perchè si possa asserire che la frazione continua al secondo membro tende uniformemente alla radice α di modulo massimo della equazione:

$$X^2 + (b_1 + b_2)\ X + (ac - b_1 b_2) = 0\,. \tag{14}$$

Si avrà poi una delle radici della data, ponendo:

$$y = \frac{b_2 + \alpha}{a}\,.$$

Questo metodo sarà tanto più rapido, quanto maggiore è la differenza fra il grado di $b_1 + b_2$ e quello di ac.

Se il grado di ac è $2n$, posto che sia $b = \sum_{h=0}^{m} b_h t^{m-h}$, basterà fare:

$$(15)\ b_1 = \sum_{h=0}^{m} \frac{1}{2}(c_h + b_h) t^{m-h} + \sum_{k=0}^{n-m-1} c_k t^{n-k}, \quad b_2 = \sum_{h=0}^{m} \frac{1}{2}(c_h - b_h) t^{m-h} + \sum_{k=0}^{n-m-1} c_k t^{n-k}$$

e disporre delle $n+1$ indeterminate $c_0, c_1 \dots c_n$, per modo da fare annullare gli $n+1$ coefficienti dei termini più elevati della differenza $ac - b_1 b_2$, per ridurre questa ad essere di grado $n-1$ al più, mentre $b_1 + b_2$ è di grado n.

4. Mi propongo ora di vedere in quale relazione sieno le frazioni approssimate, che si ottengono col metodo esposto dianzi, con le ridotte della frazione continua periodica, in cui una irrazionale del 2° grado si svilupperebbe col metodo di Lagrange.

Supponendo che il grado di ciascuna delle b sia superiore a quello della a_x corrispondente, consideriamo la frazione periodica

$$(16)\qquad y = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cdots + a_{p-1} + \cfrac{b_0}{y}}$$

D'onde:

$$(17)\qquad Q_{p-1} y^2 + (b_0 Q_{p-2} - P_{p-1}) y - b_0 P_{p-2} = 0\,.$$

Ora, sviluppando, col metodo esposto ai numeri precedenti, una delle radici y della equazione (17), si avrebbe:

$$Q_{p-1} y = P_{p-1} + \cfrac{b_0(Q_{p-1} P_{p-2} - P_{p-1} Q_{p-2})}{b_0 Q_{p-2} + P_{p-1} + \cfrac{b_0(Q_{p-1} P_{p-2} - P_{p-1} Q_{p-2})}{b_0 Q_{p-2} + P_{p-1} + \cdots}}$$

od anche:

$$(18)\qquad Q_{p-1} y = P_{p-1} + \cfrac{(-1)^p b_0 \,.\, b_1 \dots b_{p-1}}{b_0 Q_{p-2} + P_{p-1} + \cfrac{(-1)^p b_0 \,.\, b_1 \dots b_{p-1}}{b_0 Q_{p-2} + P_{p-1} + \cdots}}\,.$$

Si consideri però che i numeratori ed i denominatori delle ridotte della (16) sono anche integrali della forma a coefficienti costanti [1]:

$$(19)\qquad \varphi_{x+2p} = (-1)^p b_0\, b_1 - b_{p-1} \varphi_x + (b_0 Q_{p-2} + P_{p-1}) \varphi_{x+p}\,;$$

e che si potrebbero in forza di ciò, calcolare le ridotte di p in p, senza pas-

[1] Cfr. il mio *Contributo alla teoria delle forme lineari alle differenze*, § V (Annali di Matematica 1895).

sare per le intermedie. Questo risultamento però è immediatamente conseguito applicando il metodo che ho esposto ai numeri precedenti, perchè la frazione continua (18) è appunto quella che sarebbe generata dalla forma (19).

Sostanzialmente dunque il metodo esposto consiste nel trasformare linearmente la radice cercata in una quantità sviluppabile in frazione continua, tale che la legge di formazione per ridotte consecutive sia costante; e sia quella medesima che si avrebbe, per ridotte congrue al modulo p, nello sviluppo della radice cercata.

5. Si abbia una equazione numerica:

$$ax^2 + 2bx - c = 0. \tag{20}$$

Dico che nello sviluppo:

$$ax = b_2 + \cfrac{ac - b_1 b_2}{b_1 + b_2 + \cfrac{ac - b_1 b_2}{b_1 + b_2 + \cdots}},$$

si può sempre supporre $ac - b_1 b_2 = 1$.

Ed infatti, dalle due: $b_1 - b_2 = 2b$, $b_1 b_2 = ac - 1$ si ricava:

$$b_1 = b + \sqrt{b^2 + ac - 1} \qquad b_2 = -b + \sqrt{b^2 + ac - 1}. \tag{21}$$

Poichè si ottiene una equazione equivalente alla data sostituendo ad a, b, c, numeri proporzionali $a' = ua$, $b' = ub$, $c' = uc$; la questione può ridursi a quella di determinare u in guisa, che la quantità $\sqrt{u^2b^2 + u^2ac - 1}$ sia un quadrato perfetto. Si giunge così all'equazione Pelliana:

$$u^2(b^2 - ac) - t^2 = 1 \tag{22}$$

la cui soluzione non offre difficoltà.

6. Le formule trovate, al numero precedente, ci mettono sulla strada per dare una facile dimostrazione del teorema, dovuto a Lagrange, che: *un irrazionale di 2° grado si sviluppa in frazione continua periodica* [1].

Sia infatti y radice della (20), onde

$$y = S(y) = \frac{b_2 y + c}{ay + b_1}, \quad \text{con} \begin{vmatrix} b_2 & c \\ a & b_1 \end{vmatrix} = -1. \tag{23}$$

Sia X il quoziente completo di ordine n nello sviluppo di y in frazione continua; avremo:

$$y = T(X) = \frac{P_n X + P_{n-1}}{Q_n X + Q_{n-1}}. \tag{24}$$

[1] Quella data da Emma Bortolotti nel tomo IX dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, non è immediatamente applicabile ad equazioni numeriche.

Da cui

$$X = T^{-1}\,ST(X) = \frac{AX + B}{CX + D} \tag{25}$$

$$\left\{\begin{aligned} A &= Q_{n-1}\,Q_n\left(a\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\frac{P_n}{Q_n} + b_1\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - b_2\frac{P_n}{Q_n} - c\right)\\ B &= Q^2_{n-1}\left(a\frac{P^2_{n-1}}{Q^2_{n-1}} + (b_1 - b_2)\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - c\right)\\ C &= -\,Q^2_n\left(a\frac{P^2_n}{Q^2_n} + (b_1 - b_2)\frac{P_n}{Q_n} - c\right)\\ D &= -\,Q_{n-1}Q_n\left(a\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\frac{P_n}{Q_n} + b_1\frac{P_n}{Q_n} - b_2\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - c\right)\end{aligned}\right. \tag{26}$$

I trinomi fra parentesi, nelle espressioni di B e di C, hanno segni contrarî perchè $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ e $\frac{P_n}{Q_n}$ comprendono una radice; i due numeri B e C, hanno dunque lo stesso segno.

Si ha poi

$$\frac{A}{B} = \frac{Q_n}{Q_{n-1}}\left(1 + \frac{a\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - b_2}{a\frac{P^2_{n-1}}{Q^2_{n-1}} + (b_1 - b_2)\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - c}\quad\frac{(-1)^n}{Q_n\,Q_{n-1}}\right).$$

Per una nota proprietà delle ridotte, $(-1)^n$ ed il trinomio a denominatore hanno il medesimo segno; si ha poi, dalle (21): $y > \frac{b_2}{a}$; dunque, se n è abbastanza grande; $a\,\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} > b_2$; dunque $A > B$.

Analoga dimostrazione può farsi per C e D. I quattro numeri A, B, C, D sono dunque tutti positivi. Si ha poi: $AD - BC = \pm 1$. Cioè *i numeri* $\frac{A}{C}$ e $\frac{B}{D}$ *sono ridotte consecutive nello sviluppo di* X *in frazione continua.*

La formula (24) ci dimostra allora che X *è un quoziente completo nello sviluppo di* X *stesso in frazione continua.*

7. Come applicazione dei metodi generali dati ai numeri precedenti, *si cerchi la radice quadrata di un polinomio intero di grado pari* A.

Dovendo risolvere l' equazione

$$X^2 - A = 0, \tag{27}$$

faremo: $b_h = 0$ $(h = 1\,.\,2\,...)$ nelle formule (15), e troveremo così un polinomio b di grado n tale che la differenza $A - b^2$ sarà di grado $n - 1$ al più. La formula (13) si trasformerà allora nella seguente:

$$X = b + \cfrac{A - b^2}{2b + \cfrac{A - b^2}{2b + \cdots}}; \tag{28}$$

analoga a quella trovata da Cataldi [1] per il caso che A sia un numero intero.

8. Si consideri l' operazione iterativa

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right). \tag{29}$$

Posto che esista il $\lim\limits_{n=\infty} a_n = y$, sarà [2]

$$y = \frac{1}{2}\left(y + \frac{A}{y}\right), \quad \text{cioè } y^2 = A.$$

Nella applicazione successiva della (29) consiste il metodo dato da Leonardo Pisano [3] per la estrazione approssimata di radice.

È noto però che se si fa $a_1 = b$, (b essendo la radice a meno di una unità, e, nel caso dei polinomi, l' espressione calcolata al numero precedente), si ha che a_n non differisce dalla ridotta $(2n-1)^{\text{esima}}$ della frazione continua (28) [4]. La convergenza delle a_n è dunque messa fuor di dubbio ed il metodo di Fibonacci si può applicare anche a polinomi di grado pari.

9. Finalmente, si possono ripetere le medesime considerazioni per la formula [5]:

$$P_{n-1} - Q_{n-1}\sqrt{A} = (P_0 - Q_0\sqrt{A})^n. \tag{30}$$

Matematica. — *Sull' integrazione dell' equazione differenziale* $\Delta^2\Delta^2 = 0$. Nota dell'ing. E. ALMANSI, presentata dal Corrispondente VOLTERRA.

Fisica. — *Ricerche sul fenomeno residuo nei tubi a rarefazione elevata.* Nota di ALESSANDRO SANDRUCCI, presentata dal Socio BLASERNA.

Le precedenti due Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

[1] *Trattato* ‖ *del modo brevissimo* ‖ *di trovare la radice quadra delli numeri* ‖ di Pietro Antonio Cataldi, lettore delle scienze matematiche nello studio di Bologna; in Bologna MDCXIII (pag. 144). Fa meraviglia che il Günther nella sua *Storia dello sviluppo delle frazioni continue* non voglia riguardare il Cataldi come il *solo* scopritore di quel l' algoritmo, mentre cita le *Deliciae Physico-mathematicae* di Schwenter, stampata nel MDCLI, ed attribuisce quella scoperta anche a lord Brounker nato 7 anni dopo la pubblicazione del libro di Cataldi.

[2] Cfr. Farkas, *Sur les fonctions itératives*, Journal de Math. a. 1884.

[3] *Liber Abbaci*, Roma MDCCCLVII, pag. 353, 355.

[4] Serret, *Algèbre*, t. I, pag. 76; Moret-Blanc, Nouvelles Ann., t. XII.

[5] Serret, loc. cit.; Frattini, *Intorno al calcolo approssimato delle radici quadrate.* (Periodico di Mat., tom. XIII, 1898).

Fisica terrestre. — *La gravità sul Monte Bianco.* Nota II di P. PIZZETTI, presentata dal Socio BLASERNA.

1. *Vetta.* — Quella parte della massa del Monte Bianco, che occorre considerare nello studio della attrazione locale, è principalmente costituita dalle roccie seguenti:

Protogino, gneiss, micascisti, calcescisti, calcare ceroide, calcari compatti, scisti ardesiaci e carboniosi.

Non occorre, per il nostro assunto, tener conto del modo di distribuzione e della varia estensione planimetrica di queste roccie. Giacchè le densità di esse non sono molto diverse; se si fa astrazione da talune varietà, che sul Monte Bianco figurano solo in proporzioni limitatissime, le densità si possono ritenere comprese fra 2,60 e 2,80. Attribuiremo a tutto il massiccio una densità di 2,65 *non superiore*, secondo ogni probabilità, alla densità media delle roccie visibili alla superficie della montagna.

Posto pertanto $\theta = 2{,}65$ nella formula

$$B' = \frac{3}{2}\frac{G}{R}\frac{\theta}{\theta_m}\left(H - \frac{10\beta}{2\pi}\sum \alpha\right)$$

e ricordando i dati numerici della Nota precedente, otteniamo, per la stazione *Vetta*, la componente verticale della attrazione misurata da

$$B' = 0^m{,}00404.$$

La gravità ridotta al livello del mare e diminuita della attrazione della montagna sarebbe quindi

$$g' - B' = 9^m{,}80550$$

che, paragonata col valore teorico

$$\gamma = 9^m{,}80672$$

offre una differenza di $\quad -0^m{,}00122.$

Invece non tenendo conto affatto della attrazione della montagna, abbiamo trovato $g' - \gamma = 0{,}00282$. *La attrazione apparente della massa montuosa* (0,00404) *è dunque solo in parte* (per meno di $^1/_3$) *compensata da probabili deficienze interiori di massa*, che possiamo materialmente rappresentare, nel modo consueto, come segue:

Uno strato orizzontale indefinito di densità $\theta = 2{,}65$, il quale eserciti sopra un punto esterno una attrazione misurata da $0^m{,}00122$, deve avere una altezza h prossimamente data dalla equazione

$$0^m{,}00122 = \frac{2}{3}\frac{G}{R}\frac{\theta}{\theta_m}h$$

donde $$h = 1116^m$$

La *deficienza* trovata può dunque materialmente rappresentarsi con un vuoto interiore secondo uno strato orizzontale indefinito di 1116 metri di spessore.

2. Ma a questo risultato dovrebbe tuttavia farsi una correzione. Abbiamo, per semplicità di calcolo, attribuito a tutto il volume della montagna (quale ci è risultato dal rilievo sulla carta) la densità 2,65, senza tener conto che una parte di quel volume è occupato da neve e da ghiaccio. La cupola stessa del monte è un ammasso di ghiaccio e neve, la regione immediatamente circostante è in gran parte occupata dai serbatoi di nevischio che alimentano le correnti di ghiaccio, e più lontano (benchè per aree relativamente limitate) si estendono queste gigantesche colate di ghiaccio.

Non è facile tener conto di questi giacimenti glaciali, nel calcolo dell'attrazione locale, attesa la scarsità di dati intorno allo spessore di essi.

Riguardo alla vetta, essa è formata da una specie di cresta nevosa quasi orizzontale della lunghezza di 100^m circa in direzione Est-Ovest. Il sig. ingegnere Imbert, per incarico avuto dall'Eiffel, fece praticare attraverso ad essa, nel 1891, una galleria di circa 52^m di lunghezza e all'altezza di 12^m sotto al vertice, allo scopo di vedere se fosse possibile fondare sulla roccia la capanna dell'osservatorio progettato (e poi fatto costruire sul ghiaccio, come tutti sanno) dal Jannsen. Questa galleria non incontrò in alcun punto la roccia. Lo stesso sig. Imbert osservava, nella sua interessante relazione [1], come le roccie emergenti, più vicine alla vetta, fossero allora: a Sud-Est un piccolo greppo (*la Tournette*) sporgente dalla neve di 20^{cm} circa, a distanza orizzontale di 162^m dalla vetta e 50^m più basso di questa; a Nord la punta detta *les Petits Mulets* (200^m di distanza orizzontale e 110^m più basso della vetta). Per trovare roccie scoperte di grande estensione, bisogna arrivare ai *G^s. Rochers Rouges* (600^m di distanza orizzontale verso Nord e 300^m sotto la vetta), ovvero alla *Tournette* (300^m di distanza orizzontale verso Ovest e 140^m di verticale).

[1] *Travaux de sondage au Mont-Blanc exécutés pour le compte de M.r l'ingénieur G. Eiffel* etc. par X. Imbert (Annales de l'Obs. météor. du Mont-Blanc publiés sous la direction de J. Vallot, 1e vol. 1893). Altri particolari topografici interessanti si trovano nella: *Note sur la constitution pétrographique des régions centrales du Massif du Mont-Blanc,* par M. Duparc e J. Vallot (Annales de l'Obs. etc., 2e vol. 1896).

Il sig. J. Vallot benemerito fondatore e direttore dell'osservatorio del *Rocher des Bosses* (altezza 4359^{m}), il quale, avendo da più anni dedicato studî indefessi e gran parte della propria vita al Monte Bianco, ha acquistato una competenza affatto speciale intorno a quella regione, riassume le proprie idee riguardo alla parte superiore di essa col dire (1) essere « estremamente probabile che la calotta del Monte Bianco non si trovi sopra una punta rocciosa nascosta, e che lo spessore dei ghiacci sia ivi di una *cinquantina* di metri » (*sessanta* secondo De Lapparent).

Riguardo alla profondità dei depositi dai quali hanno origine i torrenti di ghiaccio, non vi sono, a nostra conoscenza, dati sicuri. L'aspetto delle roccie emergenti, la presenza di grandi crepacci, dei quali alcuno pare arrivi alla profondità di 80 o 100 metri, fanno supporre che quelle roccie appartengano il più delle volte a vere *guglie* quasi a picco (p. es. il *Rocher des G.ds Mulets* è un' enorme piramide di 200^{m} di altezza a pendenza ripidissima verso Ovest e quasi verticale verso Est) (2). Ed è oltremodo probabile che quelle guglie sorgano da enormi e profondi valloni costantemente occupati da ghiaccio, il quale avrebbe così in qualche punto lo spessore di varie centinaja di metri.

Rispetto allo spessore delle correnti di ghiaccio del Monte Bianco, sono a nostra conoscenza questi due dati. Per la *Mer de Glace* 150^{m} secondo De Lapparent (3); pel *ghiacciajo del Miage* 200^{m} secondo Baretti (4). Ma questi numeri si riferiscono, suppongo, alle bocche dei ghiacciai dove lo spessore deve esser minore che nelle sezioni superiori.

Per farci un' idea del quanto la presenza del ghiaccio possa alterare il risultato numerico da noi ottenuto, ammettiamo di poter sostituire lo strato variabile della massa gelata con uno strato uniforme indefinito di 100^{m} di altezza e di densità 0,75. Dovremo sottrarre all'attrazione calcolata B', quella di uno strato indefinito di altezza 100^{m} e densità $2{,}65 - 0{,}75 = 1{,}90$. Un tale strato può idealmente sostituirsi con un altro di densità 2,65 e altezza uguale a

$$100^{m}\,\frac{1{,}90}{2{,}65} = 72^{m} \text{ circa.}$$

La deficienza di 1116^{m} sopra trovata andrebbe così scemata di 72^{m}. Questo calcolo di correzione basa sopra un dato troppo arbitrario per poter ad esso attribuire un valore definitivo, ma è sufficiente per darci una idea dell'ordine di grandezza della cercata correzione.

3. Abbiamo già osservato nella Nota precedente come i dati topografici a nostra disposizione non fossero sufficienti per permetterci di valutare con

(1) Revue scientifique, 1891, 2e sem., pag. 354.

(2) Vedi *Note pétrographique* etc, già citata, pag. 150.

(3) *Traité de Géologie.*

(4) Memorie Accad. Torino. Tomo XXXII, 1880.

molta precisione la attrazione locale. Nella costruzione dei profili verticali, dedotte dalla carta tutte le possibili quote, abbiamo supposto che il terreno scendesse *uniformemente* fra due punti di noto livello. Ora in molte regioni, e specialmente in prossimità della vetta, vi hanno delle rapide cadute, non tenendo conto delle quali noi abbiamo in realtà esagerata la grandezza della attrazione locale. Riteniamo che, sotto un tal punto di vista, le aree α dei nostri profili trasformati possano in media essere affette da un errore negativo, non maggiore (in valore assoluto) di 6 o 7 $cm.^2$.

Lo spessore (1116^m) dello strato fittizio deficiente potrebbe sotto questo punto di vista, richiedere una diminuzione di 60 o 70 metri.

4. *Chamonix.* — Non ci è possibile, per ora, fare con qualche precisione il calcolo relativo a Chamonix, non conoscendo l'altezza precisa alla quale è stata fatta la determinazione di gravità dal sig. Hansky. Se adottiamo la quota dell'osservatorio del sig. Vallot [1]

$$H = 1088^m$$

otteniamo $$g' = 9{,}80729 \quad , \quad H - \frac{10\,\beta}{2\,\pi} \sum \alpha = 680 \, .$$

Attribuendo a θ come precedentemente il valore 2,65 si avrebbe

$$B' = 0^m{,}00074 \, .$$

Invece $g' - \gamma = 0^m{,}00049$. Si avrebbe dunque una deficienza di $0^m{,}00025$ nella gravità; deficienza corrispondente ad uno strato fittizio di circa 250^m di spessore.

5. Concludendo: la gravità osservata sulla vetta del Monte Bianco dimostra come l'attrazione del Monte non sia che in piccola parte compensata da deficienze interiori di massa. Tali deficienze non possono essere di molto inferiori a quelle rappresentate da uno strato di 1000^m di altezza. Per la stazione di Chamonix invece la deficienza *sembra* essere molto minore.

Sarebbe ora oltremodo interessante che delle misure di gravità fossero eseguite nel versante italiano, nell'alta valle della Dora Baltea. Ed altrettanto importante sarebbe estendere, per largo spazio, tali misurazioni nelle regioni più basse che scendono dalle Alpi Graje e Pennine. In tal guisa sarebbe possibile decidere se sia veramente lecito trascurare in questa regione (come tacitamente abbiamo fatto qui) lo scostamento fra il Geoide e quell'Ellissoide pel quale vale la formola di Helmert che dà i valori di γ.

[1] Nella Nota precedente è avvenuta una svista. Si è posto $H = 1050^m$, calcolando tuttavia g' colla quota 1088^m. Fatte le correzioni, ossia posto ovunque $H = 1088$, il valore di θ calcolato in quella Nota (paragrafo 4°) risulta 1,7 invece che 1,8.

Fisica. — *Ricerche sull' inclinazione magnetica col mezzo della distribuzione del magnetismo libero nei vasi fittili antichi.* Nota del dott. G. FOLGHERAITER, presentata dal Socio BLASERNA.

In una mia recente pubblicazione (1) ho iniziato lo studio sopra la distribuzione del magnetismo nei vasi rinvenuti nelle tombe etrusche di Narce, Falerii, Chiusi ed Orvieto allo scopo di determinare l' inclinazione magnetica all' epoca, in cui quei vasi furono cotti.

I risultati di queste ricerche inaspettati e molto diversi da quelli, che in base allo studio delle variazioni dell' inclinazione magnetica negli ultimi tempi si prevedono per il futuro, mi spinsero a cercare una conferma prendendo in esame vasi antichi di altri tempi e di altre regioni.

Coll' appoggio del prof. Blaserna ho avuto facilmente il permesso dai Direttori dei varî Musei nazionali di esaminare i vasi delle diverse collezioni, e di più mi vennero dal Ministero della P. Istruzione concessi dei sussidî per recarmi in varie regioni d' Italia. In tal modo ho potuto studiare la raccolta delle matrici e delle tazze del Museo d'Arezzo, che risalgono alla prima metà del I secolo a. Cr., la ricca raccolta dei vasi greci di Apulia e Campania nel Museo archeologico di Firenze, le raccolte di vasi dell' ultimo periodo di Pompei e dei vasi attici e d'Apulia nel Museo di Napoli, la raccolta dei vasi provenienti dagli scavi delle Necropoli del Fusco e di Megara Hyblaea esistente nel Museo nazionale di Siracusa ed infine la raccolta dei vasi moderni (del 1600) siciliani nel Museo di Palermo (2).

Come altra volta esposi, il metodo di misura si basa sulla determinazione dell' azione magnetica, che i varî oggetti esercitano su di un piccolo ago calamitato liberamente sospeso, quando a questo vengano avvicinati in determinate condizioni diversi punti della periferia della loro base e della bocca. Le precauzioni usate, la disposizione dei vasi e l' apparecchio stesso di misura sono quelli già descritti ed adoperati nelle antecedenti ricerche (3).

Il concetto, che mi ha guidato alla determinazione dell' inclinazione magnetica all' epoca della fabbricazione dei vasi antichi, è il seguente: Se si colloca un cilindro di argilla in una data posizione, e si arroventa, il

(1) *Ricerche sull' inclinazione magnetica all' epoca etrusca;* vedi questi Rendiconti, vol. V, 2° sem. 1896, pag. 293.

(2) Devo ringraziare vivamente i signori Direttori dei varî Musei da me visitati per le cordiali cure avute nel rendere facile il mio còmpito, sia col darmi degli utili schiarimenti sulle questioni archeologiche che mi potevano interessare, sia col mettere a mia completa disposizione il materiale da studiare.

(3) Vedi questi Rendiconti, vol. V, 2° sem. 1896, pag. 130.

campo magnetico terrestre orienta durante il raffreddamento le sostanze magnetiche, che per azione chimica si sono formate ad alta temperatura, e l'asse magnetico del cilindro deve per conseguenza risultare parallelo alla direzione della forza magnetizzante. Si tratta quindi di dedurre dalla distribuzione del magnetismo libero alla periferia delle sue due basi, la direzione del suo asse magnetico. A tale scopo si suppone, che il campo terrestre vi produca per induzione due calamitazioni sovrapposte, una dovuta alla sua componente orizzontale, l'altra alla componente verticale. Se il piano passante per i due diametri *ab* ed *a'b'* del cilindro rappresenta la *sezione normale*, ossia la sezione che durante la cottura si trovava nel piano del meridiano magnetico, e se *n s* è la direzione del campo terrestre, nei punti *a* e *b'*, ove le due calamitazioni indotte hanno eguale polarità, si trovano due massimi d'intensità magnetica, e nei punti *a'* e *b*, ove le due calamitazioni hanno polarità opposta, si hanno due minimi. Col mezzo di questi valori si può quindi separare l'effetto delle due componenti e calcolare la direzione della loro risultante (asse magnetico).

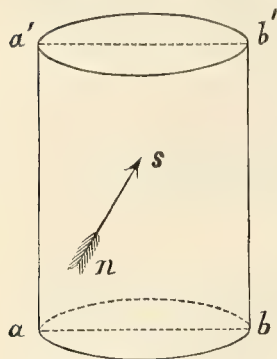



Fig. 1.

Però l'esperienza dimostra, che nella generalità dei casi calcolando in questo modo la direzione dell'asse magnetico, essa non è eguale alla direzione del campo magnetizzante, ma si hanno delle notevoli divergenze, che raggiungono 10° e più, a seconda della posizione data al cilindro durante il periodo di riscaldamento e raffreddamento ed a seconda delle sue dimensioni.

La ragione delle divergenze trovate [1] sta principalmente nel fatto, che quando si avvicina all'intensimetro uno dei quattro punti summenzionati, non si misura soltanto l'effetto del magnetismo libero in esso contenuto, ma l'ago risente complessivamente l'azione magnetica di tutti i punti dell'oggetto. Sperimentalmente non si può combattere totalmente questo inconveniente, perchè occorrerebbe a tal uopo fare un ago infinitamente piccolo ed avvicinarlo a distanza infinitesima dal punto da esplorare.

Ho tentato di fare una prima correzione supponendo, che tutto il magnetismo del cilindro sia riunito nei 4 punti di massima e minima intensità magnetica; se in tale ipotesi si sottrae dall'intensità magnetica, che si ottiene, quando si avvicina all'ago uno dei quattro punti, quella dovuta agli altri tre, si dovrebbe avere l'azione esercitata unicamente dal punto più avvicinato. Però anche con questa riduzione ottenni delle notevoli divergenze tra la direzione, così dedotta, dell'asse magnetico nei cilindri e la direzione del campo magnetizzante; il che indica, che una correzione fatta in tal modo è insufficiente [2].

(1) Vedi questi Rendiconti, vol. V, 2° sem. 1896, pag. 133.
(2) Vedi questi Rendiconti, vol. V, 2° sem. 1896, pag. 199.

Ora ho cercato di risolvere la questione tenendo in considerazione non solo l' azione dei quattro punti della sezione normale, ma quella di tutti i punti del cilindro esaminati (12 per ciascuna base), ed in tal modo sono riuscito ad ottenere dei risultati abbastanza soddisfacenti. Il calcolo si riduce a due operazioni distinte: la prima ha lo scopo di determinare separatamente l' effetto dovuto alle due componenti verticale ed orizzontale del magnetismo. Colla seconda si determina l' azione dovuta al magnetismo libero in un determinato punto calcolando l' azione di tutti gli altri ventitrè punti esaminati.

1°. Per effetto del magnetismo indotto dalla componente verticale, si ha una distribuzione magnetica uniforme in tutti i punti della periferia delle due basi, sicchè l' ago dell' intensimetro subirebbe per questa sola azione, se potesse essere isolata, una deviazione costante qualunque sia il punto delle due periferie ad esso avvicinato (salvo ben s' intende il senso della deviazione, perchè alla base inferiore si ha magnetismo nord ed alla base superiore magnetismo sud).

Per l' induzione dovuta alla componente orizzontale del magnetismo terrestre alla periferia di ciascuno dei circoli, di cui è costituito il cilindro, la distribuzione del magnetismo libero deve essere simmetrica rispetto alla sezione normale, nello stesso modo come se si avessero due calamite lineari perfette ed eguali, ripiegate a semicerchio ed unite per i loro poli omonimi. Ma la natura della funzione, che rappresenta questa distribuzione, è complicatissima, quando si debba tenere conto di tutte le calamite lineari, che costituiscono la superficie del cilindro, ed anche per una calamita rettilinea e lineare il problema non è solubile senza ricorrere a delle ipotesi più o meno incerte. Nel caso mio però si sa, che per causa della simmetria i valori dell' intensità magnetica corrispondenti agli angoli $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ devono ridursi a zero, e che per $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$ devono assumere dei valori eguali e di segno contrario. E siccome, oltre essere simmetrica, la funzione i è periodica, e torna al suo valore iniziale per un aumento di 2π di φ, così essa viene rappresentata da una serie, che progredisce secondo i coseni dei multipli di φ. Se per semplicità conserviamo in prima approssimazione i due primi termini della serie, avremo:

$$i = \mathrm{K} + \mathrm{K}' \cos \varphi .$$

Questa relazione vale anche quando si tiene conto dell' azione dovuta alla componente verticale del magnetismo indotto. In tal caso cambia solo il valore della costante K.

Ora siccome furono fatte su ciascuna periferia delle due basi 12 misure d' intensità, in punti posti tra loro a distanza di 30°, così si hanno per ciascuna base di ogni cilindro 12 equazioni, dalle quali si possono ricavare i valori di K e K'. Chiamando $i_1, i_2, \dots i_{12}$ le intensità magnetiche

dei diversi punti, partendo da quello di massima intensità, si ha alla base inferiore:

per $\varphi = 0$ $\qquad i_1 = K + K'$

$\varphi = \frac{\pi}{6}$ e $\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ $\qquad \left\{ \begin{matrix} i_2 \\ i_{12} \end{matrix} \right. = K + K' \cos 30$

$\vdots$

$\varphi = \frac{5\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ $\qquad \left\{ \begin{matrix} i_6 \\ i_8 \end{matrix} \right. = K - K' \cos 30$

$\varphi = \pi$ $\qquad i_7 = K - K'$

Sommando membro a membro tutte le equazioni si eliminano evidentemente i termini contenenti K', e quindi si ha:

$$K = \frac{\Sigma i}{12}$$

Se si cambia il segno nelle equazioni, che hanno il coseno negativo, e si somma membro a membro, si elimina K e si ottiene:

$$K' = \frac{i_1 + i_2 + i_3 + i_{11} + i_{12} - (i_5 + i_6 + i_7 + i_8 + i_9)}{2\,(1 + 2\cos 30^\circ + 2\cos 60^\circ)}$$

In modo analogo si ricavano i valori di K e K' dalle intensità magnetiche nei 12 punti della base superiore.

Nel calcolo dell' inclinazione dell' asse magnetico ho preso per valore di K e K' la media dei due valori assoluti ottenuti in tal modo sulle due basi.

2°. La seconda parte del calcolo consiste nel determinare dall' intensità magnetica, che si misura in un determinato punto, e che è dovuta all' azione complessiva di tutto il cilindro, l' intensità che dipende unicamente dal magnetismo libero di quel punto.

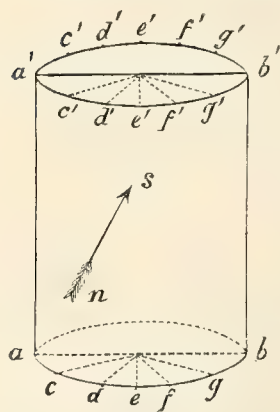



Fig. 2.

Prendiamo ad esempio il punto a ove l' azione complessiva misurata è data da $i = K + K'$. Chiamando con v la quantità di magnetismo libero in quel punto indotto dalla componente verticale del campo terrestre, h quello dovuto alla componente orizzontale, e con $a, b, c, \ldots a', b', c', \ldots$ delle costanti numeriche, che dipendono dalle dimensioni dell' ago dell' intensimetro e dalla sua distanza e posizione rispetto ai corrispondenti punti $a, b, c, \ldots a', b', c', \ldots$ del cilindro, in cui furono fatte le misure [1], si ha:

[1] Sia r il raggio della base del cilindro, ed l la distanza della stessa dall' ago, e supponiamo che questo per le sue piccole dimensioni agisca come una coppia per potere

$$i = a(v+h) + 2c(v + h\cos 30^\circ) + 2d(v + h\cos 60^\circ) + 2ev$$
$$+ 2f(v - h\cos 60^\circ) + 2g(v - h\cos 30^\circ) + b(v-h)$$
$$- a'(v-h) - 2c'(v - h\cos 30^\circ) - 2d'(v - h\cos 60^\circ) - 2e'v$$
$$- 2f'(v + h\cos 60^\circ) - 2g'(v + h\cos 30^\circ - b'(v+h).$$

Raccogliendo e mettendo

$$A = a + 2c + 2d + 2e + 2f + 2g + b$$
$$A' = a' + 2c' + 2d' + 2e' + 2f' + 2g' + b'$$
$$B = a + d - b - f + (c-g)\sqrt{3}$$
$$B' = a' + d' - b' - f' + (c'-g')\sqrt{3}$$

si ottiene
$$i = K + K' = (A - A')v + (B + B')h \qquad 1)$$

In modo analogo se si avvicina all' ago dell' intensimetro il punto b, ove l' azione complessiva è data da $i_1 = K - K'$, e si tengono in considerazione le azioni degli altri punti del cilindro si ottiene:

$$i_1 = K - K' = (A - A')v - (B + B')h \qquad 2)$$

Dalle due equazioni 1) e 2) si ricava, che la tangente dell' angolo d' inclinazione della risultante di v ed h è data da

$$\frac{v}{h} = \frac{B + B'}{A - A'} \cdot \frac{K}{K'} \qquad 3)$$

Per assicurarmi che coll' applicazione di quest' equazione la direzione della risultante dei due magnetismi indotti v ed h in un cilindro è eguale alla direzione della forza magnetizzante, ho ripreso in esame le misure fatte sugli oggetti da me preparati e cotti or son tre anni, ed ho rifatto i calcoli dell' inclinazione dell' asse magnetico. Or bene, per cilindri discretamente lunghi si trovano delle divergenze abbastanza piccole tra le due direzioni; ma la cosa non è così per cilindri ed altri oggetti molto corti. Se però nel calcolare le costanti A′ e B′ si tiene conto solo del magnetismo dei punti a' e b', le due direzioni risultano pressochè parallele sia per cilindri di qualsiasi dimensione, sia per vasi di argilla di altre forme. La concordanza è ancora maggiore, se si introduce una lieve modificazione anche nel calcolo della costante B, supponendo che sia nullo l' effetto del magnetismo libero dovuto alla componente orizzontale nei punti d ed f prossimi alla sua linea neutra [1].

---

trascurare la sua lunghezza. Tenendo conto della posizione, nella quale si colloca l' oggetto rispetto all' ago, l' azione esercitata nella direzione dell' asse dall' unità di magnetismo posto in un punto della periferia, che disti dell' angolo φ dall' origine, è data da

$$\frac{1}{l^2 \left\{1 + 4\frac{r^2}{l^2}\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}\right\}^{3/2}}$$

che esprime il valore delle costanti $a, b, c, \ldots a', b', c', \ldots$

[1] Modificato in tal modo il valore delle costanti, la formola 3) acquista un carattere in parte empirico.

A questo proposito credo opportuno riassumere nelle seguenti tabelle i risultati ottenuti con tali restrizioni, per mostrare entro quali limiti si può, dalla distribuzione del magnetismo indotto, conoscere la direzione del campo magnetizzante.

La tabella I riguarda cilindri di diametro a press' a poco eguale ma di altezze diverse; nella 2ª e 3ª colonna sono date rispettivamente le loro altezze e diametri; nella 4ª l' inclinazione dell' asse magnetico, calcolata semplicemente in base all' intensità magnetica misurata nei quattro punti della sezione normale; nella 5ª l' inclinazione dell' asse magnetico, quando si tenga conto dell' azione del magnetismo libero distribuito nei cilindri nel modo sopra esposto; nella 6ª colonna finalmente è data la differenza tra i valori della 5ª colonna e l' inclinazione del campo magnetizzante (57° 40′).

Tabella I.

I	II	III	IV	V	VI
Cilindro N. 1	mm. 22.7	mm. 60 5	62° 32′	56° 7′	— 1° 33′
» » 2	» 24.0	» 61.2	63 0	56 15	— 1 24
» » 3	» 27.5	» 59.5	64 20	57 54	+ 0 14
» » 4	» 28.0	» 58.5	66 25	58 5	+ 0 25
» » 5	» 41.0	» 59.0	67 55	58 51	+ 1 11
» » 6	» 51.8	» 60.0	67 50	56 36	— 1 4
» » 7	» 55.0	» 58.0	67 40	56 59	— 0 41
» » 8	» 92.5	» 58.0	69 39	57 21	— 0 19
» » 9	» 104.5	» 57.4	69 50	58 12	+ 0 32
» » 10	» 117.0	» 58.0	69 50	55 34	— 2 6

La II tabella riguarda una serie di cilindri tutti a press' a poco della stessa altezza ma di diametro diverso. Le varie colonne hanno lo stesso significato che nella tabella I.

Tabella II.

I	II	III	IV	V	VI
Cilindro A	mm. 104.5	mm. 57.4	69° 50′	58° 12′	+ 0° 32′
» B	» 100.0	» 71.5	65 10	58 45	+ 1 5
» C	» 107.5	» 73.5	63 50	57 24	— 0 16
» D	» 105.2	» 86.1	62 55	56 1	— 1 39
» E	» 98.5	» 91.7	62 40	58 49	+ 1 9
» F	» 106.0	» 92.9	62 30	58 14	+ 0 34
» G	» 104.0	» 111.0	62 17	56 8	— 1 32

La seguente tabella riassume i risultati avuti quando alcuni dei cilindri della tabella I furono collocati nel forno su d' un piano inclinato. La prima riga dà l' inclinazione α del campo magnetizzante rispetto alla base dei cilindri; nelle altre righe è riportata la corrispondente inclinazione dell' asse magnetico dei medesimi calcolata colle norme sopra esposte.

Tabella III.

	$\alpha = 0°$	$\alpha = 23°$	$\alpha = 40°$	$\alpha = 57° 40′$	$\alpha = 76°$	$\alpha = 90°$
Cilindro N. 5	1° 45′			58° 51′		90° 14′
» » 6	0 5		41° 9′	56 36		89 21
» » 7	1 31	21° 26′	37 44	56 59	76° 25′	89 51
» » 8	1 4	22 47	39 51	57 21	77 7	88 20
» » 10	0 11	22 42	38 13	55 34	74 15	88 12

La tabella seguente riguarda alcuni oggetti della tabella 2ª, ed ha lo stesso significato della precedente.

TABELLA IV.

	$\alpha = 0°$	$\alpha = 23°$	$\alpha = 39°$	$\alpha = 57° 40'$	$\alpha = 76°$	$\alpha = 90°$
Cilindro A	0° 55′	23° 32′	40° 9′	58° 12′	75° 56′	89° 50′
» C	0 34	22 28	39 16	57 24	74 38	89 2
» F	— 0 12	24 30	40 46	58 14	75 57	90 13
» G	0 16	23 0	37 48	56 8	76 5	88 50

Riassumo finalmente nella seguente tabella i risultati avuti per i vasi da fiori ed anfore da me preparati e cotti. Le diverse colonne hanno lo stesso significato che nelle tabelle I e II. Solo nella colonna 3ª vengono dati i diametri della base e della bocca dei varî oggetti. La maggior parte di essi venne cotta due o più volte ora col fondo ora colla bocca in basso; di più a qualche vaso venne poscia levata la corona o il fondo o le anse, e quindi fu ricotto.

TABELLA V.

I	II	III		IV	V	VI
Vaso da fiori N. 1 diritto	mm. 145	mm. 100	mm. 150	62° 52′	56° 34′	— 1° 6′
» » rovesciato . .	» »	» »	» »	61 58	55 32	— 2 8
» » diritto	» »	» »	» »	64 4	57 55	+ 0 15
» » senza fondo .	» »	» »	» »	64 42	58 38	+ 0 58
» N. 2 diritto	» 145	» 98	» 162	61 59	58 22	+ 0 42
» » rovesciato . .	» »	» »	» »	61 24	57 6	— 0 34
» » senza corona .	» 119.5	» 98	» 142	62 9	58 4	+ 0 24
» N. 3 senza corona .	» »	» »	» »	62 15	58 11	+ 0 31
» » rovesciato . .	» »	» »	» »	62 46	58 45	+ 1 5
» N. 4 diritto	» 133.5	» 86	» 154	61 32	57 39	— 0 1
Anfora N. 1 diritta	» 163.5	» 85	» 108	62 43	55 50	— 1 50
» » senza anse.	» »	» »	» »	62 56	56 5	— 1 35
» » rovesciata	» »	» »	» »	65 19	58 50	+ 1 10
» N. 2 diritta	» 163	» 87	» 106	63 41	56 56	— 0 44
» » rovesciata	» »	» »	» »	65 5	58 40	+ 1 0

Se dunque le costanti A′ e B′ sono calcolate tenendo conto solo dell' intensità magnetica trovata nei punti a' e b' della sezione normale, e la costante B è dedotta supponendo nullo il magnetismo libero, dovuto alla componente orizzontale, dei punti d ed f, l' errore che si commette nella determinazione della direzione del campo magnetizzante raramente supera 1° 30′, qualunque sia la disposizione data durante la cottura agli oggetti, siano essi cilindri, vasi conici od anfore a forma sferoidale. Questo risultato devesi ritenere come molto soddisfacente, sebbene siano state usate tutte cautele ed attenzioni tanto nel dare forma simmetrica agli oggetti come nel disporli entro il forno nella voluta posizione.

Per il calcolo dell' inclinazione magnetica nelle varie epoche dedotta in base alla distribuzione del magnetismo libero dei vasi greci, etruschi, ecc., che esistono nei nostri Musei, ho applicato senz'altro il metodo sopra esposto: giacchè parecchi di questi vasi, come le matrici e le urne cinerarie di Arezzo,

hanno la forma di cono tronco, altri, come i vasi di Pompei, hanno forma sferoidale. È un po' più complessa la forma delle anfore greche, ma all'epoca della loro fabbricazione l'inclinazione magnetica era molto piccola, ed in questo caso la distribuzione del magnetismo libero su tutto un vaso è tale, che la sua influenza si fa risentire poco nella determinazione di $\frac{v}{h}$ e diviene nulla per $v = 0$. Vasi di forma complicata e non simmetrici attorno ad un asse, non ne ho mai tenuti in considerazione.

A prima vista sembrerebbe, che si possa eliminare qualsiasi dubbio sul valore dell'inclinazione magnetica in una data epoca fabbricando ora dei vasi di forma e dimensioni eguali a quelle dei vasi antichi studiati, e cercando con successivi tentativi in quale modo essi devono essere, durante la cottura, orientati rispetto alla direzione del campo magnetico terrestre, affinchè la distribuzione del magnetismo divenga in essi eguale a quella trovata nei vasi antichi. Un simile procedimento però sarebbe troppo lungo e difficile, e non darebbe in fine, a mio credere, dei risultati molto più sicuri di quelli, che si ottengono applicando un coefficiente di correzione. Per convincersene basta osservare la tabella V, dalla quale risulta, che uno stesso oggetto portato successivamente due o tre volte ad alta temperatura non dà mai lo stesso valore per l'inclinazione del campo, quantunque il suo asse di figura sia stato sempre verticale.

Fisica terrestre. — *Periodicità dei terremoti adriatico-marchigiani e loro velocità di propagazione a piccole distanze.* Nota del dott. ADOLFO CANCANI, presentata dal Socio TACCHINI.

Il 21 settembre 1897 un terremoto avente il suo epicentro nell' Adriatico, a 20 km. dalla costa tra Fano e Sinigallia, scuoteva fortemente e danneggiava le città ed i dintorni di Jesi, Pesaro, Sinigallia ed Ancona.

Non intendo nella presente Nota di fare uno studio particolareggiato di quel fenomeno sismico, poichè questo verrà quanto prima pubblicato nel Bollettino della Società sismologica italiana, ma soltanto di porre in rilievo due risultati cui sono giunto in quello studio e che mi sembrano degni di qualche considerazione.

Il primo consiste in un periodo abbastanza spiccato secondo il quale si sono succeduti i più intensi terremoti conosciuti, che coll' epicentro nell' Adriatico abbiano colpito la costa delle Marche e delle Romagne; l'altro in una buona determinazione, che fui in grado di fare, in occasione dello studio predetto, della velocità di propagazione delle onde sismiche per piccole distanze.

Già il Vannucci nel suo *Discorso istorico-filosofico sul terremoto che colpì la città di Rimini nel 1786* asseriva che la Romagna in ogni secolo

è fatta bersaglio di qualche disastroso terremoto, ma quell'autore non fa che un semplice vago accenno. Ho voluto perciò compulsare i varî cataloghi per vedere se si fosse potuto scoprire un qualche cenno di periodicità. La conclusione a cui sono arrivato è che, almeno per i disastrosi, esiste realmente un periodo secolare abbastanza distinto. Riferisco infatti nella seguente tabella tutti i terremoti più forti, che colpirono le coste della Romagna e delle Marche, che si trovano registrati nei varî cataloghi.

Terremoti della costa di Romagna e delle Marche.

Intervalli	Date	Intervalli	Località	Intensità	Gradi della Scala sismica	
	873	...	Ancona			
102						
	(975)?	...	?	?		
103						
	(1078)?	...	?	?		
102						
	1180	...	Rimini			
99						
	1279	26	Romagna	disastroso	10	
109	1302-08		Ancona, Rimini	rovinoso		9
	1387-88	14.5	Forlì	fortissimo	8	
95.5	1402		Forlì	rovinoso		9
	1483	21.5	Romagna	disastroso	10	
100	1504-05		Forlì	fortissimo		8
	1582-84	33	Rimini	forte	7	
89	1613-19		Rimini, Forlì	fortissimo		8
	1672	29	Pesaro, Ancona	disastroso	10	
114	1701		Romagna	fortissimo		8
	1786	15	Rimini	disastroso	10	
86.5	1801		Romagna	forte		7
	1870-75	23	Urbino, Ancona	rovinoso	9	
	1897		Sinigallia	forte		7
Med. 100.0		Med. 23.1			Med. 9.1	M. 8.0

Dall' esame di questa tabella si scorge come la costa di Romagna e delle Marche venga scossa a periodi di 100 ± 14 anni da terremoti d' intensità media 9,1 della scala De-Rossi-Forel, e che a questi succedono con intervallo piuttosto variabile, cioè di 23 ± 10 anni, altri terremoti d' intensità media 8,0 della medesima scala.

Se l' intervallo a cui succedono gli ultimi ai primi è soggetto ad una variazione grande rispetto alla grandezza dell' intervallo medesimo, non così può dirsi del periodo secolare con cui si seguono i maggiori terremoti.

Il terremoto dell' 873 trovasi citato nell' elenco dei più celebri terremoti di Francesco Angelo Grimaldi [1]. Le lacune delle serie dall' 873 ad oggi sarebbero adunque soltanto due, l' una intorno al 975, l' altra intorno al 1078. Per la scarsezza di notizie relative ad epoche così remote non c' è da rimanere meravigliati di queste lacune; è piuttosto da ritenere probabile che possano venire colmate col progredire delle ricerche sismiche. Faccio notare a tal proposito che nei cataloghi del Mallet sono notati due terremoti a Laibach, l' uno nel 1077, l' altro nel 1081. È da ritenere come probabile che l' origine di questi sia stata nell' Adriatico, e che, mentre sono venute in luce quelle monche notizie relative a Laibach, siano ancora nascoste quelle relative a ciò che avvenne allora sulle coste della Romagna e delle Marche. Quando queste venissero in luce e ne risultasse un epicentro subadriatico, non rimarrebbe che una sola lacuna.

Tra tutti i più forti terremoti che colpirono la costa di Romagna e delle Marche, e che ho ritrovati nei cataloghi del Mallet, del Mercalli, del Grimaldi, del Fuchs, del Goiran, negli scritti di sismologia del Serpieri, e nelle Monografie dell' Astolfi e del Vannucci, uno rovinoso, ed uno solo, non rientra nel periodo secolare, cioè quello del 24 aprile 1741 che colpì la costa delle Marche.

Faccio ora un cenno della velocità di propagazione con cui si propagarono le onde sismiche a piccole distanze, il 21 settembre 1897.

Sebbene moltissimi calcoli di velocità di propagazione delle onde sismiche siano stati fatti per grandi distanze, tuttavia pochi se ne hanno che si riferiscano a distanze piccole, e quei pochi hanno condotto quasi sempre a risultati incerti. La difficoltà di avere in una regione ristretta un certo numero di ore del passaggio delle ondulazioni sismiche, sia per mezzo di strumenti, sia per l' osservazione diretta delle persone, e sopratutto la difficoltà di averle colla precisione che si richiede, sono le ragioni per cui su questa questione rimane ancora molto a discutere.

Fra i tanti dati orarî raccolti dall' Ufficio centrale di Meteorologia e Geodinamica, alcuni ve ne sono che meritano la massima fiducia, e sono quattro di stazioni prossime all' epicentro, e nove di stazioni situate a differenti maggiori distanze. I quattro sono dei due osservatorî di Pesaro e di Urbino, e dei due semafori del Monte Conero e del Monte Cappuccini presso Ancona. Gli osservatorî di Pesaro e Urbino hanno fornito l' ora determinata con la migliore accuratezza che per essi si potesse, ed i semafori l' ora indicata dall' orologio dell' ufficio, orologio che viene tutti i giorni telegraficamente regolato con l' ora di Roma. Le altre nove stazioni poi di Firenze, Ferrara,

[1] Quest' elenco è unito alla monografia che ha per titolo: *De novo et ingenti in universa provincia Umbriae et Aprutij citerioris terraemotu, congeminatus nuncius.*

Padova, Trieste, Roma, Rocca di Papa, Ischia, Lubiana, Utrecht, hanno tutte più o meno direttamente il tempo campione da osservatorî astronomici.

Presento qui in una tabella i risultati ottenuti. Le ore si riferiscono al principio del movimento.

Località	Distanze dall' epicentro in chilom.	Ore del principio della scossa			Velocità in chilometri a secondo	Velocità in chilometri a minuto
		h.	m.	.		
Pesaro.	30	13	57	15	—	—
Semaforo M. Cappuccini	35	13	58		—	-
Semaforo M. Conero . .	38	13	58		—	—
Urbino	60	13	58		—	—
Firenze	165	14	0	13	0.86	52.8
Ferrara	165	14	0	0	0.95	57.0
Padova	195	14	0	2	1.16	69.6
Trieste	205	14	0	6	1.20	72.0
Roma	240	14	0	5	1.46	87.6
Rocca di Papa	250	13	59	55	1.66	99.6
Lubiana	250	14	0	3	1.56	93.6
Ischia.	355	14	0	25	2.01	120.6
Utrecht	1050	14	2	30	3.62	217.2

Da questa tabella si vede come la velocità sempre piccola, in confronto di quella che si ottiene per grandi distanze, vada crescendo col propagarsi del moto ondulatorio del terreno.

I valori sopra esposti sono del medesimo ordine di grandezza di quelli avuti in terremoti artificiali, dal generale Abbot colle esplosioni di 145000 kg. di miscuglio esplosivo e di 25000 kg. di dinamite, dal Mallet coll' esplosione di diverse cariche di polvere varianti da 1000 a 6000 kg.; dal Fouqué e dal Lèvy con esplosioni di cariche di dinamite varianti da 4 ad 8 kg.; e dal Milne con la caduta da diverse altezze di pesi variabili da 800 a 1000 kg. (1).

Le differenze in più od in meno, fra i varî valori sono dovute, come è ben dimostrato dai predetti autori, alle intensità degli impulsi iniziali, e sopra tutto alla varia costituzione dei terreni attraversati dalle ondulazioni sismiche.

(1) Milne, *Seismology*. London, 1898, pag. 98.

Chimica. — *Stereoisomeria delle desmotroposantonine e degli acidi santonosi* [1]. Nota preliminare di A. ANDREOCCI, presentata dal Socio S. CANNIZZARO.

La costituzione chimica delle demotroposantonine e quella degli acidi santonosi, già dimostrate e confermate, permettono di prevedere, secondo la teoria di Van't Hoff e Le Bel, il numero delle possibili modificazioni stereoisomere relative, e di porre in rilievo qualche relazione dipendente dalla configurazione nello spazio. Tanto più che ora, colle due nuove desmotroposantonine [2], per ciascuno dei quattro noti acidi santonosi esiste una corrispondente forma desmotropica, o fenolica, della santonina.

Colla presente Nota preliminare intendo iniziare lo studio della stereoisomeria di queste sostanze, e quantunque preveda le grandi difficoltà che presenta l'argomento, pure confido che un giorno le desmotroposantonine e gli acidi santonosi potranno offrire un esempio evidente d'isomeria ottica per le sostanze cicliche a più carbonî asimmetrici.

Prima parlerò di alcune ricerche aventi lo scopo di stabilire se veramente nel gruppo della santonina esistono modificazioni attive risultanti dall'unione di due isomeri ottici non antipodi, cioè quelle modificazioni che io previdi e chiamai *racemi parziali*.

Io ritenni che l'acido desmotroposantonoso e la desmotroposantonina (fus. a 260°) se da un lato per il rispettivo numero di carbonî asimmetrici e per quello limitato degli isomeri conosciuti, trovavano, come lo trovano ancora, un posto fra le modificazioni isomeriche attive prevedibili dalla teoria, dall'altro canto, per alcuni fatti che allora enumerai, non esclusi la possibilità che le dette sostanze possano, come i racemi, risultare dall'unione di due stereoisomeri, però per compensazione dell'attività ottica di un solo dei carbonî asimmetrici in essi contenuti [3].

Più tardi il Dott. L. Francesconi per spiegare l'isomeria di due acidi tricarbossili $C^{10}H^{16}O^6$, derivati da successive trasformazioni dell'acido santonico, indicò per *racemo attivo* uno dei due isomeri [4].

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica farmaceutica di Catania.

[2] A. Andreocci e P. Bertolo, *Sopra due altre desmotroposantonine*. (R. Acc. dei Lincei. Rend. 1898, serie 5ª, vol. VII, 2° sem., pag. 318).

[3] A. Andreocci, *Sui quattro acidi santonosi e sopra due nuove santonine*. R. Acc. dei Lincei, Atti della classe di Scienze fisiche ecc., 1895, serie 5ª, vol. II. — *Sopra i quattro acidi santonosi*. Gazz. chim. ital., 1895, vol. 1°, pag. 558.

[4] L. Francesconi, R. Acc. Lincei, Rendiconti 1896, serie 5ª, vol. V, 2° semestre, pag. 220.

Ora ottengo un nuovo individuo cristallino per fusione e successiva cristallizzazione dall' alcool, o per semplice cristallizzazione, della miscela di due acetildesmotroposantonine $C^{15} H^{17} O^{2}$--O.$C^{2} H^{3}O$, stereoisomere, cristallizzate in prismi sottili, od in aghi, solubili colla stessa facilità nei solventi organici, però una destrogira e fusibile a 156° (1) e l' altra levogira e fusibile a 154° (2), e non appartenenti alla medesima coppia di antipodi, anche per la diversa intensità del loro potere rotatorio.

L' acetil derivato doppio che risulta da questa miscela è invece cristallizzato in grossi prismi lucenti, fonde a 142° ed è meno solubile in acido acetico dei suoi componenti.

È levogiro ed ha un potere rotatorio specifico corrispondente alla metà della somma algebrica di quello dei due acetil derivati che lo compongono, come risulta dalle seguenti osservazioni, fatte alla medesima temperatura, adoperando come solvente l' acido acetico glaciale.

	Concentrazione della soluzione per °/₀ (in vol.)	Potere rotatorio specifico per $(\alpha)_D^{24°}$
Acetil derivato fusibile a 154° (levogiro)	10,00	— 119°.0
Acetil derivato fusibile a 156° (destrogiro)	10,00	+ 93.6
Acetil derivato fusibile a 142° (doppio e levogiro) . .	7,76	— 12.8

Inoltre l' acetil derivato doppio sciolto in acido acetico diluito e trattato a caldo con una piccola quantità di acido solforico, per distacco dell' acetile, genera la miscela delle due desmotroposantonine dalle quali provengono i due acetilderivati componenti.

La detta miscela è facilmente separabile per cristallizzazione dall' alcool o dall' acido acetico; si depone prima la desmotroposantonina destrogira, fusibile a 260°, che è meno solubile (3) e poi l' altra levogira fusibile e 194° (4). Invece la racemo acetildesmotroposantonina inattiva (5), fusibile e 146°, risultante dall' unione delle due acetildesmotroposantonine antipode e fusibili a 154° (6), decomposta sia con idrato potassico (7) e sia, come più tardi ho voluto ripetere, con acido solforico in soluzione acetica, genera la racemo desmotro-

(1) A. Andreocci, Gazz. chim. ital., 1893, vol. II, pag. 475.

(2) A. Andreocci e P. Bertolo, R. Acc. dei Lincei, Rendiconti 1898, serie 5ª, vol. VII, 2° sem., pag. 318.

(3) A. Andreocci, Gazz. chim. ital., 1893, vol. II, pag. 469.

(4) A. Andreocci e P. Bertolo, loco citato.

(5) La soluzione di questo racemo in acido acetico glaciale e con una concentrazione al 10.328 per °/₀ (in vol.) è inattiva.

(6) A. Andreocci e P. Bertolo, loco citato.

(7) A. Andreocci e P. Bertolo, loco citato.

posantonina fusibile a 198°, che non si sdoppia per cristallizzazione dall' alcool, o dall' acido acetico.

Prescindendo dal fatto che l'acetildesmotroposantonina, fusibile a 142° è in soluzione attiva sul piano dolla luce polarizzata, io ritengo che questo composto cristallograficamente non sia nè la miscela di due semplici forme, e nemmeno sia analogo ai pseudoracemi, definiti recentemente da Kipping e Pope (1) come individui che hanno la stessa forma cristallina dei componenti e che fondono alla stessa temperatura di questi, quando sotto il punto di fusione non si trasformano in racemi. Piuttosto mi sembra che il detto acetilderivato doppio e attivo deve essere considerato per un *racemo parziale*, perchè, al pari dei racemi, risulta dalla fusione di quantità equimolecolari di due isomeri ottici, che quantunque non siano della medesima coppia di antipodi, pure deviano il piano della luce polarizzata in senso contrario e si rassomigliano perfettamente in alcune proprietà; inoltre, come i racemi, si distingue dai suoi componenti per l' apparenza cristallina del tutto diversa ed anche per il punto di fusione e la solubilità.

L' esistenza di questo derivato acetilico doppio e attivo, anche se cristallograficamente non potrà considerarsi per un racemo, merita attenzione perchè ci mostra che sono possibili nel gruppo della santonina, delle forme *doppie attive* ben definite, oltre le *doppie inattive* che generalmente si prevedono dalla teoria (2).

Però con ciò oggi non intendo voler dimostrare che quei derivati della santonina da me ritenuti, con molta riserva, anche per racemi parziali, lo sono realmente, nè tanto meno voglio sostenere che la forma doppia attiva può generarsi in tutti i casi prevedibili e trasmettersi, come la racemia, ad una serie di termini ottenuti per successive modificazioni intorno ai carbonî asimmetrici. Anzi la formazione dell' acetildesmotroposantonina doppia e attiva, risultante da due isomeri ottici così simili, e la sua scissione in due desmotroposantonine, fa supporre che tal genere di forme doppie sia un caso poco frequente.

Io confido che cristallograficamente si potrà decidere se una data sostanza attiva ed a più carbonî asimmetrici, quando non è noto il suo rispettivo antipode, è una forma doppia, o semplice.

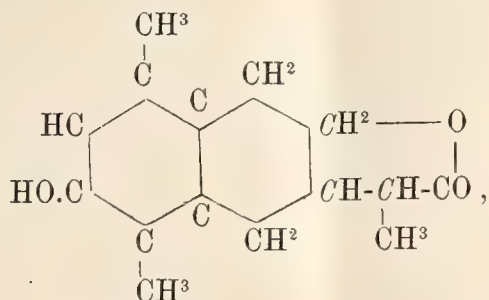
Intanto io seguiterò a considerare l' acido desmotroposantonoso, la desmotroposantonina (fus. a 260°) ed i loro derivati come forme semplici, finchè non sarà dimostrato il contrario, anche per rendere momentaneamente più

(1) *Ueber Racemie und Pseudoracemie* (Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie von P. Groth. B. XXX, H. V, S. 443).

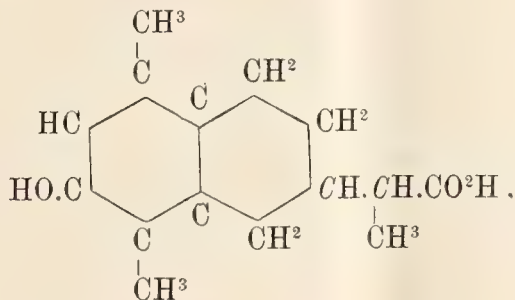
(2) Mi riservo di ritornare su questo argomento, quando potrò corredarlo della parte cristallografica e di altre ricerche sul miscuglio e non equimolecolare, dei due componenti, che costituiscono l'acetildesmotroposantonina fusibile a 142°, cristallizzato frazionatamente in vari solventi.

facile il còmpito, che mi son proposto di svolgere relativamente alla stereoisomeria delle desmotroposantonine e degli acidi santonosi.

La costituzione delle desmotroposantonine,

```
          CH3
          |
          C        CH2
        /   \  C  /   \
   HC /       \ /       \ CH2 ——— O
     |         |         |        |
 HO.C \       / \       / CH-CH-CO ,
        \   /  C  \   /     |
          C        CH2      CH3
          |
          CH3
```

contenendo tre carbonî asimmetrici e non simili, fa prevedere 8 isomeri ottici attivi, formanti 4 coppie di antipodi e le rispettive 4 modificazioni racemiche sdoppiabili.

Siccome nella riduzione delle desmotroposantonine il carbonio asimmetrico legato all'ossigeno lattonico, si trasforma in metilene, così avremo un numero più limitato d'isomeri per gli acidi santonosi,

```
          CH3
          |
          C        CH2
        /   \  C  /   \
   HC /       \ /       \ CH2
     |         |         |
 HO.C \       / \       / CH.CH.CO2H .
        \   /  C  \   /     |
          C        CH2      CH3
          |
          CH3
```

corrispondendo a 2 carbonî asimmetrici, 4 isomeri attivi, formanti due coppie di antipodi, e 2 modificazioni racemiche sdoppiabili.

Come si vede in teoria, il numero degli acidi santonosi possibili è la metà di quello delle possibili desmotroposantonine.

Invero se dei tre carbonî asimmetrici delle desmotroposantonine, si rappresentano con A e B, quelli che si conservano tali negli acidi santonosi; con C quello che invece diviene simmetrico, e se si ritiene A più attivo di B; e se con i segni + e — si indica il senso della deviazione (destra o sinistra) che ogni aggruppamento asimmetrico esercita isolatamente sul piano della luce polarizzata, sembrerebbe dal seguente quadro, che ogni acido santonoso dovesse derivare dalle due desmotroposantonine verticalmente sovrastanti. Cosa che non può per ora asserirsi, perchè per ognuno dei tre acidi santonosi attivi si conosce soltanto una corrispondente desmotroposantonina,

che è poi di segno contrario, ed inoltre non si sa se i carbonî A e B conservano negli acidi santonosi il segno che avevano nelle corrispondenti desmotroposantonine.

Quadro delle possibili modificazioni isomeriche attive delle desmotroposantonine e degli acidi santonosi.

	Modificazioni aventi il carbonio A dello stesso segno del carbonio B			Modificazioni aventi il carbonio A di segno contrario al carbonio B		
Desmotroposantonine.		1	2		5	6
	I coppia	+ A + B + C	— A — B — C	III coppia	+ A — B + C	— A + B — C
		3	4		7	8
	II coppia	+ A + B — C	— A — B + C	IV coppia	+ A — B — C	— A + B + C
Acidi santonosi.		1	2		3	4
	I coppia	+ A + B	— A — B	II coppia	+ A — B	— A + B

Si conoscono i seguenti acidi santonosi:

Acido destrosantonoso (fus. a 180°) con potere rot. spec. in alcool, per $(\alpha)_D$ di + 74°.8

Acido levosantonoso (fus. a 180°) con potere rot. spec. in alcool per $(\alpha)_D$ di — 74°.4.

Acido racemosantonoso (fus. a 153°).

Acido desmotroposantonoso (fus. a 175°) con potere rot. spec. in alcool, $(\alpha)_D$ di — 53°.3.

Gli acidi santonosi destro e levo, essendo identici in tutte le proprietà, eccettuato il senso col quale deviano il piano della luce polarizzata, ed avendo un potere rotatorio maggiore dell' acido desmotroposantonoso, devono corrispondere alle modificazioni 1 e 2, che nel quadro formano la I^a coppia di acidi santonosi antipodi, cioè quelle che hanno il carbonio A dello stesso segno del carbonio B. L' acido racemo santonoso, che dai due detti acidi deriva, naturalmente è la modificazione inattiva sdoppiabile di questa stessa coppia di antipodi.

L' acido desmotroposantonoso sarebbe l' unico rappresentante della II^a coppia di antipodi, cioè corrisponderebbe alla modificazione 4, che ha il car-

bonio A di segno contrario al carbonio B, nella quale prevale l' attività di A, che abbiamo supposto maggiore di quello del carbonio B.

Quindi per completare la serie degli acidi santonosi stereoisomeri relativi mancherebbe l' acido destro desmotroposantonoso, corrispondente alla modificazione 3, ed il rispettivo racemo.

Si conoscono le seguenti desmotroposantonine:

Levodesmotroposantonina (fus. a 194°) con $(\alpha)_D$ = a — 139°.0
Isodesmotroposantonina (fus. a 189°.90) con $(\alpha)_D$ = a + 128°.8.
Racemo desmotroposantonina (fus. a 198°).
Desmotroposantonina (fus. a 260°) con $(\alpha)_D$ = a + 110°.3.

Dalla I^a^ deriva l'acido destrosantonoso (fus. a 180°); dalla II^a^ l' acido levosantonoso (fus. a 180°); dalla terza l' acido racemosantonoso (fuc. a 153°) e dalla IV^a^ l' acido desmotroposantonoso (fus. a 175°).

Non è ancora il caso di precisare a quale delle 8 modificazioni attive possibili corrisponde ciascuna delle tre desmotroposantonine attive; poichè mancano molti termini e sopratutto è necessario di stabilire se l' isodesmotroposantonina è l' antipode della levodesmotroposantonina, oppure questi due isomeri appartengono a due coppie di antipodi. In favore della prima supposizione abbiamo i seguenti fatti: 1°. I due isomeri per riduzione conducono a due acidi santonosi antipodi; 2° per azione del joduro di etile e dell' alcoolato sodico danno due etil desmotroposantonine antipodi; 3° coll' anidride acetica formano due acetil derivati antipodi, il di cui racemo saponificato conduce ad una desmotroposantonina inattiva. Invece in favore della seconda supposizione abbiamo, come è già stato notato, che fra le due desmotroposantonine esistono differenze, invero piccole: nel punto di fusione, nell' apparenza cristallina e nell' intensità del potere rotatorio.

Sperando di potere decidere questa questione, ho voluto riottenere le due desmotroposantonine dai loro acetilderivati, ricristallizzati più volte dall' acido acetico glaciale (ove sono molto solubili) per averli perfettamente puri; ed ho creduto conveniente per distaccare l' acetile di non usare l' idrato potassico che apre anche il legame lattonico, ma invece impiegare una piccola quantità di acido solforico in soluzione idroacetica [1]; acciocchè l' idrolisi avvenga nel modo più blando, possibilmente senza determinare lo spo-

[1] Alla soluzione di 1 p. di acetilderivato in 8 p. di acido acetico glaciale e bollente, poi diluita con 16 p. di acqua e riscaldata all'ebollizione, si aggiunge 1 p. di acido solforico (90 %) diluito con p. 2 di acqua e p. 2 di acido acetico glaciale. Si continua a fare bollire per alcuni minuti. Per raffreddamento si depone la più gran parte della desmotroposantonina prodotta, ed il rimanente si può separare per neutralizzazione del liquido con carbonato sodico.

stamento dei gruppi intorno ai carbonî asimmetrici, che per l'appunto fanno tutti parte dell'anello lattonico.

Anche usando queste precauzioni, ho riottenuto le desmotroposantonine coi loro punti di fusione primitivi; cioè quella destrogira, che viene dall'acetil isodesmotroposantonina, fonde a 189-90° e l'altra levogira, che proviene dall'acetil levodesmotroposantonina, fonde a 194-95°. Per cui si potrebbe supporre che le due desmotroposantonine non appartengono alla medesima coppia di antipodi, quantunque generino due acetil-derivati e dai medesimi si riottengono che sono, eccettuato il senso del potere rotatorio, assolutamente identici in tutte le proprietà. Però intendo pronunciarmi in proposito quando avrò potuto rideterminare il potere rotatorio delle due desmotroposantonine ad una temperatura superiore a quella dell'ambiente usando un tubo molto lungo per compensare la piccola solubilità di queste sostanze nei solventi, e quando le mie conclusioni saranno anche confermate dallo studio cristallografico.

Geologia. — *Le roccie trachitiche degli Astroni nei Campi Flegrei. I. Roccie del cratere scoriaceo centrale.* Nota di Luigi Pampaloni, presentata dal Corrispondente De Stefani.

Le roccie trachitiche, degli Astroni nei Campi Flegrei, sono state generalmente poco studiate. Per opera dello Scacchi [1] e del Rosenbusch [2] primieramente, ed ultimamente dell' ing. Dell' Erba [3] si conoscono alcuni caratteri riguardanti in special modo l'intima costituzione di quelle fra esse appartenenti alla corrente laterale, ma il campo di studio per tali ricerche rimane ancora abbastanza esteso.

In questi ultimi tempi mi furono dal sig. prof. C. De Stefani dati ad esaminare alcuni campioni di roccie della suddetta località, ed oggi appunto mi accingo ad esporre quelle conclusioni che ho potuto ritrarre.

Gli esemplari comunicatimi, appartengono in parte alla corrente lavica laterale, che si vede sotto i tufi nel lato orientale del cratere esplosivo, ed in parte al cratere scoriaceo centrale, e di queste alcune varietà sono più compatte, altre sono completamente bollose. Comincerò il mio studio da quelle del cratere centrale.

Varietà più compatta. — Il colore di questa roccia è bruno intenso, quasi nero. Esternamente è poco compatta, porosa e scoriacea, mentre all'interno si dimostra un poco più compatta e cristallina. La sua struttura è irregolare. Sparsi nella massa si trovano dei bei cristalli bianchi, opachi,

(1) *Memorie geologiche sulla Campania,* Napoli 1849, pag. 236.

(2) *Mikrosk. Physiogr. d. Mineralien und Gesteine,* Stuttgart 1892, ed. III, vol. II, pag. 750-766.

(3) *Sanidinite sodalito-pirossenica di S. Elmo,* pag. 183.

vetrosi, di forma tabulare e di grandezza variabile (feldispati), altri pure tabulari, piccoli, lucenti (biotite), altri infine assai minuti, di color verde scuro (augite).

Le sezioni di detta roccia, esaminate per trasparenza, presentano una massa grigia nella quale si trovano sporadiche alcune plaghe incolore, a contorno generalmente netto, dovute a sezioni di cristalli di feldispato, altre più piccole nere, in forma generalmente quadratica, dovute a magnetite, altre poche giallo-scure, trasparenti, allungate, listiformi di biotite, altre infine colorate in verde, di augite.

Sotto il microscopio polarizzante si scorge abbondantissima la massa vetrosa, colorata in bruno giallastro da innumerevali globuliti scuri e da particelle di ematite o di limonite. Con un maggiore ingrandimento questa massa si risolve in tanti microliti prevalentemente feldispatici, i quali per essere allineati l'uno di fianco all'altro in diverse serie e sistemi più o meno paralleli fra loro, rivelano la struttura fluidale della massa. Questi microliti sono aciculari, allungati; qualche volta, bensì raramente, sono fra loro raggruppati in foggie diverse, talora incurvandosi, talora disponendosi in forme più o meno arborescenti ed in fasci irradianti con quella speciale struttura chiamata da Washington (1) « keraunoide ». Essi ordinariamente misurano in lunghezza circa 7 centesimi di millimetro. Aggiungerò di più che molti di essi sono di sanidina, altri di plagioclasio. Non accennerò per ora ai caratteri che differenziano gli uni dagli altri, riserbandomi d' intrattenermi estesamente sopra questo punto, allorchè tratterò dei feldispati come minerali di prima consolidazione. I piccoli aciculi troncati ed i bastoncelli di augite generalmente allungati si riconoscono facilmente per il loro colore verde più o meno chiaro, e per la loro estinzione. Inoltre numerosissime lacune, talora più grandi, talora più piccole, corrispondenti a sezioni di pori gassosi, rendono l'aspetto della roccia ancora meno omogeneo; notevolissimo poi è il fatto che molto spesso la polvere bruna di limonite riveste i bordi interni di dette lacune.

Nelle sezioni della roccia appariscono appunto in alcuni tratti delle piccole plaghe più vivamente colorate in bruno che non nel rimanente. Ora queste plaghe non sono altro che sezioni tangenziali di pori gassosi, non nella loro cavità, ma nel loro rivestimento limonitico. Circa poi alla presenza di questa grande quantità di limonite nei pori della roccia, mi pare che si debba ricercare la spiegazione nell'idratazione della magnetite, o forse in fenomeni attinenti alle globuliti scure che inquinano la massa. Infatti l'acqua penetrando nei pori della roccia quando questa era ancora ad elevata temperatura, può avere trasformato la magnetite in ossido idrato. Una tale fre-

(1) *Italian petrological Sketches*, I (Journal of Geology, n. 5, July-August 1896, Chicago. Press.).

quenza di limonite avvalora la supposizione che il minerale di ferro sparso nella massa sia magnetite e non ferro titanato come si potrebbe anche supporre.

Tutto ciò circa i microliti sparsi nella massa fondamentale. Relativamente poi ai cristalli di prima consolidazione, abbiamo in primo luogo abbondante la magnetite sotto forma di minutissimi globuli e cristalletti generalmente quadratici. Poche masse informi di color rosso aranciato indicano invece trattarsi di ematite.

Le plaghe incolore sparse qua e là sono dovuto alcune a *feldispati monoclini*, altre a *feldispati triclini.*

Dei primi è la *sanidina* che si rivela, facilmente riconoscibile pel suo colore bianco sporco, per la sua estinzione che in quasi tutti i cristalli da me esaminati varia dai 4° ai 9°, e solamente in due cristalli è giunta ad un massimo di 12°. Questa estinzione in parecchi cristalli non avviene uniformemente, ma essi presentano delle linee di estinzione che si spostano verso destra o verso sinistra col girare della preparazione. I colori d' interferenza non molto vivaci passano dal bianco pel grigio all' azzurro; i cristalli, hanno un contorno di solito regolare, alcuni però assumono ai loro bordi un apparenza frangiata. Le linee di sfaldatura sono parallele fra loro e parallele ai lati più lunghi, qualche volta tagliate ad angolo da altre linee di sfaldatura. Vi abbondano le inclusioni, specialmente di magnetite che in qualche cristallo si trova parzialmente trasformata in limonite, di augite, di apatite e di vetro, e generalmente queste inclusioni sono ordinate secondo date linee. Frequenti assai sono i geminati secondo la legge di Manebach (001).

Fra i feldispati triclini è un poco più difficile la distinzione, se si tratta cioè di feldispati più ricchi in sodio, o di feldispati più ricchi in calcio; generalmente i cristalli ne sono allungati, a contorno assai irregolare per frequenti corrosioni, privi di pleocroismo, pure essi con poco rilievo. I loro colori d' interferenza sono in generale vivaci, massimamente nelle varietà più ricche di calcio, di cui specialmente abbonda la roccia. In questi ultimi l' estinzione dei colori avviene a 36°-37°, e questa cifra indica che il minerale in questione è nella serie più alta fra i calciferi, è cioè *Anortite.* Fra questi cristalli di anortite ve ne sono alcuni con marcata struttura polisintetica, per cui i grossi cristalli di anortite sembrano, a nicol incrociati, costituiti da tante liste parallele, diversamente illuminate e colorate. Ho riscontrato un unico cristallo tagliato parallelamente alla base, il quale presenta un accenno di struttura zonale. Anche in questi cristalli abbondano le inclusioni, specialmente di augite e di magnetite.

Però i cristalli di anortite non sono gli unici fra i plagioclasi che si trovano nella roccia; anche la serie dei feldispati più ricchi in sodio è rappresentata, ma non così abbondantemente come l' altra dei più ricchi in calcio. Questi feldispati sodiferi, per avere un angolo molto piccolo appartengono

con molta probabilità al gruppo dell' *Oligoclasio*. Frequentissime sono le geminazioni fra cui principali quella dell' albite moltiplicatamente ripetuta e del periclino. Circa poi la diffusione dei feldispati nella roccia, dirò che la media dei cristalli di plagioclasio è data da circa l' 80 % per l' anortite ed il 30 % per l' oligoclasio. Finalmente non rara è qualche compenetrazione di sanidina nel plagioclasio e specialmente nell' anortite.

I cristalli di *Pirosseno* pure essi abbondanti nella roccia, si riconoscono facilmente pel loro colore verde-scuro, lo scarsissimo pleocroismo, il poco rilievo, la debolissima sagrinatura, e principalmente l' angolo d' estinzione abbastanza grande (40° circa), che varia di poco a seconda della maggiore o minore purezza dei campioni. I colori d' interferenza sono vivaci, specie nelle varietà più scure, e passano dal giallo al rosso o dal rosso all' azzurro. Questi cristalli di pirosseno presentano due serie di linee di sfaldatura ad angolo pressochè retto, e la loro estinzione avviene, come sopra ho detto, ad angolo di 40° dalla zona di allungamento. Il loro contorno è generalmente poco netto, essendo i bordi del minerale frequentemente coperti da magnetite, la quale poi vi si riscontra come inclusione, unita al plagioclasio ed all' apatite. In alcuni cristalli di augite l' esame a nicol incrociati ci dà una chiara idea della distribuzione zonale del minerale attorno ad un nucleo centrale. Le varie zone sono in generale uniformemente colorate; in qualche caso però le parti periferiche possono assumere un colore più cupo di quelle centrali; per contro il pleocroismo è costante in ogni parte del minerale, mentre i colori di interferenza variano col variare delle zone. Frequenti sono i geminati.

L' augite adunque è l' unica varietà di pirosseno che io abbia riscontrato. Il Rosenbusch (¹) oltre che nelle trachiti di Cuma, aveva indicato l' akmite e la aegirina anche per quelle degli Astroni, reperibili ora sotto forma di minuti cristalli sparsi nella massa, ora sotto forma di tante zone periferiche includenti un nucleo centrale di augite; però il pleocroismo di queste sostanze così forte rispetto a quello dell' augite, e l' angolo di estinzione intermedio fra questa e l' anfibolo, mi avrebbero dato, qualora vi fossero state, indizio sicuro per il loro completo riconoscimento.

Al pirosseno tien dietro l' anfibolo, di color verde chiaro, nella scala però del giallo. Ha anch' esso colori d' interferenza vivacissimi, più che nell' augite, da cui inoltre si distingue e per un marcatissimo pleocroismo, e per l' angolo di estinzione assai minore in quanto che non supera i 15°.

Un unico cristallo a sezione quadratica incoloro, io potei riconoscere per *Sodalite*, mentre più frequente è l' hauyna. Questa si presenta in cristalli che variano per gradi dal turchino cielo al celeste pallido, ora a contorni ben netti, ora smussati ai lati, ora in forma di veri e propri globuli.

(¹) Loc. cit., pag. 750.

Questi cristalli in parte si comportano come monometrici, sono cioè isotropi, in parte sembrano comportarsi anisotropicamente, vale a dire, a nicol incrociati non si estinguono completamente, ma la luce passa lungo certe date linee corrispondenti a punti ove si trovano le inclusioni. Queste sono abbondanti e di due specie, le une di magnetite si distinguono anche con un ingrandimento abbastanza debole, le altre gassose, generalmente arrotondate e piccolissime, hanno bisogno di un forte ingrandimento per potere esser vedute. Ora appunto a queste inclusioni si deve, secondo gli Autori, la comparsa dell' ora accennata anomalia ottica. Il Rosenbusch [1] descrive il fenomeno, e dice che in prossimità delle inclusioni gassose comparisce una locale doppia rifrazione, per cui, a nicol incrociati, si ha la croce nera caratteristica detta « Croce di Brewster ». L' Autore sopra citato attribuisce la comparsa di un tal fenomeno alla pressione esercitata dal gas racchiuso nei pori gassosi.

Un ultimo minerale è la *Biotite* di color bruno più o meno intenso, generalmente in laminette allungate, fittamente striate nel senso della loro lunghezza, a fortissimo pleocroismo e rilievo molto marcato.

Varietà più scoriacea, bruna. — Le differenze fra questa roccia e quella precedentemente descritta consistono essenzialmente nei caratteri macroscopici. Gli elementi cristallini visibili ad occhio nudo, cioè le plaghe lineari di feldispato, le listerelle nere, lucenti di biotite, ed i cristalletti verdi di augite e di orneblenda, sono meno abbondanti, e non raggiungono quasi mai la grandezza di quelli della varietà più compatta. D'altra parte l' orientazione secondo date linee della maggior parte di questi elementi rende visibile anche ad occhio nudo la struttura fluidale della roccia. Il suo colore è nell' insieme bruno cenerino, quindi un po' più chiaro di quello della roccia precedente. La porosità e la poca compattezza della massa dánno ad essa un aspetto scoriaceo oltremodo visibile. Ho provato a fare di questa roccia alcune sezioni per esaminarle al microscopio, ma si disgregano completamente sotto l' azione dello smeriglio anche il più fino; perciò ho dovuto contentarmi di esaminare sotto il microscopio la polvere. Da questo esame ho potuto riscontrare che i suoi costituenti sono i medesimi di quella descritta antecedentemente. La parte vetrosa è abbondantissima; minore è, relativamente alla roccia precedente, il numero dei feldispati monoclini, quasi uguale quello dei triclini, il cui angolo d' estinzione è sempre molto grande, superiore cioè ai 30°, e quindi riferibili tutti ad anortite. Ho potuto notare quattro cristalletti molto piccoli, quadratici, appartenenti al sistema monometrico, misuranti forse 3 centesimi di millimetro, di sodalite, mentre non ho riscontrata la presenza dell' hauyna. Il pirosseno è sempre molto abbondante, come pure la botite, un po' meno l' anfibolo, mentre invece la magnetite e la limonite

[1] Loc., cit., vol. I, pag. 324-325.

sono in quantità oltremodo grande, così da esser considerati come gli elementi più diffusi e più abbondanti nella roccia.

Varietà molto scoriacea, cinereo chiara. — Questa è somigliantissima alla precedente, sotto tutti gli aspetti, sia macroscopico, sia microscopico. Solo il suo colore è un poco più chiaro, e ciò è dovuto alla presenza di una minor quantità tanto di magnetite quanto di limonite. Anche di questa roccia ho esaminate soltanto le polveri, e l'unica differenza apprezzabile fra essa e le altre due è data dalla completa assenza della sodalite e dell'hauyna. Ciò forse è spiegabile, considerata la piccola quantità e la poca diffusione del minerale. Credo però che anche questa roccia non ne sia priva, e che il non averla riscontrata dipenda esclusivamente dal non aver potuto fare un esame completo di essa.

Geologia. — *Il Raibliano del monte Iudica nella provincia di Catania.* Nota di Bindo Nelli, presentata dal Corrispondente De Stefani.

I fossili di questo terreno erano conosciuti già da antico tempo. Fin dal 1840 (Calcara, *Monografia dei gen. Claus e Bulimo coll' aggiunta di alcune nuove specie di conchiglie siciliane*) e dal 1845 (Calc., *Cenno sui molluschi viventi e fossili della Sicilia*), il Calcara aveva descritto e figurato due Ammoniti delle quali una sembra essere il *Trachyceras Aon* Münst., come provenienti dal calcario secondario di Catenanova. Posteriormente l' illustre G. G. Gemmellaro in una sua Memoria (*Sopra taluni organismi fossili del Turoniano e nummulitico di Iudica*, Catania, 1860), descriveva altri, fossili del monte Iudica come provenienti dal Turoniano.

Pochi anni sono il prof. Olinto Marinelli raccoglieva nei terreni di monte Scalpello e S. Nicoletta nella medesima zona geologica dei monti Iudica, Torcisi e Catenanova i fossili dei quali darò ora alcuni cenni preliminari:

Trachyceras plicatum Calc. = *Tr. affine.* Parona (*Studio monografico della fauna raibliana di Lombardia* [1889]). — Specie propria anche del Raibl. lombardo. — Debbo notare che nel calcario secondario di Catenanova è descritto dal Calcara l'*Ammonites Scordiae*, il quale sembra corrispondere perfettamente al *Tr. Aon* Münst.

Trachyceras n. sp.

Avicula gea d' Orb.

Comune a S. Cassiano e negli strati a *Cardita*, nel Raibliano di Lombardia e nella Punta delle Pietre Nere in provincia di Foggia.

Cassianella gryphaeata Münst.

Nel Raibliano di Lombardia e a S. Cassiano.

Cassianella decussata Münst.

Nel Raibliano di Lombardia e a S. Cassiano.

Posidonomya sp. ind. forse identica ad una specie descritta dal Parona.

Halobia lucana De-Lorenzo.

Nei dintorni di Lagonegro in Basilicata.

Halobia sicula Gemm.

Nei calcari a noduli di selce del Trias della parte occidentale della Sicilia, pei dintorni di Lagonegro.

Leda Biondii (Gemmellaro) = *Leda percaudata* Gümbel.

Comune nel Raibliano della Lombardia, nella Punta delle Pietre Nere e nell' Infralias della Spezia e altrove.

Myophoria vestita Alberti.

Negli strati di Gausingen (Argovia), nella parte superiore degli strati di Raibl nelle Alpi (*Torer Schichten*), in quelli di Heilingenkreuz e nei calcari di Opponitz. È anche comune nella parte superiore del Trias dell' Andalusia e nella Punta delle Pietre Nere.

Myophoria Goldfussi Alberti.

Nel Trias delle Alpi.

Trigonodus n. sp.

Lucina Gornensis Parona.

Nel Raibliano di Gorno in Valseriana in Lombardia.

Coenothyris 3 n. sp.

Gli strati con selce ad *Halobia,* come risulterà dalla descrizione geologica che farà il prof. O. Marinelli, si alternano in mezzo agli schisti ed alle brecciole calcaree contenenti gli altri fossili ed appartengono alla medesima età di questi. I fossili da me indicati, gran parte dei quali sono già stati descritti dal Di-Stefano nella Punta delle Pietre Nere in provincia di Foggia, rispondono pure perfettamente a quelli descritti dal Parona nel Raibliano di Lombardia. Per ciò questi terreni, compreso gli strati ad *Halobia,* rispondono al Raibl., cioè alla zona a *T. Aon*, e si conferma anche l'attribuzione al Raibliano già stabilita dal Di-Stefano per gli strati delle Pietre Nere. È probabile che rispondano al Raibliano anche una parte degli strati ad *Halobia* della Basilicata descritti dal De-Lorenzo come una gran parte di quelli della Sicilia occidentale e quelli indicati nelle vicinanze di Alghero in Sardegna.

Se alla scoperta di questi strati raibliani nei monti di Iudica aggiungiamo quella degli strati titonici, i cui fossili ho altrove indicato, fatta nello stesso luogo dal prof. Olinto Marinelli, possiamo farci un concetto dell' importanza delle scoperte messe in luce dal giovane geologo in questa regione della Sicilia, le cui più antiche notizie dei valenti geologi siciliani si erano recentemente perdute.

P. B.

// RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 febbraio 1899.

E. Beltrami Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Dimostrazione semplice della sviluppabilità in serie di Fourier di una funzione angolare finita e ad un sol valore.* Nota del Socio straniero W. Voigt.

È nota la dimostrazione di Laplace (1) della sviluppabilità secondo funzioni sferiche di una funzione della direzione uscente da un punto fisso; essa riposa sopra una proprietà della funzione potenziale Newtoniana di uno sferoide omogeneo, infinitamente poco differente da una sfera. Questa proprietà è espressa dall' equazione:

$$\overline{V} + 2a \overline{\frac{\partial V}{\partial r}} + \frac{4\pi}{3} a^2 = 0 , \tag{1}$$

in cui V indica la funzione potenziale dello sferoide, a il raggio di una sfera ad esso infinitamente vicina, r la distanza dal centro della sfera, e le quantità sopralineate si riferiscono alla superficie dello sferoide; la densità della massa contenuta nello sferoide è posta eguale all' unità.

Il processo dimostrativo consiste nel porre il raggio R dello sferoide sotto la forma

$$R = a(1 + \varepsilon F) , \tag{2}$$

in cui F denota una funzione qualsiasi, ma finita e ad un sol valore, della direzione uscente dal centro della sfera, ed ε una costante infinitesima, e nello

(1) *Mécanique céleste,* II, cap. 3, n. 10.

sviluppare poscia, nell' espressione di V, il valore reciproco della distanza fra un elemento di massa dello sferoide ed il punto variabile secondo potenze decrescenti di r. Con ciò l' equazione di sopra si riduce immediatamente ad un' espressione della funzione F in una serie che procede per funzioni sferiche.

Nasce ora spontanea l' idea di seguire nel caso del piano e del potenziale logaritmico la medesima via tenuta da Laplace per lo spazio e per il potenziale Newtoniano, al fine di giungere così ad una dimostrazione semplice — ed in ogni caso non inutile dal punto di vista didattico — della sviluppabilità di una funzione angolare in serie di Fourier. Se non che si cade per questa via nella difficoltà che la formola di Laplace può bensì, come ha dimostrato l' autore stesso, venire estesa a potenziali elementari, che sieno proporzionali a qualsiasi potenza della distanza, ma non è applicabile al potenziale logaritmico. Mi propongo ora di mostrare che per quest' ultimo vale una relazione di carattere un poco diverso, la quale permette nel piano la medesima applicazione, che viene offerta dalla relazione di Laplace nello spazio.

A questo scopo consideriamo un' area occupata da materia di densità ϱ, il cui contorno differisca infinitamente poco da una circonferenza di raggio a (circonferenza contigua) in modo che il raggio vettore che va ad esso venga rappresentato dalla formola (2) col medesimo significato dei simboli che vi compaiono. Allora la funzione potenziale logaritmica di quell' area materiale sopra di un punto esterno alla distanza r dal centro della circonferenza può venire considerata come la somma delle funzioni potenziali del cerchio e della striscia infinitamente sottile che rimane, ove si immagini tolto il cerchio stesso e che avrà densità ora positiva ora negativa, ossia si potrà porre:

$$V = - \pi \varrho a^2 \operatorname{logn}(r^2) - \varepsilon \varrho a \int F \operatorname{logn}(e^2)\, ds , \tag{3}$$

in cui ds denota l' elemento lineare della circonferenza contigua, ed e la sua distanza dal punto variabile; infatti la striscia essendo infinitamente sottile, può venire sostituita da una distribuzione lineare. La (3) vale per qualsiasi posizione del centro del cerchio a, sempreché il suo contorno si scosti infinitamente poco dal contorno effettivo del disco.

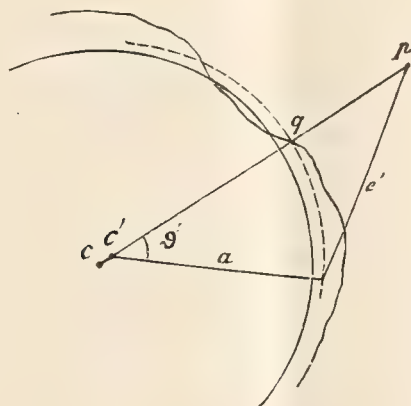
Nel seguito noi attribuiremo però un valore invariabile al raggio a e per il momento anche una posizione speciale c' al centro, in modo che la circonferenza contigua tagli il raggio vettore r nel medesimo punto, ove lo taglia il contorno del disco. Nella figura la circonferenza a tratto continuo corrisponde alla posizione qualsiasi del centro c, quella punteggiata alla posizione ora specializzata del centro c'; p indica il punto variabile, e mentre la distanza cp è eguale ad r, la distanza $c'p$ è indicata con r'. In tali ipotesi si ha pure:

$$V = - \pi \varrho a^2 \operatorname{logn}(r'^2) - \varepsilon \varrho a \int F' \operatorname{logn}(e'^2)\, ds , \tag{4}$$

in cui F′ è l'espressione corrispondente ad F, per il centro c', ed

$$e'^2 = a^2 + r'^2 - 2ar' \cos \vartheta' .$$

Per mezzo di una derivazione rispetto ad r', che corrisponde ad uno spostamento del punto p parallelamente ad r', ovvero ad r, si ottiene dalla (4):

$$\frac{\partial V}{\partial r'} = -\frac{2\pi\varrho a^2}{r'} - 2\varrho\varepsilon a \int F' \frac{r' - a\cos\vartheta'}{e'^2} ds . \tag{5}$$

All'incontro col derivare rispetto ad a, tenendo costante sia $\pi a^2 \varrho$, sia $a\varrho F' ds$ — ciò che corrisponde ad una dilatazione omogenea del disco, rimanendo costante la massa, a partire dal centro c' e del valore $\frac{da}{a}$ — si ottiene:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = -2\varepsilon\varrho a \int F' \frac{a - r'\cos\vartheta'}{e'^2} ds . \tag{6}$$

Se ora si fa muovere il punto p sopra r' sino a cadere in q, nell'intersezione col contorno del disco, si ha $r' = a$ e le due equazioni precedenti danno per differenza:

$$\overline{\frac{\partial V}{\partial r'}} - \overline{\frac{\partial V}{\partial a}} + 2\pi\varrho a = 0 . \tag{7}$$

Adesso potremo scambiare $\frac{\partial V}{\partial r'}$ con $\frac{\partial V}{\partial r}$, poichè le direzioni di r ed r' coincidono fra di loro, ed inoltre potremo, senza errore sensibile, considerare $\frac{\partial V}{\partial a}$ come l'effetto di una dilatazione omogenea a partire dal centro c, giacchè questa differisce da quella, che abbiamo prima considerata, solo per uno spostamento parallelo ad r e di valore $(cc')\frac{da}{a}$, che è infinitesimo del se-

condo ordine. In questo modo la formola è indipendente da ogni ipotesi speciale sulla posizione del centro c', e sussiste per una posizione qualsiasi c. Cosicchè otteniamo finalmente:

$$\text{(8)} \qquad \frac{\overline{\partial V}}{\partial r} - \frac{\overline{\partial V}}{\partial a} + 2\pi a \varrho = 0,$$

donde il teorema che per un punto sul contorno del disco di densità ϱ, la componente $\frac{\overline{\partial V}}{\partial r}$ della forza verso il centro del cerchio contiguo, più la variazione $\frac{\overline{\partial V}}{\partial a}$ della funzione potenziale per una contrazione omogenea del disco rispetto al centro c del cerchio contiguo è eguale al raggio a del cerchio moltiplicato per $2\pi\varrho$ e preso col segno negativo.

Per maggior chiarezza e per evitare ambiguità preferiamo parlare di contrazione anzichè, come prima, di dilatazione, la quale ultima farebbe entrare il punto p nell'interno del disco. Infatti tutta la nostra deduzione riguarda la funzione potenziale su di un punto p esterno, e se per la deformazione p dovesse penetrare nell'interno del disco, V sarebbe sempre dato dalla stessa funzione, cioè dovrebbe interpretarsi come la continuazione analitica della funzione potenziale esterna e non già come la funzione potenziale sopra un punto interno.

Sostituiamo ora nell'equazione di partenza (3) in luogo di logn (e^2) la nota serie:

$$\text{logn}\,(e^2) = \text{logn}\,(r^2) - 2\sum_1^\infty \frac{1}{h}\left(\frac{a}{r}\right)^h \cos h\,(\varphi - \psi),$$

in cui φ indica l'angolo di r con una direzione fissa, e ψ l'angolo con questa del raggio a diretto verso ds. F è da considerarsi ora in (3) come funzione di ψ, e V come funzione di r e φ. Ponendo per brevità:

$$\text{(9)} \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\psi) \cos h\,(\varphi - \psi)\,d\psi = G_h(\varphi),$$

V prende la forma:

$$\text{(10)}\ V = -\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\, G_0(\varphi)\right)\pi\varrho a^2 \,\text{logn}\,(r^2) + \pi\varepsilon\varrho a^2 \sum_1^\infty \frac{1}{h}\left(\frac{a}{r}\right)^h G_h(\varphi).$$

Ne segue immediatamente:

$$\text{(11)} \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = -\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\, G_0(\varphi)\right)\frac{2\pi\varrho a^2}{r} - \pi\varepsilon\varrho a \sum_1^\infty \left(\frac{a}{r}\right)^{h+1} G_h(\varphi).$$

Inoltre poichè nella derivazione rispetto ad a deve rimanere costante sia la massa $\pi\varrho a^2$ del cerchio contiguo, sia la massa di ogni parte della

striscia di contorno, vicina all'elemento ds, cioè $\varrho a \mathrm{F} ds = \varrho a^2 \mathrm{F}(\psi) d\psi$, e quindi sarà pure costante $\varrho a^2 \mathrm{G}_h(\varphi)$, avremo:

$$(12) \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a} = -\pi \varepsilon \varrho a \sum_1^\infty \left(\frac{a}{r}\right)^h \mathrm{G}_h(\varphi).$$

Per ottenere il valore di $\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial r}$ e di $\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a}$, bisognerebbe ora porre in (11) e (12) $r = a(1 + \varepsilon \mathrm{F}(\varphi))$; ma notando che a causa della piccolezza di ε si può scambiare r con a nei termini proporzionali ad ε, e porre nei termini non proporzionali ad ε

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}(1 - \varepsilon \mathrm{F}(\varphi)),$$

l'equazione (8) si riduce senz'altro a:

$$(13) \qquad \mathrm{F}(\varphi) = \frac{1}{2}\mathrm{G}_0(\varphi) + \sum \mathrm{G}_h(\varphi),$$

ed esprime appunto la sviluppabilità della funzione V essenzialmente finita e ad un sol valore in una serie, i cui termini seguono la legge contenuta nella (9). La presente dimostrazione regge per tutte le funzioni F, per le quali la funzione V definita dalla (3) ha un significato determinato, quindi p. e. anche per funzioni, che presentino sulla circonferenza un numero finito di discontinuità; ma perde la sua validità, quando quella formola non ha senso, come avverrebbe p. e. per funzioni oscillanti infinite volte, per le quali non è d'altronde valido, come è noto, lo sviluppo in serie di Fourier.

Astronomia. — *Sulle macchie e facole solari osservate al R. Osservatorio del Collegio Romano nell'ultimo trimestre del 1898.* Nota del Socio P. Tacchini.

Presento all'Accademia i risultati delle osservazioni delle macchie e facole eseguite nel 4° trimestre del 1898. La stagione fu favorevole per questo genere di osservazioni, anzi può dirsi molto favorevole come nell'ultimo trimestre dell'anno precedente. Ecco i risultati ottenuti:

4° trimestre 1898.

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Frequenza delle macchie	Frequenza dei fori	Frequenza delle M+F	Frequenza dei giorni senza M+F	Frequenza dei giorni con soli fori	Frequenza dei gruppi di macchie	Media estensione delle macchie	Media estensione delle facole
Ottobre . . .	30	3,20	11,37	14,57	0,00	0,23	2,97	52,20	115,33
Novembre. .	23	3,22	9,04	12,26	0,04	0,00	2,83	22,91	70,00
Dicembre . .	25	1,04	1,80	2,84	0,32	0,04	0,96	13,92	61,60
Trimestre	78	2,51	7,62	10,13	0,12	0,10	2,28	31,30	84,74

Il fenomeno delle macchie presenta un massimo secondario nel mese di Ottobre ed un minimo in Dicembre. Nel complesso i risultati sono poco diversi da quelli ottenuti per il trimestre precedente. Noteremo che il minimo di Luglio è paragonabile a quello del Dicembre, per modo che nel secondo semestre 1898 si ha il fatto di un massimo nei mesi di Settembre e Ottobre, cioè nel mezzo del periodo che separa i due minimi. Anche le facole, come le macchie, presentano nel 4° trimestre una progressiva diminuzione. Le osservazioni furono eseguite in 36 giornate dal sig. Vezzani, in 24 dall'assistente sig. Tringali, in 17 da me ed una volta dal prof. Palazzo.

Matematica. — *Una formula generale per l' integrazione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti variabili.* Nota del Socio U. Dini.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Anatomia vegetale. — *Sulla presenza e sulla forma degli stomi nel Cynomorium coccineum* L. Nota del Corrisp. R. Pirotta e del dott. B. Longo.

Lo studio anatomico ed embriologico del sistema riproduttivo del *Cynomorium coccineum*, una delle più singolari fanerogame parassite della regione mediterranea, ci ha fatto conoscere parecchi fatti interessanti, che pur riservandoci di esporre particolareggiatamente più tardi, ci sembrano tuttavia meritevoli di essere brevemente illustrati.

La presente Nota riguarda gli stomi di questa pianta. Unger aveva già da tempo affermato in generale per i parassiti del gruppo al quale generalmente si ascrive il *Cynomorium*, che l' epidermide loro non presenta stomi non soltanto sullo scapo fiorale, ma nemmeno sulle brattee e sul perianzio, cioè sulle parti morfologicamente da ascriversi al filloma. La stessa cosa dissero Göppert, Griffith, Hooker, Baillon, Engler. Weddell poi recisamente lo afferma per il *Cynomorium* da lui fatto soggetto di uno studio accurato [1].

Ora noi abbiamo trovati gli stomi sulle brattee primarie e secondarie dell' infiorescenza e perfino, nei fiori staminiferi, oltrechè sullo stesso stame anche su quella sorta di appendice di esso interpretata sia come il rappresentante dello stilo — *stilodio* — di un pistillo atrofizzato (Hooker), sia

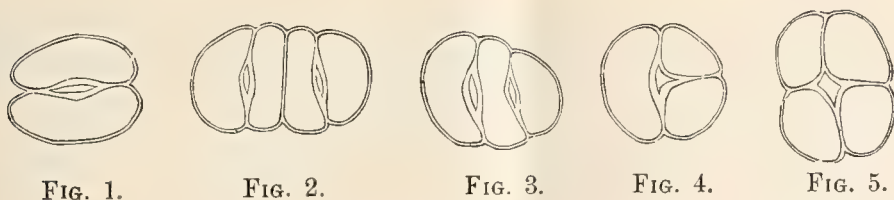
[1] Weddell H. A., *Mémoire sur le Cynomorium coccineum.* Archives du Museum, t. X, pag. 285.

all' opposto, come il rappresentante di uno stame — *staminodio* — (Caruel).

Nè il loro numero è sempre piccolo. Anzi, specialmente sulle brattee primarie, formano talora dei gruppi più o meno numerosi. Essi sono ordinariamente più o meno infossati.

Le cellule di chiusura di questi stomi sono sempre ricche di amido, cosicchè, in preparati inclusi in balsamo del Canadà, il loro citoplasma appare completamente alveolato e le alveolature sono occupate da granelli di amido.

La forma degli stomi del *Cynomorium* non è sempre la stessa: insieme alle forme normali ne abbiamo trovate delle altre interessantissime, che dalla forma normale più o meno grandemente si allontanano. Le figure, che qui riportiamo, ne rappresentano i tipi più interessanti (¹).

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5.

La forma più comune è quella disegnata nella fig. 1. Lo stoma è costituito, come al solito, da due cellule di chiusura.

Altre volte si trovano degli stomi appaiati (geminati) sia sotto la forma rappresentata dalla fig. 2, sia disposti in altro modo.

Però, oltre a queste forme normali, come abbiamo detto, ne abbiamo riscontrate anche delle altre anormali e interessantissime, le più tipiche delle quali sono illustrate dalle fig. 3, 4 e 5, tralasciando, per ora, di trattare di altre forme di stomi, o intermedie tra queste, ovvero che più o meno se ne allontanano per l' anomalia presentata.

La figura 3 ci mostra due stomi collaterali, costituiti solamente da tre cellule di chiusura; nella figura 4 abbiamo rappresentato uno stoma a formare il quale entrano tre cellule di chiusura, e nella figura 5 un altro stoma costituito da quattro cellule di chiusura. Negli ultimi due casi cioè, il canale stomatico è limitato non già da due cellule, come è il caso ordinario, bensì da tre o da quattro cellule stomatiche.

Il materiale da noi fino ad ora studiato non ci ha ancora permesso di osservare lo sviluppo di queste forme anormali di stomi del *Cynomorium*. Ci pare tuttavia abbastanza facile interpretarne il modo di origine.

La formazione dei due stomi rappresentati nella figura 3 si dovrà attribuire al fatto che, avvenuta la divisione della cellula madre dello stoma per

(¹) Tutte le figure rappresentano stomi di brattee primarie ingranditi 265 volte.

formare le due cellule di chiusura, una di queste si sia tornata a segmentare in modo da venire a costituire, staccando collateralmente a sè stessa un' altra cellula di chiusura, un nuovo stoma.

L' origine dello stoma rappresentato dalla figura 4 dovrà pure attribuirsi a ciò, che, dopo la divisione della cellula madre dello stoma nelle due cellule di chiusura, una di queste (quella di destra nel caso rappresentato) si è divisa alla sua volta con una parete normale alla prima divisione della cellula madre.

Infine l' origine dello stoma rappresentato nella figura 5 dovrà attribuirsi al fatto che dopo che la cellula madre dello stoma si è divisa nel modo ordinario per formare le due cellule di chiusura, queste alla loro volta si sono segmentate in direzione normale a quella della prima divisione.

Biologia. — *Sopra la proliferazione delle cellule epiteliali del follicolo ovarico e la nutrizione e la divisione dei blastomeri nell' uovo delle talpe.* Nota del Socio TODARO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Zoologia medica. — *Resoconto degli studi fatti sulla malaria durante il mese di gennaio* da B. GRASSI, A. BIGNAMI e G. BASTIANELLI.

1. In una Nota precedente abbiamo riferito i due culicidi, su cui Ross avrebbe ottenuto risultato positivo per l'uomo all'*Anopheles claviger (dappled-winged mosquitos)* con probabilità e al *Culex pipiens (grey mosquito)* con certezza; il secondo era stato determinato con esemplari forniti da Manson, il primo invece in base alla descrizione di Ross da lui stesso dichiarata *not very careful.* Successivamente Ross ebbe la bontà di spedirci un esemplare del *dappled-winged mosquito* e molti esemplari di *grey mosquito.* Mentre possiamo confermare che quest' ultima specie non è per noi distinguibile dal *Culex pipiens*, dobbiamo riconoscere che il *dappled-winged mosquito*, benchè appartenga al genere *Anopheles*, è ben differente dall'*Anopheles claviger* ed ha invece un' enorme somiglianza coll' *Anopheles pictus.* Questa specie era stata da noi antecedentemente dichiarata sospetta, avendo riguardo alla relativa sua abbondanza in alcuni paesi malarici delle provincie meridionali, dove l'*Anopheles claviger* invece sembra relativamente scarso. Precisamente queste località sono Grassano sulla linea Potenza-Metaponto, Torre-Cerchiara sulla linea Metaponto-Sibari. Abbiamo perciò fatto la caccia agli *Anopheles pictus* e, siccome essi non svernano nelle case, siamo andati

a cercarli nelle grotte. Finalmente abbiamo potuto procurarcene cinque esemplari: evidentemente da tempo non avevano succhiato sangue tanto che facilmente s'attaccarono, il giorno 27 gennaio, in Basilicata stessa, dove furono trovati, ad un uomo che qualche giorno prima aveva avuto febbre supposta malarica. Tre morirono nelle prime ventiquattro ore dopo che si erano così cibati; un quarto morì il 2 febbraio senza aver più voluto nutrirsi; tutti e quattro diedero risultato negativo. Il quinto invece che aveva punto il 29 e il 31 gennaio nell' Ospedale di Santo Spirito un individuo infetto di semilune presentò nelle pareti dell' intestino le solite capsule in via di sviluppo e precisamente ne presentò tre, una più piccola e due più grandi, la prima probabilmente derivante dal succhiamento del 31 e le altre due da quello del 29. Gli *Anopheles claviger* tenuti per controllo nelle stesse condizioni di nutrizione e di temperatura diedero tutti reperto positivo, meno due. In essi il numero delle capsule era però molto maggiore, ciò che devesi in parte certamente alla maggior quantità di sangue che succhiano.

Resta quindi dimostrato che anche l'*Anopheles pictus* propaga i parassiti della malaria. Leggendo attentamente gli scritti di Ross si rileva che egli ha sperimentato con mosquito *dappled-winged* di due sorta, grandi *(large)* e piccoli *(small)*, e in amendue trovò le capsule caratteristiche: l' esemplare speditoci è molto verosimilmente uno *small dappled-winged mosquito*. Ciò notiamo perchè anche da noi esistono *small* e *large dappled-winged mosquitos*, cioè individui grandi e piccoli.

In base agli esemplari che noi possediamo siamo autorizzati a ritenere che siano in realtà due specie differenti non soltanto per le dimensioni, ma anche per i disegni delle ali e dei palpi. Ci affrettiamo a soggiungere che i cinque esemplari di cui sopra si parla appartenevano tutti alla forma piccola. La forma grande è stata finora rinvenuta da uno di noi in autunno avanzato in Lombardia (non molto rara), nelle paludi di Ravenna (un esemplare), nella campagna romana (un esemplare) e a Grassano (un esemplare) ([1]).

([1]) Accenno sommariamente alcuni caratteri differenziali.

1°. *Forma piccola dell'India* = *Anopheles subpictus* (Grassi). Lunghezza totale circa 7 mm. Palpi ingrossati. Giuntura del penultimo articolo coll'antipenultimo bianca. Distinzione dell'ultimo articolo dal penultimo non facile a rilevarsi. Considerandoli come un articolo doppio, si può dire che, se si tace la giuntura bianca coll' antipenultimo articolo, questo articolo doppio è oscuro nella metà prossimale, bianco in quella distale. Il margine anteriore delle ali è spiccatamente indicato da una linea spezzata oscura nella quale si distinguono facilmente quattro tratti o macchie lineari, che si vogliamo dire, appunto di colore oscuro.

2°. *Forma piccola d' Italia* = *Anopheles pictus* (Loew). Distinguesi per la lunghezza totale un po' maggiore (circa 9 mm.), per i palpi relativamente sottili e perchè l' articolo che abbiamo considerato doppio, tralasciando la giuntura bianca coll' antipenultimo articolo, è oscuro per circa i due terzi prossimali e il terzo bianco distale presenta

Dopo questi fatti la necessità di sperimentare anche colla forma grande e cogli *A. bifurcatus* e *nigripes* diventa evidente, ciò che speriamo di fare tra qualche giorno.

In una lettera al dott. Charles, Ross ci fa sapere che gli *Anopheles* con cui ha sperimentato provenivano da diretto allevamento, mentre il *grey-mosquito* da cui credette d' aver ottenuto risultato positivo da un uomo infetto di terzana comune, quasi certamente doveva essere invece infetto di Proteosoma.

Soggiungeremo che molte volte abbiamo avuto occasione di esaminare *Culex pipiens* raccolti in camere dove degevano malarici: non li trovammo mai infetti, mentre lo erano molte volte gli *A. claviger* coi quali convivevano. Abbiamo invece veduto infettarsi i *C. pipiens* che avevano succhiato sangue di passeri ricco di gameti.

2. Molte circostanze facevano ritenere che anche il parassita della quartana dovesse svilupparsi nell'*A. claviger*. I risultati però furono sempre negativi, ciò che ci spiegavamo colla constatata mancanza di forme che si flagellassero nel sangue degli individui, che venivano punti dai zanzaroni.

Finalmente in un zanzarone nutritosi su una donna, la quale era affetta da quartana da diciotto mesi e presentava nel sangue un enorme numero di parassiti tra cui rarissimi gameti, abbiamo trovato due capsule aventi il pigmento caratteristico del parassita quartanario. Queste capsule erano arretrate nello sviluppo più di quanto si sarebbe aspettato, e infatti esse erano provenienti da sangue succhiato da tre giorni e avevano dimensioni corrispondenti presso a poco a quelli delle capsule di due giorni provenienti da semilune.

---

più, o, meno evidente un piccolo tratto oscuro verso la sua parte di mezzo. Ali non distinguibili con sicurezza, per quanto ho veduto, da quelle della forma precedente.

3°. *Forma grande d' Italia* = *Anopheles pseudopictus* (Grassi). Distinguesi per la lunghezza totale ancora maggiore (11 mm. circa), per i palpi relativamente ingrossati e per l'articolo che abbiamo considerato doppio, nel quale l'oscuro predomina moltissimo sul bianco, sicchè, oltre alla giuntura bianca coll'antipenultimo articolo e oltre all'estremo distale bianco, presenta soltanto un anello bianco più vicino all'estremità distale che a quella prossimale. La linea oscura al margine anteriore delle ali è meno nettamente interrotta sicchè soltanto due o al più tre tratti sono facilmente rilevabili. Gli spazi tra i tratti sono molto più angusti.

Resta da vedere se le forme grandi di Malans e di Grassano siano tutte riferibili all'*A. pseudopictus*.

Non so decidere se la descrizione del Ficalbi si riferisca al *pictus* o allo *pseudopictus*.

Sia perchè mi basava su questa descrizione, sia perchè di quella forma ch' io denomino *pictus* non possedeva che cattivi esemplari, nelle Note antecedenti denominai *pictus* anche quella forma che qui denomino *pseudopictus*.

I *pictus* di Ficalbi provenivano dalla foresta di Tombolo presso Pisa (luogo malarico).

B. Grassi.

Il reperto sopra riportato, benchè unico, viene da noi ritenuto positivo perchè il zanzarone suddetto da circa un mese si trovava in laboratorio e non aveva mai succhiato altro che sangue di individui sani: anche il sangue della donna era stato a lungo esaminato e aveva confermato la diagnosi, già evidente in base al decorso della febbre, di quartana classica.

3. Un individuo non malarico venne sottoposto alla puntura di tre zanzaroni che da dieci giorni avevano succhiato sangue di un [1] individuo con febbri estivo-autunnali, semilunare: dall' esame di altri zanzaroni trovantisi nelle stesse condizioni si poteva arguire che i tre zanzaroni in discorso dovevano presentare gli sporozoiti nelle ghiandole salivari, sporozoiti provenienti dalle semilune dell' individuo suddetto.

Nell' individuo non malarico punto, ripetiamo, dai tre zanzaroni suddetti si sviluppò dopo 12-13 giorni d' incubazione un' infezione grave estivo-autunnale. I tre zanzaroni subito dopo la puntura vennero esaminati e si trovarono nell' intestino capsule contenenti sporozoiti, alcune delle quali rotte e nelle glandole salivari di due di essi numerosissime cellule ripiene di sporozoiti. Questo esperimento dà perciò il ciclo completo, quale abbiamo descritto nella nostra Nota precedente.

Non fa d' uopo dire che si tennero zanzaroni di confronto per escludere qualunque errore.

4. Durante il mese di gennaio i casi di nuove infezioni malariche nella campagna Romana furono molto rari. Conformemente si trovarono rarissimamente zanzaroni infetti in natura, nessuno colle capsule fornite di sporozoiti, pochi cogli sporozoiti nelle ghiandole salivari.

5. Le sezioni in serie dei zanzaroni ci hanno fatto riscontrare spore in abbondanza in via di assumere color bruno intorno alla parete del vaso dorsale. Le spore nelle uova caratterizzate dalla presenza di otto corpicciuoli che giudichiamo sporozoiti, non sono rare; non è difficile di trovare infette soltanto alcune uova. Lo studio delle larve di *Anopheles* già cominciato, ci permetterà fra breve di stabilire quali rapporti abbiano queste spore coi parassiti malarici.

6. Durante il mese di gennaio non abbiamo trovato alcuna larva di *Anopheles claviger* in nessuna parte d' Italia, così pure facevano totalmente difetto i maschi; le femmine però avevano già la spermateca ripiena di spermatozoi. Evidentemente, adunque, sverna soltanto la femmina feconda. Essa sta nascosta nelle abitazioni, nelle stalle, nei pollai e nell' Italia media e meridionale si ripara, benchè meno frequentemente, anche nelle grotte. In Lombardia abbiamo trovato l' *Anopheles claviger* soltanto nelle abitazioni e non mai sotto quei ponticelli, che ne albergavano migliaia nei mesi autunnali.

[1] Questo come gli altri malati su cui si è sperimentato si sono offerti spontaneamente e, avvenuta l' infezione, sono stati subito curati e guariti colla chinina.

Nel Canton Grigioni (Malans: località lievissimamente malarica) il sig. Engel ci raccolse in una cantina parecchi *Anopheles* tra cui anche uno molto prossimo, se non uguale, allo *pseudopictus*; gli altri appartenevano alla specie *A. claviger*; a quest' ultima specie appartengono altri *Anopheles* provenienti dalla Germania settentrionale, dove però non trovammo chi si prestasse a raccogliercene direttamente degli esemplari.

Nella stanza riscaldata, nella quale alleviamo le zanzare, assistemmo alla deposizione delle uova di *Anopheles claviger*. Questo culicide deposita le uova in parecchi nastrini galleggianti di tre, quattro, venti uova e non costruisce la ben nota barchetta del *C. pipiens*.

Il *C. pipiens* sverna, oltre che nelle case, nell' Italia media e meridionale, a gran preferenza, nelle grotte dove si trova anche qualche maschio.

7. Nella stanza in discorso vi sono moltissimi zanzaroni che da circa due mesi non hanno succhiato sangue malarico. Nell' ultimo mese hanno punto moltissime volte senza produrre alcuna infezione malarica: ciò che era del resto presumibile dopo i fatti esposti nella Nota precedente, e ciò che trova la sua giustificazione nella mancanza di sporozoiti dentro le ghiandole salivari degli individui che si sezionarono [1].

Mentre correggiamo le bozze della presente Nota ci perviene il Resoconto della *Spedizione di Koch in Italia per lo studio della malaria*. Esso porta la data del 17 novembre, ma è uscito soltanto il 2 febbraio: *more solito*, i nostri lavori non sono citati. Noi qui non ne moviamo special lamento, perchè viviamo nella fiducia che il mondo scientifico ci farà ragione.

I preparati dimostranti i fatti esposti nelle nostre Note preliminari sono visibili, a chi s' interessa, nell' ospedale di S. Spirito e nel Laboratorio di Anatomia comparata dell' Università di Roma.

Matematica. — *Sull' integrazione dell' equazione differenziale* $\Delta^2\Delta^2 = 0$. Nota dell' ing. E. Almansi, presentata dal Corrispondente Volterra.

1. In questa Nota espongo succintamente un metodo d' integrazione dell' equazione differenziale $\Delta^2\Delta^2 = 0$, che permette di ottenere, in un' area piana semplicemente connessa, la funzione bi-armonica da determinarsi, espressa per mezzo d' integrali definiti, quando al contorno si conosca il valore della funzione stessa, e della sua derivata rispetto alla normale interna. Il metodo è applicabile ad un' estesa classe di aree [2].

[1] Sui tagli si vede con certezza che un tubolo ghiandolare presenta un secreto differente da quello degli altri.

[2] In una Memoria di prossima pubblicazione verrà esposto per disteso il procedimento che qui riassumo.

2. Considero da prima un caso particolare. Il contorno dell'area data σ', i cui punti suppongo riferiti ad un sistema di coordinate ortogonali x', y', si ottenga facendo variare fra 0 e 2π il parametro θ nelle due equazioni:

$$x' = \cos\theta + a\cos 2\theta ,$$
$$y' = \operatorname{sen}\theta + a\operatorname{sen} 2\theta ,$$

ove a è una costante, in valore assoluto minore di $\frac{1}{2}$.

Sia U' la funzione bi-armonica, che si tratta di determinare. Questa funzione potremo sempre rappresentarla con due funzioni armoniche u_0', u_1', mediante la formula:

$$U' = u_0' + x'u_1' \ (^1).$$

Facciamo ora la rappresentazione conforme dell'area σ', sul cerchio σ, di raggio 1, appartenente al piano (xy). Perciò basterà porre:

$$\begin{aligned} x' &= r\cos\theta + ar^2\cos 2\theta , \\ y' &= r\operatorname{sen}\theta + ar^2\operatorname{sen} 2\theta , \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \operatorname{arc\,tag}\frac{y}{x} , \end{aligned} \right.$$

ovvero:

$$x' = x + a(x^2 - y^2) ,$$
$$y' = y + 2axy ,$$

come si verifica immediatamente.

Diciamo U, u_0, u_1, le funzioni U', u_0', u_1', espresse mediante le variabili x, y. Sarà:

$$U = u_0 + \{x + a(x^2 - y^2)\} u_1 . \tag{1}$$

Le funzioni $u_0(x, y)$, $u_1(x, y)$, sono ancora armoniche. Ne segue che la funzione $U(x, y)$ è tri-armonica. Essa infatti è la somma della funzione armonica u_0, e di una funzione tri-armonica ottenuta moltiplicando la funzione armonica u_1, per la funzione razionale intera del 2° grado $x+a(x^2-y^2)$.

Potremo dunque rappresentarla con tre funzioni armoniche v_0, v_1, v_2, ponendo:

$$U = v_0 + (r^2 - 1)\, v_1 + (r^2 - 1)^2\, v_2 . \tag{2}$$

(1) Questa, ed altre proprietà delle funzioni poli-armoniche, di cui mi valgo più avanti, si trovano dimostrate, con qualche restrizione, che però può eliminarsi, nella mia Memoria: *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$. Annali di matematica, tomo II, serie III, a. 1898.

Sulla circonferenza del cerchio σ noi conosciamo la funzione U, e la sua derivata normale $\frac{\partial U}{\partial \nu}$. Sia $U=\varphi$, $\frac{\partial U}{\partial \nu}=\psi$. Per l'equazione (1), sarà:

$$[v_0]_{r=1}=, \left[\frac{\partial v_0}{\partial \nu}-2v_1\right]_{r=1}=\psi .$$

Queste formule permettono di determinare in tutto il cerchio σ le due funzioni armoniche v_0, v_1: dopo di che, non avremo più da occuparci delle condizioni al contorno.

Ottenute le funzioni v_0, v_1, uguagliamo i due secondi membri delle equazioni (1) e (2):

$$u_0+\{x+a(x^2-y^2)\}u_1=v_0+(r^2-1)v_1+(r^2-1)^2 v_2 .$$

Su questa equazione eseguiamo l'operazione Δ^2. E poniamo inoltre:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}+c_1 ,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}=x\frac{\partial w}{\partial y}-y\frac{\partial w}{\partial x}+c_2 ,$$

essendo w una nuova funzione armonica, c, c_1, c_2 due costanti: ciò che può sempre farsi. Si otterrà:

$$r^2 . 2a\left[\frac{\partial w}{\partial x}-w_1\right]+\left[r\frac{\partial w}{\partial r}-w_2\right]=0 ,$$

Ma, in un' area piana che contiene l' origine delle coordinate, perchè una funzione bi-armonica r^2u+v, espressa mediante le due funzioni armoniche u, v, possa essere identicamente nulla, è necessario che siano nulle le due funzioni armoniche. Sarà dunque:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=w_1 , \quad r\frac{\partial w}{\partial r}=w_2 , \tag{3}$$

da cui, eliminando la w, si ricava:

$$w_1+r\frac{\partial w_1}{\partial r}=\frac{\partial w_2}{\partial x} , \tag{4}$$

equazione in cui comparisce una sola funzione incognita, la v_2.

Sostituendo a w_1, w_2 le loro espressioni, e ponendo:

$$x_1=x+2a , \quad y_1=y , \quad r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2} ,$$

$$v_3=v_2+r_1\frac{\partial v_2}{\partial r_1}-a\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{1}{2}a^2c_1 ,$$

l' equazione (4) può scriversi:

$$2v_3 + r_1 \frac{\partial v_3}{\partial r_1} = 0 ,$$

da cui, la funzione v_3 essendo armonica, e l' origine delle coordinate x_1 , y_1, cadendo entro il cerchio, si deduce: $v_3 = 0$; vale a dire

$$v_2 + r_1 \frac{\partial v_2}{\partial r_1} = a \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2} a^2 c_1 .$$

L' unica funzione armonica che verifica questa equazione, è quella espressa dalla formula:

$$v_2 = \frac{a}{r_1} \int_0^{r_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dr_1 - \frac{1}{2} a^2 c_1 .$$

dove le w_1 , w_2, sono funzioni armoniche, date dalle formule:

$$w_1 = \frac{2}{a} \left\{ 2v_2 - r \frac{\partial v_2}{\partial r} \right\} ,$$

$$w_2 = -4 \left\{ v_2 + r \frac{\partial v_2}{\partial r} \right\} + 2 \left\{ v_1 + r \frac{\partial v_1}{\partial r} \right\} - 2a(c_1 x - c_2 y) + c_1 .$$

Le quantità in parentesi sono pure funzioni armoniche.

Il valore della costante c_1, che ancora non conosciamo, si determina osservando che, per la seconda delle formule (3), la funzione w_2 deve annullarsi nell' origine delle coordinate x , y. Tenendo conto di questa condizione, si trova: $c_1 = \frac{2}{1 - 2a^2} (v_1)_1$, in cui $(v_1)_1$ rappresenta il valore della funzione v_1 nella origine delle coordinate x_1 , y_1.

Così avremo determinato tutte e tre le funzioni che compariscono nella formula (2). E il problema sarà risoluto.

3. Un procedimento analogo, che però condurrà, in generale, a considerare nel piano (xy) una funzione poli-armonica U, d' un ordine superiore al terzo, si potrà applicare tutte le volte che la rappresentazione conforme dell' area σ' sul cerchio σ, si fa colle formule:

$$x' = \sum r^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) ,$$
$$y' = \sum r^n (a_n \operatorname{sen} n\theta - b_n \cos n\theta) ,$$

ove s' intende che l' indice n assume un numero finito di valori, uguali per l' una e per l' altra formula.

Con un metodo analogo si potrà anche integrare nell' area σ' l' equazione differenziale, più generale, $\Delta^{2n} = 0$, conoscendosi al contorno il valore della funzione e delle sue derivate rispetto alla normale interna, d' ordine $1 , 2 , \ldots n - 1$.

Matematica. — *Contributo alla geometria delle masse.* Nota dell' ing. A. Ciappi, presentata dal Socio V. Cerruti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Ricerche sul fenomeno residuo nei tubi a rarefazione elevata.* Nota di Alessandro Sandrucci, presentata dal Socio Blaserna.

Chiamerò fenomeno residuo, indicandolo per brevità con la notazione F. R, il fenomeno da me osservato nei tubi del Crookes, per cui il catodo prosegue ad emettere raggi catodici dopo cessata l' azione eccitatrice del tubo e da me considerato, forse un po' prematuramente, come un argomento in favore della teoria di Goldstein su la immaterialità dei raggi catodici (1).

Essendomi stato osservato che nel fenomeno avrebbe potuto aver parte essenziale o totale il rocchetto eccitatore, poichè la relazione dei miei esperimenti lasciava il dubbio che io non avessi staccato il rocchetto dal tubo durante l' azione del campo magnetico (e in realtà era vero), ho voluto iniziare una serie di esperienze per chiarir questo punto e più che altro ricercare se il F.R si producesse anche cogli effluvî unipolari, applicati in precedenza ad un bello studio sui gas rarefatti dal prof. A. Battelli (2).

Le esperienze che ora riferirò mi hanno condotto a stabilire che il F.R non dipende da una azione susseguente nell' apparecchio eccitatore; che si produce con intensità e durata molto amplificate sotto l' azione di certi effluvî unipolari; che dipende dai tubi adoperati e forse dal grado di vuoto in essi esistente e risente l' influenza di cause esterne, come cariche elettrostatiche ecc. Il macchinario da me adoperato è stato anche questa volta quello già descritto in lavori precedenti. Nelle ricerche cogli effluvî unipolari ho tenuto sempre il rocchetto ben isolato dal suolo e isolato anche il polo del rocchetto non attivante il tubo. Ho riscontrato che il F.R persiste nell' *effluvio bipolare* quando si separa il tubo dall' eccitatore nel medesimo istante che il funzionamento di questo viene interrotto: ma descriverò in seguito solo il modo di sperimentare in questo senso coll' *effluvio unipolare positivo*, perchè i fenomeni in tal caso si sono presentati molto più cospicui e duraturi.

(1) V. mia Nota, *Fosforescenza del vetro ed emissione di raggi catodici* ecc. N. Cimento, serie 4ª, vol. VI, novembre 1897.

(2) N. Cimento, serie 4ª, vol. VII, febbraio 1898.

Effluvio unipolare doppio. — Ambedue gli elettrodi di ogni tubo sono riuniti al polo funzionante. Il campo magnetico rivela in tutti e quattro i tubi emissione contemporanea di normalcatodici da ambedue gli elettrodi. La luminosità dei tubi per tutti è maggiore coll' effluvio (+) che col (—). Il n. 1 e il n. 4 non danno F.R: il n. 3 col solo effluvio (+) in modo appena visibile ed il n. 2 ben sensibile e per l' elettrodo concavo terminale della durata di 1″, per il piano $<1''$.

Effluvio unipolare semplice. — Un solo elettrodo dei tubi riunito ad un polo del rocchetto. Avendo i tubi elettrodi differenti di forma e di grandezza, sperimento tenendo successivamente ogni elettrodo unito al rocchetto e l' altro isolato o in contatto col suolo. Nè coll' effluvio (+) nè col (—) in nessuno dei 4 casi possibili il tubo n. 1 mi ha dato F.R. L' elettrodo che non è collegato al rocchetto non emette normalcatodici se non quando è al suolo e l' effluvio eccitatore è (+), nel qual caso l' aspetto del tubo è identico a quello comune *bipolare*, ma affievolito: e in generale gli elettrodi a punta emettono molto meno catodici di quello a disco.

Il n. 4 coll' effluvio (+) e l' elettrodo *piano* impegnato col rocchetto (isolato il semicilindrico) dà F.R seguente i normali spostamenti magnetici e di più una luminosità residua che riempie tutto il tubo come una nebbia e sotto l' azione magnetica si ritira verso l' elettrodo come fanno i catodici del F.R, che dura 2″-3″.

È notevole che la figura di concentrazione dei catodici del F.R, oltre venire a formarsi proprio là dove formasi quella simile, ma più intensa, nel funzionamento del rocchetto, tremola leggermente, come tremola questa forse per oscillazioni dell' elettrodo: il che conferma, se ancora ce n' è bisogno, che il F.R è dato da un vero proseguimento di emissione di normalcatodici da parte dell' elettrodo.

Il n. 2 con l' effluvio (—) in nessuno dei casi possibili, relativi ai due elettrodi, produce F.R: lo sviluppa invece così intenso col (+) che ne approfitto per verificare la supposta dipendenza del fenomeno dal rocchetto. Colloco il tubo periforme col diametro maggiore verticale e l' elettrodo *concavo* (terminale) in basso: da questo parte un filo di rame che pesca in un pozzetto di mercurio, nel quale pesca pure il reoforo del rocchetto eccitatore. Uno spinterometro colle palline tenute molto distanti fra loro, è collocato fra i due poli del rocchetto. Funzionando questo, il tubo si illumina con uniformità e fluorescenza verdognola meno intensa dell' ordinaria (effluvio bipolare). Dal centro dell' elettrodo funzionante parte un pennello molto visibile di luce meno verdognola, energicamente respinta dal dito e da qualunque conduttore al suolo avvicinato al tubo.

Questa però non è causa della fluorescenza antielettrodica. Interrotto il funzionamento del rocchetto, rimane nella regione antielettrodica sensibile fluorescenza col medesimo aspetto di quando il tubo funziona: sul principio

è continua, poi vacillante. Creando subito il campo magnetico, disposto in modo da concentrare vicino all'elettrodo i catodici normali allorchè il rocchetto funziona, la fluorescenza residua lascia istantaneamente la cupola per portarsi presso l'elettrodo, formando una striscia, lunga circa 4 centim., larga $\frac{1}{2}$, luminosa in verde intenso: ed è pronta a ritornare alla cima del tubo quando cessi l'azione magnetica e viceversa parecchie volte (sin più di 10). Notevole è che una tale striscia di concentrazione, appena comincia l'azione del magnete si mostra assai più lunga che dopo qualche secondo e, seguitando, non solo si affievolisce nello splendore, ma *va raccorciandosi dalla parte antielettrodica* (1). Questa striscia, che dimostra con singolare evidenza il F.R, può durare a vedersi in certi casi fino per 70″.

Con la disposizione indicata ha potuto verificare che:

1° Il F.R persiste quando, cessata la scarica del rocchetto, si chiude contemporaneamente collo spinterometro il secondario di esso: e non ne risente modificazione alcuna.

2° Persiste anche bene intenso quando scoccano, durante il funzionamento del rocchetto, scintille allo spinterometro.

3° Persiste quando si stacchi non molto bruscamente il filo di rame dall'anellino dell'elettrodo, sia colle mani, sia con un isolante; quando si tolga dal pozzetto di mercurio il reoforo del rocchetto, e quando si ponga il mercurio al suolo con un filo conduttore.

4° Cessa però subito se, nello staccare il filo dall'anellino, si tocchi con esso la parete del tubo.

Allorquando uno degli elettrodi è al suolo, se è il *piano* non si ha traccia di F.R da nessuna parte: se è il *concavo* si ha produzione di F.R anche da parte di questo (come di normalcatodici) e con intensità maggiore che per parte dell'altro: la durata però è breve per ambedue, non superando 3″ con forte corrente primaria. Notevole che la striscia che si dipinge in verde sul vetro *sembra come venir deviata sempre più* dal principio alla fine del fenomeno.

Sono passato quindi a ricercare l'influenza di alcune condizioni esterne sulla produzione, sull'aspetto, sulla durata del F.R. Ecco fra le molte prove sin'ora tentate, quelle che mi han dato risultati più sicuri ed interessanti.

Influenza sul F.R della natura del tubo (*grado di vuoto* ?) *e dell'elettrodo funzionante.* — Il tubo n. 2 (che ha una distanza esplosiva equivalente di $^{m}/_{m}$ 27) con corrente di 9 $^{3}/_{4}$ ampères nel primario del rocchetto, mi ha dato una durata massima del F.R di 70″; in identiche condizioni il n. 3 (dist. esplos. $^{m}/_{m}$ 30) una durata di soli 28″. Pare che nello stesso tubo l'elettrodo *minore* e *piano* dia una durata più grande di F.R. Ma in questa

(1) Si potrebbe spiegare un tal fatto ammettendo che nel fascio di raggi residui non tutti siano con eguale intensità deviati dal magnete, e che i primi a scomparire o ad affievolirsi siano i mono deviabili.

parte le mie ricerche sono ancora incomplete: mi riserbo di studiare ulteriormente su tubi appositamente costruiti l'influenza del grado di vuoto, della grandezza, forma e posizione reciproca degli elettrodi ecc.

Influenza di una corrente primaria variabile nel rocchetto. — Si osserva spesso, circa a metà della durata del F.R, come un risveglio di intensità nella fluorescenza spostata dal magnete che passa presto e dopo il quale essa rapidamente declina: sempre il fenomeno termina con intermittenze, cioè sparizioni ed apparizioni della striscia fluorescente. Ho ricercato l'influenza che può avere su queste, come sulla durata del F.R, il valore della corrente primaria.

I. Esperienza (tubo n. 2): effluvio (+). Elettrodo *concavo* funzionante, piano isolato;

Intensità della corrente amp.	Durata di FR	*Osservazioni*
4 1/2	0″	Il tubo si illumina debolmente: vi sono però normalcatodici discreti.
6	29″	F.R in principio continuo: poi intermittenze frequenti e quindi lente.
6 3/4	40″	Idem.
7 1/2	48″	Continuo prima: quindi a lampi rapidi, poi di nuovo continuo, quindi a lampi più rari.
8 1/4	50″	Continuo: poi a lampi sempre più rari, accompagnati, come in tutti i casi, da progressiva diminuzione d'intensità.
9	58″	Idem.
9 3/4	55″	Idem.

II. Esperienza. Elettrodo *piano* funzionante, concavo isolato:

Intensità della corrente amp.	Durata del F.R	*Osservazioni*
4 1/2	28″	A lampi poco frequenti.
6	35″	Idem.
6 3/4	46″	A lampi prima poco frequenti, poi ancor meno.
7 1/2	57″	Per una metà della durata continuo e per l'altra con intermittenze larghe.
8 1/4	54″	Sempre con intermittenze rapide e poi più lente.
9	62″	Prima continuo e poi a lampi rari.
9 3/4	70″	Prima continuo: poi a lampi sempre più rari: gli ultimi distano fra loro anche 5″.

Influenza di una distanza esplosiva in serie col tubo. — Lo spinterometro inserito nel reofero tra il polo del rocchetto e il tubo (n. 2), determina un intervallo di scintilla variabile a piacere. Si intende che gli esperimenti sono stati fatti tutti coll'effluvio unipolare (+) perchè coll'effluvio (—) non è mai comparso F.R.

Effluvio unipolare doppio. 1° caso. — La scintilla trovasi sul reoforo che va all' elettrodo *concavo.*

Lunghezza di scintilla	Durata del F.R	
	elettrodo concavo	elettrodo piano
m/m		
0	$1''$	$< 1''$
1	$0''$	$0''$
2	$< 1''$	brevissima
3	$< 1''$	$> 1''$
4	non passa scintilla	$> 2''$

Per il *concavo* è ben abbondante la produzione dei normalcatodici ma diminuisce notevolmente col crescere della lunghezza di scintilla, mentre le traccie di F.R ricompariscono quando questa aumenta.

2° caso. Scintilla sul reoforo che va al *piano*:

Lunghezza di scintilla	Durata del F.R		Osservazioni
m/m	concavo	piano	
0	$0''$	$< 1''$	Senza intermittenze.
1	$0''$	$< 1''$	Con »
2	traccie non sempre	$1''$	» »
3	$0''$	$3''$	» » frequenti.
4	$1''$ non sempre	$2''$	» »

Effluvio unipolare semplice. 1° caso. — Elettrodo *concavo* funzionante, piano isolato:

Lunghezza di scintilla	Durata del F.R	Osservazioni
m/m		
0	$40''$	Intermittenze a distanze quasi uguali e di $1''$ circa.
1	$35''$	» » più piccole.
2	$27''$	» » ancora minori.
3	$32''$	Le intermittenze cominciano $2''-3''$ dopo cominciato F.R e si fanno sempre più frequenti verso la fine.
4	$22''$	Idem.

2° caso. — Elettrodo *piano* funzionante, concavo isolato:

Lunghezza di scintilla	Durata del F.R	Osservazioni
m/m.		
0	$45''$	Intermittenze con *aumento* del periodo di esse verso la fine.
1	$37''$	Idem.
2	$33''$	Idem.
3	$26''$	Intermittenze con *diminuzione* del periodo.
4	$15''$	Idem.

Influenza del campo magnetico. — Diminuendo l'intensità del campo fino a ridurla metà non si nota variazione nella durata e negli altri caratteri del F.R, tenuto conto di tutto, quando non vi è scintilla e quando vi è fino alla lunghezza massima ecc.

Influenza della inserzione di una capacità fra il tubo e il rocchetto. — Con efflurio (+) e la presenza di una capacità un po' notevole, i tubi funzionano stentatamente, cioè con luminosità debole, balzellante e intermittente e pochissima fluorescenza dalla parete; ma il F.R *perdura assai vivo*, subendo le solite intermittenze a periodo di circa 1″. Diminuendo la capacità il tubo funziona meglio, *si accresce la durata del* F.R e le intermittenze hanno un periodo più breve.

Infuenza di conduttori isolati o no, a contatto col tubo o ad esso vicini, o caricati elettrostaticamente. — Col tubo n. 3 ho sperimentato incollandovi leggermente intorno, in un piano normale all'asse maggiore e distante 6 centim. da quello dell'elettrodo funzionante (terminale), una fascia di stagnola larga 1 ½ centim. Ecco in varî casi i risultati più sicuri.

1° *Fascia isolata.* — Il F.R non subisce mutazione. Se però, mentre si produce, si tocca col dito la fascia, scocca una piccola scintilla rumorosa ed il F.R *sparisce immediatamente.* Se, interrotta la scarica del rocchetto, si tocca prima col dito la fascia e poi si fa agire il magnete, *non comparisce* F.R.

2° *Idem e unita a notevole capacità.* — Si illumina il tubo, comparisce F.R e rimane immutato quando la fascia si separi dalla capacità.

3° *Idem e inserzione di scintilla nel reoforo.*

Lunghezza di scintilla m/m.	Durata del F.R	*Osservazioni*
0	9″	Senza intermittenze.
1	6″	Con »
2	4″	Senza »
3	3″-4″	Con »
4	3″	Quasi senza intermittenze.

Tolta, subito dopo, la fascia, si trova:

Lunghezza di scintilla m/m.	Durata del F.R	*Osservazioni*
0	10″-11	Senza intermittenze.
1	9″	Con »
2	6″	Leggerissime intermittenze
3	6″	Senza intermittenze.
4	4″	» »

4° caso. *Fascia al suolo.* — Il tubo non si illumina e solo si ha vivace fiocco crepitante dall' anellino dell' elettrodo che funziona.

Sul tubo n. 2, tenuto verticale come è detto in antecedenza, ho sperimentato mediante due anelli circolari di ottone ben regolari, scorrevoli e fissabili a varie altezze lungo un' asta verticale, in tutto simili a quelli che servono per sostenere le capsule sulle fiamme. Uno più ampio, circondando il tubo, poteva toccarlo in una sezione distante dell' elettrodo funzionante centim. 9,5 e parallela al piano di esso, l' altro minore in una sezione distante soli cent. 3. Per dare a questi anelli una carica elettrostatica mi sono servito di una Winter di mediocre potenza.

Anello maggiore. — 1° caso: anello in contatto col tubo ed isolato.

Il tubo si illumina ottimamente. Il pennello elettrodico assiale del tubo, dopo avere oltrepassato il piano dell' anello, *piegasi brusco in linea curva e va ad incontrare la parete;* quivi non produce aumento di fluorescenza e il punto in cui l' incontra dipende anche dalla posizione di conduttori vicini, dai quali il pennello viene come respinto.

Gli incontri colla parete si fanno però in ogni caso alla medesima distanza dall' elettrodo. Il F.R è di intensità discreta e dura circa 7″. Dando all' anello una carica elettrostatica (+), il F.R subisce le seguenti modificazioni:

a) *si fa più intenso, ampio luminoso, conservando però il suo aspetto solito.*

b) *dura, a quanto pare, indefinitamente col funzionare della macchina.*

c) *segue nella intensità perfettamente le medesime vicende seguite dal funzionamento della macchina elettrostatica.*

Se, interrotto il rocchetto e attivato immediatamente il magnete, si attende che il F.R sia finito, cioè scomparsa la striscia di fluoresc. verde sulla parete di vetro e qualunque luminosità del tubo, e quindi si dà all' anello la carica (+), *il tubo si illumina di nuovo e ricomincia il* F.R.

Questo può ripetersi parecchie volte. Se però il tubo è lasciato molto a lungo in riposo, *la carica non provoca nulla.* Se, inattiva la macchina e agendo il rocchetto, il tubo stenta ad illuminarsi, la carica lo eccita subito.

Dando all' anello carica (—) il F.R cessa immediatamente e il tubo si oscura: ma, seguitando a caricare, riapparisce la luminosità, bensì con aspetto nuovo; è più una luminosità del gas interno che delle pareti, come se queste respingessero il gas verso il mezzo del tubo. La luminosità è color lavanda-violaceo e sente l' azione del campo magnetico, spostandosi in specie vicino all' elettrodo.

2° caso. — Anello in contatto col tubo e col suolo.

La luminosità del tubo è più intensa che nel caso precedente, come più intensa è la luminosità del pennello elettrodico.

Questo si allarga a nappa all'estremo e rende perfettamente l'immagine di uno zampillo liquido che, uscendo dall'elettrodo come da un tubo cilindrico, si innalzi verticale e compatto e in cima venga a piegarsi in basso e disperdersi in goccie. Interrotto il funzionameuto del rocchetto rimane ancora luminoso il tubo, specie nelle vicinanze dell'anello, e si vede ancora traccia del pennello elettrodico nei pressi dell'elettrodo. Il F.R *si fa più vivace, netto, marcato e fisso*: *dura* 25″.

3° caso. — Anello distante 3 $^m/_m$ dalla parete e isolato.

L'illuminazione è poco diversa da quando non c'è l'anello: F.R dura 10″. Dando carica (+) dura 15″-18″, ma non prosegue a mantenersi.

4° caso. — Idem e al suolo.

Scoccano scintilline fra l'anello e il vetro. La luce interna è irregolare, la violacea assai agitata, ripiegata e saltellante. Il F.R dura 8″. Abbassando l'anello e quindi aumentando la distanza dal vetro, la durata passa a 5″ e 4″, cioè come quando non c'è l'anello.

Anello minore (casi identici ai precedenti).

1° Il tubo *non si illumina*: ma dando all'anello una carica (+) si illumina precisamente come coll'anello più grande, e rimane illuminato finchè funziona la macchina per poi subito spegnersi e così seguitando. Il F.R viene continuato a lungo dalla carica *ma non indefinitamente*. Se si dà una carica (—), il tubo comincia coll'illuminarsi ma poi si spegne ed il F.R non si produce che per breve tempo.

2° Non si illumina mai.

3° Sul principio non si illumina, poi comincia ad illuminarsi intermittentemente ed irregolarmente. F.R appena sensibile e fugace.

4° Come nel caso precedente: però il tubo si illumina meglio ed il F.R è un po' più saliente.

Ognuno vede come, cercando di interpetrare i risultati ottenuti, in ispecie gli ultimi esposti, si potrebbe ricavarne alcune conclusioni di un certo interesse e un po' di luce sull'origine e sulla natura del F.R. Ritengo però dal canto mio più opportuno attendere i risultati delle prove coi tubi speciali, evacuabili a piacere, già iniziate alcuni mesi or sono, forzatamente interrotte, e che mi accingo a proseguire e condurre a termine.

Fisica. — *Sulla relazione tra il fenomeno di Zeemann e la rotazione magnetica anomala del piano di polarizzazione della luce.* Nota del prof. DAMIANO MACALUSO e del dott. ORSO MARIO CORBINO, presentata dal Socio BLASERNA.

In un interessante lavoro teorico (¹), presentato all'Accademia di Gottinga nell'ultimo ottobre, il prof. W. Voigt ha richiamato l'attenzione dei fisici sulla reciproca dipendenza che esiste tra il fenomeno di Faraday e quello di Zeemann. Servendosi di formole generali che esprimono le condizioni del movimento vibratorio dell'etere nell'interno dei corpi ponderabili dotati di assorbimento elettivo e sottoposti all'azione di un campo magnetico, egli ha potuto prevedere una serie di fenomeni magneto-ottici caratteristici, qualcuno dei quali noi simultaneamente abbiamo trovato con l'esperienza ed indipendentemente da ogni teoria (²).

Per dare alle sue considerazioni la massima generalità possibile, il Voigt non ha voluto legarle a nessuna ipotesi sul meccanismo del fenomeno, servendosi di un modo *neutrale*, com'egli lo chiama, di rappresentazione, e limitandosi a ricercare tra un dato numero di grandezze vettoriali tali relazioni che possano rappresentare i fatti osservati.

Già prima del Voigt l'intima relazione tra i fenomeni Faraday e Zeemann era stata messa in rilievo tanto dal Becquerel (³) che dal Fitzgerald (⁴). Questi mette a base delle sue considerazioni le moderne teorie della dispersione che connettono la velocità di propagazione e la frequenza di vibrazione delle onde luminose; ed il Becquerel, con delle ipotesi speciali intorno all'influenza dei vortici magnetici sulle vibrazioni luminose, ne deduce la spiegazione tanto del fenomeno di Zeemann che di quello di Faraday.

La teoria del Becquerel è di accordo con le nostre esperienze sopra citate, qualora si tenga conto della dispersione anomala dei vapori di sodio e di litio, la quale osservata la prima volta pel sodio dal Kundt (⁵) e con metodi più esatti dimostrata in seguito dal Winkelmann (⁶), è stata ora ritrovata con nuovi particolari dallo stesso Becquerel (⁷).

(¹) Nachrich. der K. Gesells. der Wissensch. zu Göttingen. Math. phys. Klasse Heft. 3. 1898.

(²) L'Elettricista, anno 7°, pag. 223, ottobre 1898. Rend. Lincei, ser. 5ª. vol. VII, pag. 223, 1898, e vol. VIII, pag. 38, 1899.

(³) Comp. Rend. CXXV, pag. 678, 1897.

(⁴) Proc. Roy. Soc. 63, pag. 31, 1898.

(⁵) Wied. Ann. Bd. 10, pag. 321, 1880.

(⁶) Wied. Ann. Bd. 32, pag. 439, 1887.

(⁷) Comp. Rend. CXXVII, pag. 899, 1898; CXXVIII, pag. 145. 1899.

Alcune conseguenze però della teoria di quest' ultimo non vanno d' accordo coi particolari delle esperienze sull' effetto Zeemann, non essendo conformi ai risultati sperimentali le sue previsioni circa l' azione del campo sulle diverse righe di una stessa sostanza.

Anche noi abbiamo tentato la ricerca di una relazione semplice, o meglio di una reciproca dipendenza tra i due fenomeni, mettendoci nell' ordine di idee del Fitzgerald; e, fondandoci sopra una ipotesi di evidente verosimiglianza, siamo venuti alla conclusione che i fatti da noi osservati sono una conseguenza necessaria del fenomeno Zeemann, che quindi devono sempre e solamente osservarsi nel caso di righe che presentano quel fenomeno e che perciò da qualunque teoria che spieghi questo restano anch' essi interpretati.

Le considerazioni che ci hanno condotto a tale risultato formano l' oggetto della presente Nota.

Un fascio di luce bianca si propaghi attraverso il nucleo forato di un' elettrocalamita, fra i poli della quale si trovi una sorgente luminosa che presenti l' effetto Zeemann.

Se la luce incidente è naturale, o comunque polarizzata, a campo non eccitato si vede, con uno spettroscopio qualsiasi, al posto di ogni linea di emissione della sorgente, una linea di assorbimento.

Eccitando il campo, se lo spettroscopio è abbastanza dispersivo, si osserva il noto effetto Zeemann per assorbimento, il quale effetto, nel caso che la luce incidente sia circolare, consiste in uno spostamento delle righe verso il violetto o verso il rosso, secondo che il senso della vibrazione incidente è lo stesso od opposto di quello della corrente magnetizzante. Questo spostamento è piccolissimo con i campi generalmente impiegati. Per le righe del sodio, p. es., la variazione della lunghezza d' onda è dell' ordine di 1/40000 della lunghezza d' onda primitiva. Inoltre, come risulterebbe da alcune nostre osservazioni, la distribuzione dell' intensità nella banda di assorbimento spostata non sembra differire per nulla da quella che si ha nella banda di assorbimento primitiva.

Intanto, come la teoria della dispersione anomala ci apprende, e l' esperienza (nei casi in cui è stata fatta) ha confermato, in vicinanza di ogni riga di assorbimento l' indice di rifrazione n cresce rapidamente andando dall' estremo rosso dello spettro verso la linea stessa, mentre decresce rapidamente venendovi dallo estremo violetto. Cosicchè, rappresentando graficamente l' andamento dei valori di n in funzione di quelli della lunghezza di onda λ, si ha una curva che scende rapidamente sino a un minimo in vicinanza del bordo più rifrangibile della riga, sale con un punto d' inflessione nell' interno di questa, per tornare a ridiscendere, anche rapidamente, fuori ed in vicinanza dell' altro bordo, con curvature opposte dai due lati della riga medesima.

Or poichè eccitando il campo la riga di assorbimento della luce circo-

lare incidente, spostandosi di pochissimo nello spettro, mantiene inalterato per tutto il resto il suo aspetto, e poichè i valori dell' indice di rifrazione e della velocità di propagazione della luce nei corpi sono intimamente legati a quelli dell' assorbimento, noi ammetteremo, ed è questa la sola ipotesi che facciamo, che insieme alla riga di assorbimento si sposti, di una quantità eguale e senza alcuna deformazione, la curva degli indici di rifrazione.

Ciò posto sia per un dato mezzo, quando il campo non è eccitato,

$$n = f(\lambda)$$

l' equazione della curva suddetta, sull' andamento della quale per ora possiamo non precisar nulla. Sia inoltre δ il valore dello spostamento della riga, per luce incidente circolare, dovuto all' effetto Zeemann. Per luce circolare di senso opposto a quello di prima la curva si sposterà di δ in senso opposto, essendo le due righe di assorbimento per luce naturale simmetricamente disposte rispetto a quella che si aveva senza l'azione del campo.

Per la nostra ipotesi la curva (1) si sposterà senza deformazione di una lunghezza eguale a δ nel senso delle λ decrescenti se la vibrazione della luce circolare incidente si compie nel senso della corrente magnetizzante, e nel senso delle λ crescenti se la vibrazione si compie in senso opposto.

Supponiamo, per fissare le idee, che la corrente sia destrorsa. Per la luce destrogira la curva degli indici avrà l'equazione

$$n_1 = f\ (\lambda + \delta)$$

e per la levogira

$$n_2 = f\ (\lambda - \delta).$$

Sviluppando in serie di Taylor e tenendo presente che per la piccolezza di δ potranno trascurarsi i termini contenenti δ con esponente superiore a 2, si ha

$$n_1 = f(\lambda) + \delta \frac{dn}{d\lambda} + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{d^2 n}{d\lambda^2}$$

$$n_2 = f(\lambda) - \delta \frac{dn}{d\lambda} + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{d^2 n}{d\lambda^2}.$$

Se la luce incidente è polarizzata rettilineamente, dopo attraversato uno spessore l del mezzo, il piano di polarizzazione sarà girato nel senso destorso di

$$\varrho = \frac{\pi l}{\lambda} (n_2 - n_1) = - \frac{2\pi l}{\lambda} \frac{dn}{d\lambda} \delta.$$

E se si tien conto delle esperienze, dalle quali risulta che δ è proporzionale alla intensità H del campo,

$$\varrho = -\frac{2A\pi l}{\lambda}\frac{dn}{d\lambda}H$$

dove A è una costante *diversa da riga a riga.*

Questa formola è di accordo coi risultati delle esperienze.

Che la rotazione ϱ nel caso dei vapori di sodio e di litio sia proporzionale a $\frac{dn}{d\lambda}$ risulta dalle ricerche del Becquerel (1).

Dippiù, data la forma generale della curva di dispersione, forma di cui sopra è parola, fuori la banda l'espressione $\frac{dn}{d\lambda}$ è sempre negativa ed in valore assoluto crescente da entrambi i lati dall'esterno verso i bordi della banda stessa. In corrispondenza di ciò, come da noi fu osservato, la rotazione avviene nel senso della corrente magnetizzante ed è sempre crescente dallo esterno verso i bordi suddetti. La proporzionalità in fine di ϱ ad H l'abbiamo verificata con alcune recenti misure, con le quali abbiamo potuto constatare che al crescere dell'intensità del campo cresce nello stesso rapporto per tutti i posti dello spettro la rotazione, fin dove, per l'accrescimento dell'effetto Zeemann conseguente all'accrescimento dell'intensità del campo, la rotazione poteva essere misurata (2).

È da notarsi inoltre che la formola (2) è molto simile a quella cui perviene il Becquerel con la sua teoria sopracitata. Però nella (2) è contenuta la costante A che dà la misura dell'effetto Zeemann per ogni riga, e che, come risulta da esperienze note, è diversa anche per righe della stessa sostanza. Anche nella formola del Becquerel è contenuta una costante di proporzionalità, la quale esprime la velocità di rotazione dei vortici magnetici, e che perciò deve essere la stessa, almeno per le righe del medesimo corpo. Ne segue che, secondo la (2), se una delle righe di assorbimento del corpo non presenta l'effetto Zeemann, e il caso si avvera, essa non presenterà il fenomeno da noi osservato dapprima con le righe del sodio e del litio e più recentemente con quelle di alcuni altri corpi, quando anco i valori di $\frac{dn}{d\lambda}$ siano molto grandi per le radiazioni corrispondenti ai posti vi-

(1) Compt. Rend. CXXVII, pag. 899; CXXVIII, pag. 145.

(2) Nella Nota sopracitata, accennando ad alcune esperienze qualitative preliminari, si disse che al crescere dell'intensità del campo le linee luminose ed oscure prodottesi per la presenza di quello, si slargano. A questo bisogna aggiungere che ogni riga corrispondente ad una data rotazione, non ostante tale slargamento (simultaneo ad un allontanamento dal bordo della banda) rimane meno larga di quella alla quale spostandosi si è sostituita.

cini alla riga stessa; e ciò contrariamente a quanto si prevederebbe con la teoria del Becquerel.

Per il modo come è stata dedotta, la (2) è solo applicabile ai corpi che presentano in modo sensibile l'effetto Zeemann. Molti sono però i corpi dotati della proprietà di far girare sotto l'azione di un campo magnetico il piano di polarizzazione della luce che li attraversa, senza presentare righe di assorbimento nella parte visibile dello spettro.

Nella teoria della dispersione di Helmholtz, come si sa, viene ammesso che tali corpi diano righe di assorbimento nello spettro invisibile, e con tale ipotesi si possono ad essi applicare le formule dedotte da quella teoria. Or supponendo, come fa anche il Fitzgerald, che queste tali linee invisibili presentino anch'esse il fenomeno Zeemann, si avrebbe, per luce circolare secondo l'ipotesi da noi sopra enunciata, uno spostamento della curva degli indici e per conseguenza per luce polarizzata rettilineamente una rotazione del piano di polarizzazione espressa dalla (2), proporzionale perciò, come in molti casi risulta anche dall'esperienza [1], al valore di $\frac{dn}{d\lambda}$.

Ma, oltre che per questi corpi, lo studio della dispersione rotatoria magnetica è stato fatto anche per alcune sostanze che danno bande di assorbimento nello spettro visibile. Per esse il Cotton [2] non è riuscito, anche con metodi sensibili, a trovare un'azione del magnetismo sull'assorbimento dei raggi circolari. Alle sue esperienze perciò non è applicabile la (1), ed in corrispondenza di ciò la curva di dispersione rotatoria magnetica di questi corpi in vicinanza delle righe di assorbimento è del tutto diversa nel suo andamento generale, da quella trovata sperimentalmente per i corpi che presentano l'effetto Zeemann. Per questi infatti, come si è visto, i valori della rotazione crescono da entrambi i lati dall'esterno verso i bordi della banda, come crescono i valori di $\frac{dn}{d\lambda}$ nella curva di dispersione anomala, mentre dalle sue esperienze il Cotton ricava che « esaminando le diverse radiazioni andando dal rosso al « violetto ed avvicinandosi ad una banda di assorbimento la curva di disper- « sione (rotatoria magnetica) si modifica: le sue ordinate crescono più rapi- « damente che nella regione in cui il liquido è trasparente, in modo che la « curva ottenuta passa al di sopra di quella che si avrebbe se il liquido fosse « trasparente.....; se si osserva ciò che avviene all'altro limite di una banda « di assorbimento partendo dal violetto e andando verso il rosso le ordinate « decrescono rapidamente e la curva passa *al di sotto* di quel che si trove- « rebbe se non intervenisse l'assorbimento ».

(1) Becquerel, Compt. Rend. CXXV, pag. 679.

(2) Éclairage électrique, n. 20-31, 1896. Ann. de chim. et de phys., Série VII, t. 8, pag. 347, 1896.

Questo differenzia notevolmente i risultati sperimentali del Cotton da quelli da noi ottenuti: per cui se le esperienze del primo presentano delle analogie con le nostre, pure a noi sembra che tra le une e le altre ci siano delle differenze molto notevoli che non permettono fra esse un avvicinamento troppo intimo; come anche non ci pare che le esperienze del Cotton siano, come dice il Becquerel, una conferma della sua teoria, secondo la quale i valori della rotazione magnetica dovrebbero essere proporzionali a $\frac{dn}{d\lambda}$. Data infatti la forma della curva di dispersione anomala, poichè in essa i valori della $\frac{dn}{d\lambda}$ sono sempre crescenti dall' esterno verso i bordi della banda, anche crescenti dovrebbero essere quelli della rotazione, il che non è stato trovato nelle esperienze del Cotton. Vi sarebbe accordo solo nel caso che per i corpi da quest'ultimo studiati, in vicinanza delle bande di assorbimento, la curva degli indici, contrariamente a quanto è stato trovato per tutte le altre sostanze, non presenti dai due lati di ciascuna banda curvature opposte.

Fisica. — *Ricerche sull' inclinazione magnetica nel I secolo a. Cr. e nel I secolo dell'Èra volgare, calcolata da vasi fittili di Arezzo e Pompei* (1). Nota del dott. G. Folgheraiter, presentata dal Socio Blaserna.

Arezzo. Il civico Museo di Arezzo possiede una raccolta assai importante di vasi appartenenti tutti ad una stessa epoca, bene determinata dalla marca di fabbrica, che portano impressa. In una delle sale del Museo sono disposti tutti i vasi rossi e le matrici, che vennero in luce nel 1883 (2), mentre si facevano i fondamenti di una fabbrica in aggiunta agli Asili d' infanzia: in essi domina il nome di Marco Perennio o dei suoi servi, ed appartengono alla prima metà del I secolo a. Cr. Alla stessa epoca appartengono pure le altre collezioni di vasi rossi provenienti da scavi diversi e donate al Museo da varî oblatori.

Degli oggetti scoperti nel 1883 potei utilizzare per le mie ricerche 14 matrici, delle quali però una sola era sana e completa. Della raccolta donata dal comm. Gamurrini potei esaminare un'urna cineraria perfettamente conservata e 5 matrici; della raccolta donata dal Ministero della P. Istruzione una matrice, di quella donata dal cav. V. Funghini una matrice, e finalmente dell' antica raccolta di proprietà del Museo esaminai le 5 urne cinerarie aretine, che sono assai bene conservate. In complesso ho quindi

(1) Vedi questo volume pag. 69.

(2) Atti della R. Accad. dei Lincei, Memorie della Classe Scienze morali ecc., serie 3ª, vol. XI, 1882-83, pag. 451.

determinato la distribuzione del magnetismo in 6 urne cinerarie ed in 21 matrici.

Delle 6 urne cinerarie 5 hanno forma eguale: sono leggermente coniche colla base più ristretta della bocca. La sesta (n. 82) è di forma sferoidale. Le loro dimensioni sono le seguenti:

Urna donata dal Gamurrini	$a =$ mm. 167,	$b =$ mm. 196,	$h =$ mm. 213
» n. 81	» 195	» 218	» 203
» » 82	» 81	» 117	» 189
» » 83	» 195	» 205	» 222
» » 84	» 175	» 230	» 166
» » 86	» 195	» 210	» 248

dove a e b rappresentano rispettivamente il diametro della base e della bocca, ed h l'altezza dell'urna.

Nella seguente tabella sono riportate le intensità magnetiche [1] delle urne nei quattro punti della sezione normale, nei punti cioè dove si hanno i valori massimi e minimi, eguali rispettivamente a $K + K'$ e $K - K'$. L'ultima colonna dà l'inclinazione magnetica calcolata con questi valori, supposto che le urne siano rimaste durante la cottura col loro asse verticale.

Tabella I.

	Base		Bocca		Inclinazione magnetica
	$K+K'$	$K-K'$	$K+K'$	$K-K'$	
Urna Gamurrini	+ 0° 43',4	+ 0° 15',4	— 0° 15',7	— 0° 5',6	62° 18'
» N. 81	+ 0 45, 7	+ 0 9, 3	— 0 16, 0	— 0 4, 8	56 46
» » 82	— 1 32, 0	— 0 28, 6	+ 1 33, 7	+ 0 55, 2	63 59
» » 83	+ 2 27, 7	+ 0 28, 9	— 1 22, 3	— 0 24, 4	56 44
» » 84	— 0 13, 2	— 0 1, 5	+ 0 11, 4	+ 0 7, 7	64 47
» » 86	+ 0 21, 0	+ 0 9, 7	— 0 10, 5	— 0 1, 7	63 43

Da questa tabella risulta, che il valore dell'inclinazione magnetica è compreso tra un minimo di 56° 44' ed un massimo di 64° 47'. La grande differenza tra questi due valori estremi non deve punto produrre meraviglia, nè essere attribuita ad incertezza del metodo di misura. La distribuzione del magnetismo, anche se prodotta dall'azione dello stesso campo, non può essere eguale nelle diverse urne che alla condizione, che il loro asse geometrico abbia avuto durante la cottura la stessa direzione. Ora anche tenendo conto, che il vasaio deve avere avuto la massima cura nel collocare i suoi vasi nella posizione più stabile poggiandoli colla loro base sul fondo della fornace o sopra altri vasi, questa condizione non può essere in pratica soddisfatta rigorosamente. Può darsi, che il fondo stesso della fornace non sia stato un piano orizzontale, ma una superficie leggermente concava o convessa,

[1] Le intensità magnetiche vengono espresse mediante gli angoli di deflessione, che subisce l'ago dell'intensimetro in seguito all'avvicinamento dei varî punti di un oggetto.

che i singoli vasi non abbiano base e bocca fra loro parallele, e che infine le deformazioni quasi inevitabili dovute all' ineguale restringimento dell' argilla durante la cottura abbiano dato luogo a dei piccoli spostamenti dalla posizione primitiva dei vasi. Per tutte queste cause è possibile, che alcuni di essi abbiano avuto il loro asse inclinato di alcuni gradi rispetto a quello di altri vasi.

Non si può pretendere quindi di avere dei risultati più concordanti, anche quando si abbia la certezza, che i vasi siano stati cotti assieme nella stessa fornace, e bisogna accontentarsi di assumere come valore dell' inclinazione magnetica la media dei valori ottenuti, che nel nostro caso è $61^{\circ} 23'$.

Delle 21 matrici sulle quali feci le misure, solo due erano sane e complete; tutte le altre sono restaurate e generalmente anche incomplete. Non ne ho potuto però tenere in considerazione che 13, perchè le altre 8 mi diedero una distribuzione del magnetismo anormale; ne trovai fra queste ultime perfino di quelle, in cui il massimo e minimo della base erano disposti sopra un diametro ad angolo retto con quello, su cui si trovavano il massimo e minimo della bocca: non può essere stato soltanto il campo magnetico terrestre, che ha orientato in esse il magnetismo, ma è intervenuta qualche altra azione, che ora non sarebbe possibile precisare.

Le matrici non hanno un numero progressivo d' inventario, per cui sono costretto a dare delle indicazioni speciali per distinguerle una dall' altra. La loro forma è sempre di cono tronco, che si apre dalla base verso la bocca. Esse sono:

1. Matrice completa, spaccata secondo una generatrice e restaurata nel mezzo della base; proviene dagli scavi del 1883. Il diametro della base $a =$ mm. 95, il diametro della bocca $b =$ mm. 200, l' altezza $h =$ mm. 98.

2. Matrice restaurata, manca qualche pezzettino; provenienza idem; $a =$ mm. 90, $b =$ mm. 180, $h =$ mm. 72.

3. Matrice completa in 4 pezzi, provenienza idem; $a =$ mm. 65, $b =$ mm. 135, $h =$ mm. 84.

4. Matrice molto alta, restaurata, mancano varî pezzetti, provenienza idem; $a =$ mm. 75, $b =$ mm. 110, $h =$ mm. 120.

5. Matrice in molti frantumi, mancano dei pezzetti, provenienza idem; $a =$ mm. 62, $b =$ mm. 138, $h =$ mm. 90.

6. Matrice assai grande, in molti frantumi, mancano dei pezzetti, provenienza idem; $a =$ mm. 98, $b =$ mm. 212, $h =$ mm. 120.

7. Matrice sana, provenienza idem; $a =$ mm. 90, $b =$ mm. 160, $h =$ mm. 76.

8. Matrice restaurata, quasi completa, provenienza idem; $a =$ mm. 66, $b =$ mm. 134, $h =$ mm. 95.

9. Matrice ad ornato in due soli pezzi, completa, provenienza idem; $a =$ mm. 75, $b =$ mm. 130, $h =$ mm. 55.

10. Grande matrice a figure, restaurata, mancano alcuni pezzetti fra cui il mezzo della base, appartiene alla raccolta Gamurrini; $a =$ mm. 125, $b =$ mm. 200, $h =$ mm. 90.

11. Matrice a figure, completa ed in grandi frammenti, della raccolta Gamurrini; $a =$ mm. 99, $b =$ mm. 156, $h =$ mm. 95.

12. Matrice ad ornato in un sol pezzo, manca una parte della bocca; dalla raccolta Gamurrini; $a =$ mm. 70, $b =$ mm. 160, $h =$ mm. 85.

13. Matrice ad ornato, restaurata ma completa, della raccolta Funghini; $a =$ mm. 96, $b =$ mm. 189, $h =$ mm. 80.

Nella seguente tabella sono riportati i valori dell' intensità magnetica delle matrici nei quattro punti della sezione normale, e l' inclinazione del campo magnetico terrestre calcolata in base a questi valori.

TABELLA II.

Matrici	Base		Bocca		Inclinazione magnetica
	K + K′	K — K′	K + K′	K — K′	
N.° 1	— 0° 12′,0	— 0° 7′,3	+ 0° 35′,0	+ 0° 12′,5	66° 22′
» 2	— 0 20,4	— 0 8,7	+ 0 22,2	+ 0 2,2	28 45
» 3	— 3 16,3	— 1 35,4	+ 2 21,8	+ 0 54,7	64 35
» 4	— 1 26,5	— 0 14,2	+ 0 50,2	+ 0 31,0	56 25
» 5	— 2 22,2	— 1 0,4	+ 1 27,8	+ 0 20,5	59 16
» 6	— 2 40,2	— 0 48,8	+ 1 48,4	+ 0 31,2	59 4
» 7	+ 1 57,5	+ 0 5,6	— 2 24,6	— 0 8,8	39 0
» 8	+ 5 13,1	+ 2 13,3	— 3 11,7	— 0 19,4	56 16
» 9	— 3 48,7	— 1 51,6	+ 2 51,3	+ 0 55,9	64 45
» 10	+ 1 9,0	+ 0 29,9	— 0 32,6	— 0 8,7	65 17
» 11	— 0 18,0	— 0 5,1	+ 0 27,3	+ 0 11,6	62 40
» 12	— 1 18,5	— 0 15,6	+ 0 36,1	+ 0 18,4	57 39
» 13	+ 1 24,1	+ 0 32,8	— 0 43,2	— 0 2,9	59 16

Se si escludono i valori trovati per le due matrici 2 e 7, l' inclinazione magnetica è compresa tra un minimo di 56° 16′ ed un massimo di 66° 22′. Dalla distribuzione del magnetismo indotto nelle due matrici 2 e 7 l' inclinazione del campo magnetico terrestre risulterebbe invece assai più piccola ed in disaccordo con quella trovata per le urne cinerarie. Probabilmente questi due vasi furono appoggiati alla superficie laterale di altri vasi per utilizzare lo spazio nella parte alta della fornace. Quest' ipotesi potrebbe essere accettata sia per la forma conica, sia per l' altezza relativamente piccola di queste due matrici rispetto a quella delle altre. Altre cause della discordanza non ne saprei trovare, perchè la distribuzione del magnetismo fu trovata in esse assai regolare. Lasciando da parte questi due vasi, si ottiene come valore medio dell' inclinazione magnetica 61° 3′ molto d' accordo con quello trovato col mezzo delle urne cinerarie.

Dall' esame delle tabelle I e II si vede, che la base dei varî oggetti esaminati ha una polarità magnetica ora nord ora sud. Ciò dipende naturalmente dal fatto, che accanto ad un vaso diritto ne fu collocato uno rove-

sciato, come si usa anche al presente. Resterebbe quindi il dubbio, se l'inclinazione magnetica era a quell'epoca boreale come al presente o australe. Posso però rispondere con certezza a questa questione, perchè, come già altra volta accennai (1), ebbi occasione di esaminare la parte inferiore di una fornace dell'epoca, sepolta nella cantina del palazzo Occhini di Arezzo, nella quale si trovavano ancora avanzi di vasi colla sigla di M. Perennio. Ebbi il permesso di staccare dalle pareti un masso, che per l'azione del calore era stato ridotto in scoria potentemente magnetizzata; lo ridussi grossolanamente alla forma di cilindro, e così potei constatare, che la parte superiore del masso possedeva magnetismo sud e quella inferiore magnetismo nord.

L'inclinazione magnetica quindi nella prima metà del I secolo a. Cr. era boreale come al presente, ed il suo valore era a press'a poco eguale all'attuale o forse un po' maggiore, giacchè, come risulta dalla Carta magnetica d'Italia (2), ora in Arezzo essa è circa 59° 40′ (epoca 1892,0).

Pompei. Nel Museo nazionale di Napoli esiste una copiosa raccolta di vasi fittili trovati negli scavi di Pompei; tra essi ho scelto per le mie ricerche quei vasi, dei quali si può stabilire con una certa sicurezza l'epoca ed il luogo della fabbricazione. Per questo motivo ho preso in esame oggetti d'uso domestico continuato come vasi per la conservazione di sostanze alimentari, tazze per bere o per altri scopi trovate nelle abitazioni. È assai probabile, che oggetti così comuni e di poco costo appartengano all'industria locale o di paesi assai vicini, come Nola, e che la loro fabbricazione risalga a pochissimi anni prima della distruzione di Pompei.

Ho lasciato da parte tutti i vasi di qualsiasi forma scoperti nelle tombe, e di più quelli che per il loro uso domestico potevano avere subìto delle modificazioni nella distribuzione del loro magnetismo, come i tegami ed i forni, che col loro fondo o lateralmente venivano esposti al fuoco.

Quando nell'ottobre 1897 visitai il Museo di Napoli si trovavano esposti nella collezione fittile pompeiana soltanto cinque oggetti (3) adatti per le mie

(1) Vedi questi Rendiconti, vol. VI, 1° sem. 1897, pag. 69, nota 2ª.

(2) Annali dell'Ufficio centrale meteorologico e geodinamico italiano, serie II, vol. XIV, parte 1ª. 1892, tav. VIII.

(3) In realtà vi erano pure 4 anfore, ma queste avevano la loro superficie in gran parte annerita, segno manifesto che esse furono adoperate per la cottura delle vivande. Le volli esaminare egualmente, e trovai una distribuzione del magnetismo molto diversa da anfora ad anfora. L'inclinazione dell'asse magnetico fu trovato:

per l'anfora n. 309 eguale a 57° 50′
» » » 311 » 26° 41′
» » » 338 » 51° 8′
» » senza n. » 12° 2′.

Ora siccome è costume di porre questi recipienti d'argilla per la cottura delle vivande, non al di sopra ma accanto al fuoco, è naturale che la superficie esposta direttamente all'azione della fiamma è portata ad una temperatura notevolmente più alta del resto

ricerche; erano delle grandi tazze, *orciuoli*, colla bocca un po' svasata e muniti di un'ansa; ma nel magazzino ne trovai altre 22 e di più rinvenni 12 vasi per conservare gli alimenti: sicchè in complesso di oggetti di Pompei ne ho esaminati 39.

Tutti gli orciuoli sono perfettamente della stessa forma, e quasi tutti benissimo conservati. Sono assai poco diversi tra loro in grandezza, come si vede dal seguente specchietto, nel quale sono dati i limiti, entro i quali variano le loro dimensioni.

Diametro massimo della base	mm. 63,	minimo	mm. 61
" " bocca	" 124	"	" 119
Altezza "	" 161	"	" 152

Nella seguente tabella riporto le intensità magnetiche trovate nei 4 punti della sezione normale ed il valore dell'inclinazione magnetica da esse dedotto. Nella 1ª colonna è dato il numero, col quale sono contradistinti gli orciuoli esposti nel Museo, mentre colle lettere dell'alfabeto sono notati gli altri orciuoli trovati nel magazzino.

TABELLA III.

	Base		Bocca		Inclinazione magnetica
	K + K'	K — K'	K + K'	K — K'	
a	+ 0° 36',9	+ 0° 17',1	— 0° 18',8	— 0° 7',5	62° 7'
b	0 42,9	20,7	20,6	6,9	62 8
c	0 38,8	19,6	21,7	6,9	62 21
d	0 53,4	15,8	29,4	20,4	62 57
e	0 40,5	17,3	13,2	6,6	63 5
f	0 43,3	22,8	21,6	6,7	63 36
g	0 35,9	20,1	25,7	8,4	63 59
h	0 44,1	23,2	22,9	8,3	64 31
i	0 27,2	15,4	21,6	8,5	65 35
k	0 38,4	20,9	21,1	8,7	65 58
l	0 34,6	19,0	28,7	12,6	66 12
210	0 51,3	25,2	18,5	10,5	66 32
m	0 26,8	17,3	18,3	6,1	66 53
n	0 27,4	15,8	21,8	9,5	66 54
o	0 29,9	18,3	23,1	9,1	67 10
p	1 26,0	39,2	45,1	29,9	67 33
206	0 44,0	22,8	19,2	11,5	68 32
233	0 35,7	20,5	19,3	10,1	69 20
q	0 48,6	28,4	27,3	16,0	70 41
r	0 31,2	18,7	19,5	11,3	71 1
s	0 29,4	19,8	21,9	9,8	71 29
t	0 40,6	27,5	30,1	14,9	71 35
211	0 34,1	21,8	16,5	9,0	71 58
u	0 31,4	20,8	27,2	14,2	72 2

della superficie, che riceve il calore molto lentamente per la poca conducibilità dell'argilla. Ha quindi luogo un'induzione delle parti del vaso meno riscaldate e dotate perciò di maggior forza coercitiva sulle parti più calde. Questa è probabilmente la causa delle discordanze trovate.

Dall' esame della tabella si vede, che l' inclinazione magnetica calcolata dalla distribuzione del magnetismo negli orciuoli (1) varia da un minimo di 62° 7′ ad un massimo di 72° 2′. Il valore medio è 66° 50′, notevolmente superiore a quello trovato per i vasi di Arezzo.

Ad eguale risultato si arriva anche dalla distribuzione del magnetismo nei vasi per conservare gli alimenti: questi hanno una forma sferoidale, colla bocca molto svasata, e generalmente sono sprovvisti di anse. Se si eccettuano il vaso *e′*, che è alto mm. 275, e l'anforetta *g′* le cui dimensioni sono $a =$ mm. 78, $b =$ mm. 114, $h =$ mm. 217, per tutti gli altri le dimensioni variano entro questi limiti:

Diametro della base	*a*	massimo	mm. 74,	minimo	mm. 63
" " bocca	*b*	"	" 143	"	" 136
Altezza	*h*	"	" 188	"	" 178.

Nella seguente tabella sono segnate le intensità magnetiche nei punti della sezione normale e l' inclinazione magnetica, che da esse si ricava.

TABELLA IV.

	Base		Bocca		Inclinazione magnetica
	K + K′	K — K′	K + K′	K — K′	
a′	+ 0° 5′,5	+ 0° 2′,4	— 0° 3′,7	— 0° 1′,4	62° 13′
b′	+ 1 3, 1	+ 0 24, 8	— 0 32, 7	— 0 14, 1	62 21
c′	+ 0 7, 3	+ 0 3, 7	— 0 4, 6	— 0 1, 8	65 20
d′	+ 1 36, 4	+ 0 52, 1	— 1 1, 9	— 0 21, 5	65 35
e′	+ 0 38, 3	+ 0 28, 7	— 0 46, 7	— 0 11, 4	65 54
f′	+ 0 11, 8	+ 0 8, 3	— 0 17, 9	— 0 6, 8	67 8
g′	— 2 2, 0	— 1 2, 2	+ 1 43, 1	+ 0 55, 2	67 31
h′	+ 0 8, 4	+ 0 5, 8	— 0 8, 4	— 0 3, 1	69 1
i′	+ 0 21, 4	+ 0 12, 8	— 0 9, 8	— 0 5, 5	71 59
l′	+ 0 22, 3	+ 0 4, 1	— 0 4, 0	— 0 0, 3	48 20

Per la distribuzione del magnetismo libero in questi vasi (2), eccettuato *l′*, l' inclinazione magnetica varia entro gli stessi limiti dati dalla tabella III, ed anche la media, che è 66° 20′, corrisponde bene con quella data dagli orciuoli.

(1) I tre orciuoli che non compariscono nella tabella, hanno una distribuzione irregolare del magnetismo: il n. 208 ha uno dei massimi spostato di 90° dal piano verticale che contiene gli altri 3 punti; in un altro orciuolo d'un colore rosso vivo, che lo distingue da tutti gli altri vasi della stessa forma, l' intensità magnetica in luogo di variare regolarmente da punto a punto conserva lo stesso valore per circa un terzo della periferia della bocca: il terzo orciuolo ha la bocca ovale.

(2) Dei due vasi non riportati nella tabella uno di fattura molto rozza e molto più pesante degli altri probabilmente ha dei punti conseguenti, perchè alla periferia della bocca mostra una polarità nord, che varia regolarmente da punto a punto, ed alla base ha pure polarità nord, e solo in pochi punti di essa mostra una debole polarità sud. L'altro ha la bocca deformata in seguito alla cottura.

Dalle mie misure risulterebbe quindi, che in Pompei, o meglio nei luoghi di fabbricazione dei vasi pompeiani, l' inclinazione magnetica poco prima della distruzione della città era all' incirca 66°, 5.

Questo valore è a press' a poco 5° maggiore di quello avuto per l' epoca di fabbricazione dei vasi aretini; e se si ammette, che anche allora come al presente in Italia l' inclinazione magnetica sia andata diminuendo da nord a sud, la differenza d' inclinazione magnetica tra la prima metà del I secolo a. Cr. e la seconda metà del I secolo dell' Èra volgare dovrebbe essere stata ancora più pronunciata.

Però qui devo richiamare alla mente, che Pompei ed i paesi circostanti, che le fornivano le stoviglie, erano alle falde o poco distanti dal Vesuvio, e che le regioni vulcaniche sono più o meno perturbate per la presenza dei materiali magnetici eruttati. Ma anche se si arrivasse a stabilire con precisione le località, ove furono cotti i vasi antichi, noi non saremmo in grado di conoscere l' entità delle perturbazioni magnetiche ivi esistenti avanti l' eruzione del 79 [1], perchè le numerose eruzioni avvenute negli ultimi 18 secoli possono avere modificate profondamente le proprietà magnetiche del terreno.

Nel mettere quindi a confronto i risultati avuti dai vasi di Pompei con quelli avuti dai vasi aretini non bisogna perciò dimenticarsi, che la prima località poteva essere soggetta a delle sensibili perturbazioni, che ora noi non siamo in grado di precisare. Ma se vogliamo fare astrazione da questa causa d' incertezza, e ci contentiamo di giudicare delle perturbazioni allora esistenti da quelle, che si trovano al presente, possiamo asserire che esse erano piuttosto deboli. Di fatto se sulla Carta magnetica d' Italia, già citata, si tira una linea passante per Napoli e parallela all' isoclina 57°, essa attraversa Montevergine presso Avellino, località non perturbata, nella quale furono fatte dal prof. Palazzo le misure magnetiche nel 1891. L' inclinazione magnetica in quella stazione era 56° 48′ (epoca 1891, 5) [2]: ora il valore dell' inclinazione magnetica in Napoli (Capodimonte) per l' epoca 1891, 0 è precisamente 56° 48′ [3]. La concordanza perfetta dei due valori indicherebbe, che le roccie vulcaniche, sulle quali trovasi l'Osservatorio magnetico di Napoli, non esercitano un' azione perturbatrice sensibile sulle misure magnetotelluriche.

Indirettamente ho pure io constatato, che tale azione a Napoli è poco sensibile. Nell' ottobre del 1897 raccolsi dei pezzi di tufo dalle cave poste

[1] Che anche prima del 79 abbiano avuto luogo delle eruzioni vulcaniche, e che la regione vesuviana sia stata magneticamente perturbata, lo prova ad evidenza il fatto, che dalle pareti dell'anfiteatro di Pompei furono dal Melloni levati dei massi di lava dotati di magnetismo permanente. Vedi: *Ricerche intorno al magnetismo delle roccie*. R. Acc. delle Scienze di Napoli, vol I, 1853.

[2] Annali dell'Ufficio centrale meteor. e geodinamico italiano, serie 2ª, vol. XIV, parte 1ª, 1892, pag. 74.

[3] Calendario dell'Osservatorio al Collegio Romano. anno XII, 1891, pag. 5.

nel Vallone delle Fontanelle e dalla roccia, sulla quale è edificato il Castel S. Elmo; li esaminai al mio intensimetro e non ottenni deviazione alcuna. Però trovai delle sensibili azioni avvicinando all' istrumento i pezzi di lava presi dalle cave di S. Giorgio a Cremano e di Torre del Greco, ed i pezzi staccati dalla corrente fangosa, che ha sepolto la città di Ercolano. Tali azioni sono però molto più deboli di quelle, che si trovano nelle roccie vulcaniche del Lazio.

Se volessimo ammettere addirittura come trascurabili le perturbazioni prodotte sull' inclinazione dalle roccie eruttate dal Vesuvio, il valore di questo elemento magnetico sarebbe cresciuto di circa 8° dalla prima metà del I secolo a. Cr. sino all' anno 79 dell' Éra volgare, ossia nel corso di un secolo e mezzo (perchè la differenza d' inclinazione tra Arezzo e Pompei è circa 3°).

Ora siccome sappiamo da misure dirette, che l' inclinazione magnetica a Parigi è diminuita di circa 10° dal 1671 al presente, ossia nel periodo di 2 secoli e un quarto, così si scorge, che le sue variazioni circa 20 secoli fa non potevano essere molto diverse da quelle, che sono attualmente, e che mentre l' inclinazione *segue ora il ramo discendente della curva, allora seguiva il ramo ascendente* tendendo verso un massimo, dal quale forse non era molto lontana all' epoca della distruzione di Pompei.

Per quanto riguarda l' intensità del campo magnetico terrestre all' epoca della fabbricazione dei vasi aretini e pompeiani nulla si può dire di positivo. Evidentemente la questione verrebbe decisa facilmente, se si avesse la certezza, che un vaso cotto successivamente parecchie volte nello stesso campo mostrasse la stessa intensità magnetica; in tal caso basterebbe prendere un vaso aretino o pompeiano, rimetterlo al forno e determinare l' intensità magnetica, che il campo magnetico terrestre vi produce, e trovare il rapporto con quella prodotta dal magnetismo terrestre di 20 secoli fa. Ma tanto dalle mie esperienze, quanto dall' esame delle tabelle sopra riportate risulta, che sia cuocendo assieme nella stessa fornace vasi di eguale grandezza e forma, sia ripetendo la cottura parecchie volte sullo stesso vaso, l' intensità di magnetizzazione non è costante. Di fatto per gli orciuoli *b*, *d*, *e*, *f*, *h*, *l*, *n*, *o*, 206 (vedi tabella III) eguali fra loro in forma e grandezza, le intensità magnetiche totali calcolate dall' intensità di una delle componenti del magnetismo indotto e dall' inclinazione della risultante) sono rispettivamente

0° 45′,4   1° 6′,8   0° 43′,5   0° 52′,7   0° 54′,6
0° 39′,9   0° 51′,8   0° 40′,5   0° 43′,6   0° 52′,4

Per il cilindro 8 (vedi pag. 74 di questo volume) cotto 6 volte in diverse orientazioni l' intensità magnetica totale fu trovata successivamente

0° 23′,4   0° 25′,6   0° 51,3   0° 25′,7   0° 29′,5   0° 50′,7.

Forse ripetendo la cottura di un grande numero di vasi antichi di eguale grandezza e per parecchie volte si potrebbe giungere ad ottenere un valore di questo elemento magnetico non molto lontano dal vero.

Fisica. — *Sui battimenti luminosi e sull' impossibilità di produrli ricorrendo al fenomeno di Zeemann.* Nota del dott. O. M. Corbino, presentata dal Socio Blaserna.

Fisica. — *Sulla dissociazione dell' ipoazotide* (1). Nota del dott. A. Pochettino, presentata dal Socio Blaserna.

Fisica terrestre. — *Sopra un sistema di doppia registrazione negli strumenti sismici.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio Tacchini.

Chimica. — *Azione delle ammine o delle ammidi sull' acenoftenchinone.* Nota di G. Ampola e V. Recchi, presentata dal Socio Paternò.

Chimica. — *Sopra alcuni nitrosoindoli.* Nota di A. Angeli e M. Spica, presentata dal Socio G. Ciamician.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sostituzione di più atomi di idrogeno del benzolo per opera del mercurio.* Nota preventiva di Leone Pesci, presentata dal Socio G. Ciamician.

Dreher ed Otto (1) prepararono, or sono molti anni, l' idrossido ed i sali di *mercuriofenile* $(C_6H_5Hg)'$ e recentemente O. Dimroth (2) ottenne l' acetato di questo radicale seguendo un processo simile a quello che, da molto tempo, io pratico nella preparazione dei composti organo-mercurici derivati dalle amine aromatiche; valendosi cioè dell'acetato mercurico che fece direttamente reagire sul benzolo (3).

(1) Ber. II, 549, J. f. pr. Chem. I, 179.

(2) Ber. XXXI, 2154.

(3) In altro luogo (Chem. Zeit. XXIII, 58) ho già espresso la mia soddisfazione per questa ed altre simili reazioni ottenute da quel Chimico; ed ho detto come tale soddisfa-

Avendo di recente [1] constatato che fondendo l'acetanilide colle debite proporzioni di acetato mercurico si possono sostituire due atomi di idrogeno benzenico con altrettanti atomi di quel metallo, pensai di tentare la sostituzione di più atomi di idrogeno anche nel semplice benzolo, per opera del mercurio, operando sul mercuriodifenile in modo analogo.

Ho ottenuto così tre nuovi composti e cioè gli acetati di *dimercuriobenzolo, trimercuriobenzolo e tetramercuriobenzolo.*

Acetato di dimercuriobenzolo $C_6H_4Hg_2(C_2H_3O_2)_2$. Una miscela composta di gr. 2,5 di mercuriodifenile e gr. 9,5 di acetato mercurico puro fu scaldata al bagno d'olio. La massa fuse verso 120°: portata a 150° svolse acido acetico, divenne rapidamente pastosa ed aumentò poi progressivamente di consistenza così da farsi in breve tempo solida. Il prodotto fu fatto cristallizzare ripetutamente dall'acido acetico diluito bollente. Si ottenne in forma di mammelloni microscopici alquanto solubili nell'alcol e nel benzolo bollenti, insolubili nell'acqua. Esposto all'azione del calore si scompose verso 230° senza fondere. Si sciolse facilmente nell'acetato di ammonio ammoniacale e ne precipitò inalterato per aggiunta di acido acetico. Trattato con iposolfito di sodio si sciolse completamente, formando un liquido il quale dimostrò di non contenere mercurio ionizzabile. Difatti per azione dell'idrogeno solforato e dei solfuri alcalini non si formò in questo liquido solfuro mercurico, ma invece un precipitato bianco che non ho peranco studiato. Evidentemente adunque il mercurio contenuto in questo composto e tutto nucleare. Seccato sopra l'acido solforico diede all'analisi i risultati seguenti:

I	gr. 0,6048	di sostanza	fornirono	gr.	0,4733	di HgS
II	gr. 0,3149	"	"	"	0,2465	"
III	gr. 0,3265	"	"	"	0,2560	"

	calcolato	trovato		
		I	II	III
Hg °/₀	67,34	67,48	67,48	67,59

Idrossido di dimercuriobenzolo $C_6H_4Hg_2(OH)_2$. Si preparò aggiungendo idrossido di potassio all'acetato molto diviso, stemperato nell'acqua e lasciando la massa a sè per circa ventiquattro ore. È una polvere bianca composta di mammelloni microscopici, insolubili nei solventi ordinarî. Possiede reazione alcalina. Esposta all'azione del calore non fonde, ma scaldata a tem-

zione mi provenga dal convincimento che siano state le pubblicazioni mie e quelle dei miei allievi che lo hanno indotto a questo genere di ricerche. Le quali gli hanno dato occasione di preparare importanti composti, confermando quanto io aveva già dal 1897 (Zeit. f. anorg. Chem. XV, 210) affermato e dimostrato e cioè che i radicali negativi degli acidi esistenti nei sali di mercurio, possono separare idrogeno dal benzene sostituendogli il metallo e producendo contemporaneamente gli acidi rispettivi.

[1] Chem. Zeit., loc. cit.

peratura molto elevata, deflagra vivamente lasciando un carbone molto leggero:

gr. 0,3900 di sostanza seccata sopra l'acido solforico, formano gr. 0,3571 di HgS

calcolato	trovato
Hg °/₀ 78,43	78,93

È molto verosimile che il mercurio nel dimercuriobenzolo occupi i posti 1, e 4.

Acetato di trimercuriobenzolo $C_6H_3Hg_3(C_2H_3O_2)_3$. Una miscela composta di gr. 3,5 di mercuriodifenile e gr. 16 di acetato mercurico venne scaldata a fusione e portata rapidamente a 150-160°. Si svolse acido acetico ed il prodotto in breve spazio di tempo, si fece solido. Si polverizzò, si trattò con uno sciolto di acetato d'ammonio ammoniacale, nel quale tutto si sciolse all'infuori di una piccola quantità di materia color grigio scuro. Si filtrò ed al liquido, leggermente giallo, si aggiunse acido acetico diluito fino a precipitato persistente, che si separò mediante nuova filtrazione. Il liquido così purificato era scolorito ed addizionato di acido acetico concentrato, fornì un precipitato bianco composto di piccolissimi mammelloni microscopici, poco solubili nell'acido acetico diluito bollente, insolubili nei veicoli ordinarî. Questo prodotto esposto all'azione del calore si decompose, a temperatura molto elevata, senza fondere. Trattato con iposolfito di sodio si comportò come l'acetato di dimercuriobenzolo. All'analisi diede le cifre seguenti:

I gr. 0,4320 di sostanza fornirono gr. 0,3533 di HgS
II gr. 0,4116 » » » 0,3364 »

calcolato	trovato	
	I	II
Hg °/₀ 70,42	70,50	70,46

Idrossido di trimercuriobenzolo $C_6H_3Hg_3(OH)_3$. È una materia polverosa composta di mammelloni piccolissimi insolubili nei veicoli ordinarî. Non fonde, ma scaldata a temperatura elevata sulla lamina di platino si scompone con viva deflagrazione:

I gr. 0,4770 di sostanza fornirono gr. 0,4563 di HgS
II gr. 0,4711 » » » 0,4524 »

calcolato	trovato	
	I	II
Hg °/₀ 82,64	82,47	82,78

Riguardo ai posti occupati dal mercurio in queste combinazioni, accettando per il dimercuriobenzolo la costituzione sopra accennata, mi credo autorizzato ad ammettere che siano i seguenti: 1, 2, e 4; cioè che si tratti del trimercuriobenzolo assimetrico. Il mio supposto ha fondamento principale

sui fatti osservati nello studio dei composti organo-mercurici derivati dalle paratoluidine [1].

Acetato di tetramercuriobenzolo $C_6H_2Hg_4(C_2H_3O_2)_4$. Fu preparato da una miscela di 2 gr. di mercuriodifenile e 13 gr. di acetato mercurico, operando come fu detto per l'acetato di trimercuriobenzolo. È un prodotto polveroso bianco. È insolubile in tutti gli ordinarî solventi. Per opera del calore si scompone senza fondere. Coll'iposolfito di sodio si comporta come gli acetati precedenti:

I gr. 0,4633	di sostanza	fornirono	gr. 0,3856	di HgS
II gr. 0,6097	"	"	" 0,5073	"
III gr. 0,4948	"	"	" 0,4138	"

calcolato	trovato		
	I	II	III
Hg °/₀ 72,07	71,75	71,73	71,96

Idrossido di tetramercuriobenzolo $C_6H_2Hg_4(OH)_4$. È una polvere amorfa di color giallo chiaro. È insolubile nei solventi ordinarî: ha reazione alcalina. A forte temperatura deflagra vivamente.

gr. 0,7335 di sostanza fornirono gr. 0,7242 di HgS

calcolato	trovato
Hg °/₀ 84,93	85,10

È molto probabile che la costituzione del tetramercuriobenzolo sia simmetrica.

Ho fatto reagire il mercuriodifenile con grandissime quantità di acetato, mercurico facilitando la fusione delle miscele mediante l'aggiunta di piccole quantità di acido acetico, ma non ho ottenuto che acetato di tetramercuriobenzolo.

Lo studio di questi composti sarà da me continuato.

Geologia. — *Le roccie trachitiche degli Astroni nei Campi Flegrei.* II. *Esemplari della corrente laterale.* Nota del dott. Luigi Pampaloni, presentata dal Socio De Stefani.

Varietà grigia. — Questa si distingue nettamente dalle altre prime descritte, in quanto che mentre quest'ultime sono veri e proprî vetrofiri trachitici, la roccia in questione invece può essere considerata come una roccia trachitica ipocristallina; però i suoi costituenti, salvo piccolissime varianti, sono identici agli altri della varietà bollosa del cratere centrale.

[1] Zeits. f. anorg. Chem. XVII, 276, Gazz. chim. XXVIII, f. 101.

Detta roccia ipocristallina è di color grigio chiaro, fittamente cosparsa di minute particelle più scure. È compattissima e non presenta bollosità alcuna. Ad occhio nudo è molto difficile il potervi distinguere qualche cristallo che spicchi dalla massa, fatta eccezione di alcune particelle scure di biotite e di augite, e di qualche piccola faccetta lucente di feldispato.

In sezione, per trasparenza la roccia si presenta di un colore più chiaro delle precedenti, mancano i pori gassosi, gli elementi cristallini sono molto più piccoli e specialmente le plaghe incolore di sanidina compariscono assai meno estese.

Sotto il microscopio polarizzante la massa vetrosa appare scarsissima, abbondantissimi sono i microliti di magnetite, sotto forma di globuli e di veri e proprî cristalli, così pure gli aciculi di sanidina e di plagioclasio, i primi con estinzione parallela alla loro lunghezza, i secondi, con un angolo di estinzione di circa 30° lungo la linea di allungamento, nonchè i bastoncelli di augite con angoli varianti dai 40° ai 50° rispetto all' allungamento. Tali microliti sono tutti quanti disposti irregolarmente; ogni accenno di struttura fluidale è quasi completamente scomparso, mentre qua e là abbiamo qualche esempio di struttura keraunoide fra i microliti feldispatici. La lunghezza massima per quelli di feldispato è di 6-7, centesimi di millimetro, e per quelli di augite di 7 centemisi di mm. Inoltre la magnetite si presenta in cristalli un poco più piccoli ma forse più abbondanti che non nella varietà scoriacea; quasi completa è l' assenza di ematite e di limonite.

Circa i cristalli di prima consolidazione dirò che le maggiori plaghe incolore di feldispato non sono così grandi od almeno, se alcune grandi ne esistono, non sono così frequenti come nelle roccie prima descritte. Trattando di queste ho detto come la sanidina abbia la prevalenza e ad essa succedano per numero l' anortite e l' oligoclasio; nella varietà compatta, per contro, noi abbiamo forse una maggior prevalenza del plagioclasio calcifero, a detrimento della sanidina.

Frequenti sono i geminati secondo la legge di Manebach, e l' estinzione dei due gemelli avviene sotto un angolo di circa 40°. Una particolarità interessantissima nei cristalli di plagioclasio è la seguente: Qualora si esaminino alcuni di essi a nicol incrociati e se ne osservi la loro estinzione, noi riusciremo, girando il piattino del microscopio, ad avere un punto in cui lasciano passare il massimo di luce, in modo che tutto il cristallo apparisce ben netto; anzi intorno ad esso vi è una linea scura che lo separa completamente dal magma microlitico. Seguitando a girare di un certo angolo (30° circa) il piattino, abbiamo allora il fenomeno inverso, cioè la completa oscurità nel cristallo e la massima luce nella fascia esterna. Questa zona concentrica esterna è senza dubbio costituita da un feldispato, in quanto che si presenta in tutto e per tutto simile al cristallo centrale, solo vi è l' estinzione invertita. Ho voluto ancora esaminare se l' angolo di questa estinzione

sia identico nelle due zone, ed in alcuni esemplari ho trovato concordanza fra i due valori angolari, in altri per contro ho trovato l'angolo della fascia esterna un po' minore. Questo fatto di trovarsi un feldispato unito ad un altro che esternamente lo circonda è stato descritto da molti, e specialmente dal Washington [1] per la sanidina, la quale in certe roccie della regione di Bolsena è circondata da una fascia di plagioclasio; il Rosenbusch [2] poi descrivendo la speciale struttura zonale nei plagioclasi, ammette che attorno al nucleo più basico si siano depositati altri plagioclasî meno basici; Michel Levy [3] invece supporrebbe trattarsi di una geminazione secondo la legge dell'albite e del periclino.

Senza stare ad esaminare le diverse opinioni, io credo che l'ipotesi del Rosenbusch sia applicabile al nostro caso per quegli esemplari nei quali abbiamo un angolo di estinzione differente fra le due parti, la periferica e la centrale, dove con grandissima probabilità il plagioclasio interno è differente da quello esterno; ma pel caso in cui l'estinzione è identica, questa ipotesi non va. Una spiegazione che io tenterei dare a tal fenomeno sarebbe la seguente, che cioè dopo la consolidazione dei materiali più grossi, l'elemento plagioclasico abbondante del magma rimasto ancora liquido, si sia, durante la solidificazione, disposto attorno al primitivo minerale già cristallizzato, e vi abbia formato questa specie di zona, la quale spesso non è sola, ma apparisce in alcuni punti del cristallo circondata da una terza zona più ristretta e meno appariscente, la cui estinzione avviene nel medesimo senso e col medesimo angolo di quella del nucleo centrale.

È da notarsi poi che gl'inclusi, e massimamente i microscopici globuli di magnetite abbondano in queste zone esterne, mentre sono più rari nel nucleo centrale. Qualche volta esse non fasciano tutto il cristallo, ma, specialmente là dove esso è vicino ad altri grossi minerali di prima consolidazione, si limitano a circondarlo da quel lato ove le sue faccie sono a contatto col magma microlitico.

Abbastanza interessante è il fenomeno presentato da un geminato avente due dei suoi lati inclusi dalla solita fascia di feldispato. Per maggior chiarezza segnerò coi numeri *1* e *2* le faccie dei due cristalli gemelli, e coi numeri *3* e *4* le zone rispettivamente sovrapposte alle faccie. Ora avviene che quando il numero *1* lascia passare il massimo di luce, anche il numero *3* è illuminato, e viceversa quando il numero *1* è oscuro, anche il numero *3* è oscuro; lo stesso è per i numeri *2* e *4*, talchè abbiamo un incrociamento delle due estinzioni con angolo di 30° fra loro.

(1) Loc. cit., pag. 549-550.

(3) Loc. cit., vol. I, pag. 659 ecc.

(3) *Sur les positions d'intensité lumineuse égale dans les cristaux maclés, entre les nicols croisés et applications à l'etude des bandes concentriques des feldspaths.* C. R. 1828, XCIV, pag. 93 e 178.

L' augite, come nella varietà scoriacea, è assai abbondante anche in cristalli di prima consolidazione, i quali, nella maggior parte dei casi sono di colore verde chiaro, circondati da un bordo periferico più scuro, sono insensibilmente pleocroici e ricchi d' inclusioni di magnetite; vi compariscono ancora frequenti distribuzioni zonali variamente colorate attorno ad un nucleo centrale.

Molti di questi cristalli di pirosseno sono nella roccia quasi completamente ricoperti da magnetite; il loro contorno è smangiato e corroso, e la tinta verde quasi del tutto scomparsa, salvo in qualche piccola parte, per cedere il posto a quella opaca, nera dell' ossido di ferro.

Secondo il Rosenbusch (1) si avrebbe per l'augite un fenomeno identico a quello che si verifica e che è stato descritto da molti autori per l' anfibolo, si avrebbe cioè una sostituzione della magnetite al pirosseno, ed una trasformazione di questo in quella per riassorbimento. Ma però stante le varietà generalmente chiare di augite e la loro poca ricchezza in ferro, in quanto che sopra 100 parti del minerale se ne hanno al massimo 25 di ferro, non mi saprei ben capacitare da dove possa provenire questa grande abbondanza di magnetite. L'anfibolo esiste pure, sebbene in piccola quantità nella roccia, ma però non presenta alcuna traccia di trasformazione. La sua descrizione mi parrebbe superflua, in quanto che il suo modo di presentarsi è del tutto identico a quello delle roccie precedentemente descritte.

Lo stesso dirò per la biotite che si trova in sottili listerelle brune, facilissimamente riconoscibili.

Altri minerali non ne ho trovati.

Una *varietà grigia ad elementi cristallini poco appariscenti* differisce assai dalla precedente nei caratteri esterni, in quanto che:

1°. La sua compattezza è assai minore:

2°. I materiali disseminati nella massa sono più appariscenti e vengono a costituire un tutto assai meno omogeneo che non in quella precedenmente descritta. Infatti si distinguono benissimo grossi cristalli neri di biotite, diffusi disordinatamente, e cristalli incolori bianchi, sempre molto grossi di feldispato, così che per questo carattere la roccia potrebbesi lontanamente rassomigliare alla varietà compatta della corrente laterale;

3°. Il suo colore, sempre tendente al grigio, è molto più chiaro.

Le sezioni microscopiche di questa roccia, presentano una massa fondamentale grigia, cosparsa di segregazioni incolore, feldispatiche, di altre nere piccole di magnetite e nere, grosse, listiformi di biotite, di altre infine verdi di augite e di anfibolo.

Le sezioni microscopiche esaminate a forte ingrandimento presentano i seguenti caratteri:

(1) Loc. cit., vol. I, pag. 530.

La massa vetrosa è assai scarsa sebbene più abbondante che nella varietà precedente; grande è la quantità dei microliti augitici e feldispatici, dei quali gli ultimi variano oltremodo sia nella loro lunghezza, sia nel loro aspetto esteriore, comparendo ora dritti, ora in diverso modo incurvati. Anche fra essi ve ne hanno molti sanidinici, i più però si riconoscono per anortite. Nella massa essi si intersecano fra loro in varie linee, così da dar luogo a quella speciale struttura chiamata da Zirckel « intersertale » e dal Rosenbusch « ialopilitica »; la struttura keraunoide per contro è scarsissima.

All' abbondanza del feldispato tien dietro una maggior diffusione nei microliti di augite, i quali generalmente non assumono la forma allungata, ma hanno l' aspetto di piccoli globuli e cristalletti, spesso contenenti delle inclusioni di magnetite. In alcuni di essi la magnetite si è completamente trasformata in ematite.

Finalmente relativamente ai microliti di magnetite dirò che anch' essi sono abbondanti, e di diametro press' a poco uguale a quelli della precedente varietà. Queste microliti ed i globuli di magnetite, esaminati sotto un forte ingrandimento, si vedono contornate da una sostanza giallo-bruna, costituita da limonite. Questo fatto è una conferma evidente che il materiale in questione è esclusivamente magnetite, poichè qualora vi si trovassero altre sostanze che nel loro aspetto potessero rassomigliarle (una fra le altre la Titanite) quest' aureola così colorata attorno al cristallo non vi sarebbe.

Relativamente agli altri cristalli sparsi nella massa niente ho da aggiungere a quello già detto per la roccia precedente. Solamente i cristalli di feldispato sono generalmente molto grandi, in special modo quelli di sanidina, più frequenti degli altri; pochi sono i geminati secondo la legge di Carlsbad, invece più frequenti i geminati secondo quella di Manebach; molti di essi presentano la solita zona concentrica esterna; però nella massima parte di questi cristalli le inclusioni non compariscono nella zona esterna, ma invece nel nucleo centrale. In tre di essi poi ho riscontrato la struttura zonale, mentre non ho mai riscontrato il caso di un feldispato monoclino racchiuso in uno triclino. Nei plagioclasi triclini ho potuto constatare, sia dalla maggior vivacità dei colori di interserenza, sia dall' angolo di estinzione che va dai 14° ai 36° la presenza delle varietà prevalentemente calcifere; più abbondante di tutti l'anortite, poi qualche cristallo di labradorite ad estinzione obliqua, e forse alcuni, ma pochi, di bytownite.

Infine l'augite e l'anfibolo, anch' essi molto frequenti in questa roccia, non presentano particolarità alcuna degna di nota. Nella prima, sebbene si riscontrino le varie zone diversamente colorate, non comparisce quasi mai il fatto di essere essa completamente ricoperta da magnetite. In pochi cristalli solamente ho potuto notare una piccola zona di essi rivestita completamente dall' ossido di ferro.

Un ultima varietà più compatta ed omogenea delle altre, i cui costituenti visibili ad occhio nudo hanno una grossezza pressochè uniforme, si ravvicina moltissimo alla prima descritta. Solo il suo colore tende un po' più al verdognolo, ed è qua e là inquinata da venature giallo sporche, che si riscontrano anche nelle sezioni microscopiche, e che sono dovute all' ossido di ferro idrato. Anche in questa roccia poco vi è d' interessante che non sia già stato descritto. La massa vetrosa è assai poca; vi sono le solite microliti di pirosseno abbondantissime, quindi per ordine vengono quelle di sanidina, di anortite e di biotite. La magnetite abbonda pure, in cristalli un poco più piccoli di quelli della varietà grigia, però sempre contornati dalla solita aureola giallo-bruna di limonite, che si riscontra ancora sparsa nella massa fondamentale, unitamente a delle masse giallo aranciate di ematite.

Ho notato un bellissimo cristallo di anortite, molto grosso, solcato nel suo interno da varie linee corrispondenti a linee di sfaldatura, colorate in giallo-sudicio da piccole quantità di limonite. Nel centro di questo grosso cristallo se ne trova incluso un secondo di sanidina, a forma quasi rotondeggiante, ad estinzione ondulata, e dentro quest' ultimo un piccolo bastoncello di orneblenda. Inoltre numerose globuliti di magnetite e numerose inclusioni di sostanze vetrose sono sparse nei cristalli.

Per la sanidina dirò che nelle varie sezioni fatte, nel gran numero di cristalli esaminati, ho potuto trovarne pochissimi, sette soltanto, con una ben marcata struttura zonale, e quattro solamente geminati secondo la legge di Carlsbàd, quasi tutti invece presentano un' area chiara periferica, mentre nel loro centro si trovano inclusioni ora di magnetite, ora di augite, ora di apatite, ora di tutte queste sostanze unite, disposte in linee quasi parallele.

L'augite è, relativamente a quella delle altre roccie descritte, assai scarsa, a contorno ora esagono, ora ottagonale, ma sempre con due lati paralleli più lunghi; però in vari individui il contorno, ora è frastagliato e corroso, ora è coperto dalla solita magnetite. Vi si distinguono le zone concentriche alternanti più chiare e più scure, sebbene in tre esemplari il colore passi dal verde carico al verde chiaro, con uniformità nell' intera sezione. Gl' inclusi vi sono scarsissimi, salvo qualche cristallo più frequente di magnetite; l' estinzione loro avviene sotto un angolo di circa 40°.

La mica è più abbondante del pirosseno, vi sono delle lamine lunghissime, tanto che una occupava in lunghezza una buona parte del campo del microscopio. Il suo contorno è nettissimo nei lati più lunghi, frastagliato in quelli più corti, e non mancano le solite striature fra loro parallele e caratteristiche. Vi ho trovata solamente qualche inclusione di magnetite.

Finalmente ho visto solo quattro o cinque cristalli di orneblenda, di color verde chiaro, pochissimo pleocroici e con un piccolissimo angolo di estinzione, circa 11° rispetto ai lati più lunghi.

Per quante ricerche io abbia fatte, non mi è stato possibile di ritrovare in queste roccie altri minerali accessorî.

Riepilogando adunque dirò che tutte le roccie esaminate sono costituite essenzialmente da sanidina, anortite, magnetite, limonite, augite, biotite, subordinatamente poi da labradorite, oligoclasio, orneblenda, a cui si possono aggiungere, come elementi accessorî, la sodalite e l'hauyna.

In quelle del cratere centrale abbonda la parte vetrosa, scarseggia il numero degli elementi cristallini, e questi nelle loro forme microlitiche sono disposti così da far risaltare la struttura vetrosa della massa; in quelle della corrente laterale scarseggia la parte vetrosa, alla struttura pomiciosa si è sostituita quella compatta e massiccia, e gli elementi cristallini figurano in numero molto maggiore che non nelle roccie del cratere centrale.

Le prime possono essèr considerate come vetrofiri trachitici, le altre invece compatte e pochissimo vetrose sono vere e proprie roccie trachitiche, le quali stanno framezzo alle andesiti per la presenza del plagioclasio, ed alle sanidiniti per la presenza del feldispato monoclino.

Del resto la somiglianza con quelle roccie dal Rosenbusch chiamate trachiti augitiche, me le fa, senza tema di errore, ricondurre a questo tipo.

Non privo d'interesse è poi il fatto di essere in dette roccie l'augite accompagnata da feldispati la cui acidità è assai piccola, mentre fino ad ora chi aveva studiate le trachiti dei Campi Flegrei aveva ritenuto che l'augite fosse unita ad una quantità di sanidina assai maggiore di quella che esista realmente.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci Bassani e Kuehne.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; l'Accademia di scienze ed arti di Barcellona; le Società di scienze naturali di Emden e di Braunschweig; le Società geologiche di Manchester, di Edinburgo e di Sydney; la R. scuola navale di Genova; l'Istituto Teyler di Harlem; l'Istituto geodetico di Potsdam; gli Osservatorî di Praga e di Edinburgo; la Scuola politecnica di Delft.

Annunciano l' invio delle proprie pubblicazioni:

L' Istituto Teyler di Harlem; le Università di Utrecht e di Francoforte s. M; l' Osservatorio di Leida.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell' 5 febbraio 1899.

Bassani F. — Parole pronunciate nell' adunanza inaugurale della Società Geologica italiana in Lagonegro il 5 settembre 1898. Roma, 1898. 8°.

Id. — Di una piccola bocca apertasi nel fondo della Solfatara. Napoli, 1898. 8°.

Baggi V. — Trattato elementare completo di geometria pratica. Disp. 60. Torino, 1898. 8°.

Beiträge zur Palaeontologischen Kenntniss des böhm. Mittelgebirges. — 1. *Laube G. C.* Amphibienreste aus dem Diatomeceenschiefer von Sulloditz im böhmisch. Mittelgebirge. — 2. *Engelhardt H.* Die Tertiaerflora von Berand im böhm. Mittelgebirge.

Loria G. — La storia della Matematica come anello di congiunzione fra l' insegnamento secondario e l' insegnamento universitario. S. l. 1898. 8°.

Luca G. de M.si de — Che cosa è la temperatura dei corpi ed il calorico che la produce. Molfetta, 1897. 8°.

Id. — Della ragione del diverso calorico specifico dei varî corpi e conseguenze importanti che ne derivano. Molfetta, 1899. 8°.

Nestler A. — Die Blasenzellen von Antithammion Plumula (Ellis) Thur. und Antithammion cruciatum (Ag.) Näg. Kiel, 1898. 4°.

Sars G. O. — An account of the Crustacea of Norvay. Vol. II. Isopoda, p. XI. XII. Bergen, 1898. 8°.

Schiffner V. — Conspectus hepaticarum Archipelagi Indici. Batavia, 1898. 8°.

Snyder M. B. — Report of the Harvard Astrophysical Conference. August 1898. Lancaster, 1898. 8°.

Tommasina Th. — Sur un curieux phénomène d' adhérence des limailles métalliques sous l'action du courant électrique. Paris, 1898. 4°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 febbraio 1899.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla teoria della deformazione delle superficie di rivoluzione.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

§ 1. In una recente comunicazione all'Accademia delle Scienze di Parigi [1] il sig. Guichard ha enunciato alcuni risultati relativi alla teoria della deformazione delle quadriche di rotazione, la cui estrema importanza non può essere sfuggita a quanti si occupano di geometria differenziale.

Cercando di dimostrare questi teoremi, io mi sono collocato da un punto di vista più generale, che mi ha dato, insieme alle dimostrazioni dei teoremi di Guichard, altri nuovi risultati dei quali rileverò specialmente quelli che si collegano alla teoria della trasformazione delle superficie pseudosferiche. Per bene intendere il problema che tratto e risolvo nella presente Nota conviene ricordare un risultato fondamentale, dovuto a Beltrami [2], relativo ai sistemi di raggi normali ad una serie di superficie parallele ed uscenti dai punti di una superficie qualsiasi S, alla quale i raggi stessi si immaginano invariabilmente connessi in tutte le deformazioni per flessione della S. Si sa allora che se, in una speciale configurazione della S, si immaginano i raggi emananti dai suoi punti terminati ad una delle superficie Σ ortogonali, il luogo dei medesimi estremi, dopo una deformazione qualsiasi della S, non cessa mai di essere una superficie ortogonale ai raggi.

Ciò ricordato, il problema che vogliamo qui trattare è un caso particolare del seguente: *Per quali superficie* S *accadrà che il luogo* Σ *dei detti estremi rimanga in qualsiasi deformazione della* S *una superficie* W, *i cui raggi principali di curvatura siano legati costantemente dalla medesima relazione?*

(1) Comptes Rendus, 23 Janvier 1899, n.° 4.

(2) V. le mie: *Lezioni di geometria differenziale*, pag. 257.

Un caso ben noto in cui la detta proprietà si verifica è quello fornito dal celebre teorema di Weingarten ([1]), quando cioè la S è applicabile sopra una superficie di rotazione e i raggi sono le tangenti alle deformate dei meridiani.

Nella presente Nota, allo scopo di stabilire i teoremi di Guichard e gli altri, di cui sopra è fatto cenno, mi limiterò per altro a trattare un caso particolare del problema enunciato. Supporrò che la superficie S sia applicabile sopra una superficie di rotazione e i raggi emananti da ogni punto della superficie siano normali alle deformate dei paralleli ed in conseguenza, per la condizione che i raggi formino un sistema normale, sia costante l'angolo d'inclinazione dei raggi sulla superficie lungo ogni deformata di un parallelo ([2]). Supposte verificate queste condizioni, domandiamo: *È possibile determinare la superficie* S *in guisa che la superficie* Σ *luogo degli estremi dei segmenti, trasportati dalla* S *in ogni sua flessione, rimanga sempre una superficie d'area minima, ovvero una superficie a curvatura costante?*

La risposta è fornita completamente dai teoremi seguenti:

A) *Affinchè la* Σ *resti costantemente ad area minima è necessario e sufficiente che la* S *sia applicabile sul paraboloide di rotazione ed, in questa speciale configurazione della* S, *i raggi emanino dal fuoco ovvero dal punto all'infinito dell'asse; le lunghezze dei segmenti intercetti fra* S *e* Σ *eguagliano i corrispondenti raggi focali.*

B) *La superficie* Σ *resta a curvatura costante positiva allora e allora soltanto quando la* S *è applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione ovvero sull'iperboloide di rotazione a due falde e i raggi emanano, in questa speciale configurazione di* S, *dall'uno o dall'altro dei due fuochi.*

C) *La superficie* Σ *resta a curvatura costante negativa solo quando la curva meridiana della superficie di rotazione, su cui la* S *è applicabile, è la curva esponenziale*

$$r = e^z,$$

ovvero la catenaria accorciata

$$r = m \cosh z \qquad (m < 1),$$

o in fine la curva

$$r = m \operatorname{senh} z;$$

ogni volta si hanno due diversi sistemi di raggi, che soddisfano alla questione, e nascono l'uno dall'altro per riflessione sulla superficie S.

I teoremi A) B), quando già si supponga la S applicabile sulla corrispondente quadrica di rotazione, dànno appunto i risultati di Guichard.

Quanto alle proposizioni contenute nel teorema C) esse stanno in relazione colla teoria della trasformazione delle superficie pseudosferiche; ma per ora non ne ho approfondito che un caso particolare, di cui sarà discorso più avanti.

([1]) V. *Lezioni* ecc., pag. 238.

([2]) Quando la S è conformata a superficie di rotazione i raggi emananti dai punti di un parallelo debbono quindi concorrere in un punto dell'asse.

§ 2. Per dimostrare i teoremi enunciati procederemo nel modo seguente. Sulla superficie S prendiamo a linee coordinate $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ rispettivamente le deformate dei paralleli e dei meridiani, onde si avrà per l'elemento lineare

$$ds^2 = du^2 + r^2\, dv^2 \qquad (r = \varphi(u)). \tag{1}$$

Siano poi D, D', D'' i coefficienti della 2ª forma fondamentale [1], i quali saranno legati dalla equazione di Gauss

$$\frac{DD'' - D'^2}{r} = -r'', \tag{2}$$

indicando come faremo in seguito cogli accenti le derivate di funzioni della sola u; inoltre D, D', D'' saranno legati dalle equazioni differenziali di Codazzi

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial v}(rD) = \frac{\partial}{\partial u}(rD') \\ &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{r}\right) + Dr'. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Indichiamo poi con

$$\begin{gathered} (X_1\ Y_1\ Z_1) \\ (X_2\ Y_2\ Z_2) \\ (X_3\ Y_3\ Z_3) \end{gathered}$$

i coseni di direzione della terna ortogonale formata: 1°) dalla tangente alla linea $u = \text{cost.}$; 2°) dalla tangente alla $v = \text{cost.}$; 3°) dalla normale alla superficie. Avremo allora le note formole fondamentali

$$\frac{\partial x}{\partial u} = X_2, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = rX_1 \tag{4}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{D'}{r} X_3, && \frac{\partial X_2}{\partial u} = DX_3, && \frac{\partial X_3}{\partial u} = -DX_2 - \frac{D'}{r} X_1 \\ &\frac{\partial X_1}{\partial v} = -r'X_2 + \frac{D''}{r} X_3, && \frac{\partial X_2}{\partial v} = r'X_1 + D'X_3, && \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\frac{D''}{r} X_1 - D'X_2, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

colle analoghe per y, z, Y_i, Z_i $(i = 1, 2, 3)$.

Consideriamo ora il raggio che emana dal punto (x, y, z) di S ed è normale alla direzione (X_1, Y_1, Z_1) e sia σ l'angolo d'inclinazione di questo raggio sulla superficie, ove, per ipotesi, sarà σ funzione della sola u. I coseni di direzione

$$X, Y, Z$$

di detto raggio saranno dati manifestamente dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} X &= \cos\sigma\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3 \\ Y &= \cos\sigma\, Y_2 + \operatorname{sen}\sigma\, Y_3 \\ Z &= \cos\sigma\, Z_2 + \operatorname{sen}\sigma\, Z_3 \end{aligned}\right. \tag{6}$$

[1] V. *Lezioni*, cap. IV.

Costruiamo ora per il sistema di raggi le quantità fondamentali di Kummer (¹):

$$E\,,\,F\,,\,G\,,\;e\,,\,f\,,\,f'\,,\,g\,.$$

Per questo derivando le (6). otteniamo per le (5)

$$(7)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial X}{\partial u}=-\dfrac{D'}{r}\operatorname{sen}\sigma\,X_1-\operatorname{sen}\sigma(D+\sigma')\,X_2+\cos\sigma(D+\sigma')\,X_3\\[2mm]\dfrac{\partial X}{\partial v}=\left(r'\cos\sigma-\dfrac{D''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right)X_1-D'\operatorname{sen}\sigma\,X_2+D'\cos\sigma\,X_3\,,\end{cases}$$

onde seguono le formole:

$$(8)\quad\begin{cases}E=(D+\sigma')^2+\dfrac{D'^2}{r^2}\operatorname{sen}^2\sigma\,,\quad F=D'(D+\sigma')-\dfrac{D'}{r}\operatorname{sen}\sigma\left(r'\cos\sigma-\dfrac{D''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right),\\[2mm]G=D'^2+\left(r'\cos\sigma-\dfrac{D''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right)^2,\quad e=-\operatorname{sen}\sigma(D+\sigma'),\;f=f'=-D'\operatorname{sen}\sigma,\\[2mm]\qquad g=r\left(r'\cos\sigma-\dfrac{D''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right).\end{cases}$$

L' essere $f=f'$ significa che la congruenza è normale, come già sapevamo, e poichè si ha

$$U=\sum X\frac{\partial x}{\partial u}=\cos\sigma\,,\quad V=\sum X\frac{\partial x}{\partial v}=0\,,$$

le coordinate $\bar{x}\,,\bar{y}\,,\bar{z}$ di un punto mobile sopra una delle superficie $\sum$ normali ai raggi saranno dati (²) dalle formole

$$(8^*)\qquad \bar{x}=x+tX\,,\;\bar{y}=y+tY\,,\;\bar{z}=z+tZ\,,$$

ove si è posto

$$9)\qquad t=C-\int\cos\sigma\,du\,,$$

con C costante arbitraria. Ora per determinare le ascisse $\varrho_1\,,\varrho_2$ dei due fuochi abbiamo l' equazione di 2° grado

$$(10)\qquad (EG-F^2)\,\varrho^2+[gE-(f+f')\,F+eG]\,\varrho+eg-ff'=0\,,$$

le cui radici sono appunto $\varrho_1\,,\varrho_2$. Pei valori dei coefficienti di questa equazione troviamo subito dalle (8):

$$(11)\quad\begin{cases}EG-F^2=\left\{(D+\sigma')\left(r'\cos\sigma-\dfrac{D''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right)+\dfrac{D'^2}{r}\operatorname{sen}\sigma\right\}^2\\[2mm]gE-(f+f')\,F+eG=D'^2\operatorname{sen}\sigma(D+\sigma')-\operatorname{sen}\sigma(D+\sigma')\left(r'\cos\sigma-\dfrac{D''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right)^2+\\[2mm]\qquad+(D+\sigma')^2\,r\left(r'\cos\sigma-\dfrac{D''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right)-\dfrac{D'^2}{r}\operatorname{sen}^2\sigma\left(r'\cos\sigma-\dfrac{D''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right)\\[2mm]eg-ff'=-r\operatorname{sen}\sigma(D+\sigma')\left(r'\cos\sigma-\dfrac{D''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right)-D'^2\operatorname{sen}^2\sigma\,.\end{cases}$$

(¹) V. *Lezioni*, ecc., capo X.

(²) *Id.*, pag. 256.

§ 3. Stabilite queste formole fondamentali, passiamo alla nostra ricerca e supponiamo dapprima che la superficie $\sum$ normale ai raggi data dalla (8*) si mantenga, in tutte le flessioni della S, *superficie d'area minima*. Siccome i suoi raggi principali di curvatura sono dati da

$$r_1 = \varrho_1 - t\,, \quad r_2 = \varrho_2 - t\,,$$

dovremo avere

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 2t\,,$$

ossia

$$2t(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2) + g\mathrm{E} - (f + f')\,\mathrm{F} + e\mathrm{G} = 0\,. \tag{12}$$

In questa sostituiamo per $\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2$, $g\mathrm{E} - (f + f')\,\mathrm{F} + e\mathrm{G}$ i valori (11), dai quali mediante l'equazione (2) di Gauss eliminiamo D''. Resta così una relazione in termini finiti fra D, D' e siccome la supponiamo verificata in tutte le flessioni della S, si vede facilmente che deve essere identicamente verificata. Ed infatti, durante le flessioni di S, le quantità D, D' sono unicamente legate dalle due equazioni a derivate parziali del 1° ordine (3), dalle quali pensiamo eliminato D'' per mezzo della (2); una relazione costante in termini finiti fra D, D' lascerebbe sussistere, al massimo, nella totalità delle flessioni una sola funzione arbitraria. Facendo effettivamente nella (12) la detta sostituzione, moltiplicando l'equazione per D^2 ed eliminando D'', troviamo:

$$\begin{aligned}2t\Big\{(\mathrm{D} + \sigma')\Big(\mathrm{D}r'\cos\sigma - \frac{\mathrm{D}'^2}{r}\operatorname{sen}\sigma + r''\operatorname{sen}\sigma\Big) + \frac{\mathrm{D}\mathrm{D}'^2}{r}\operatorname{sen}\sigma\Big\}^2 + \mathrm{D}^2\mathrm{D}'^2\operatorname{sen}\sigma(\mathrm{D} + \sigma') -\\ - \operatorname{sen}\sigma(\mathrm{D} + \sigma')\Big(\mathrm{D}r'\cos\sigma - \frac{\mathrm{D}'^2}{r}\operatorname{sen}\sigma + r''\operatorname{sen}\sigma\Big)^2 +\\ + r\mathrm{D}(\mathrm{D} + \sigma')^2\Big(\mathrm{D}r'\cos\sigma - \frac{\mathrm{D}'^2}{r}\operatorname{sen}\sigma + r''\operatorname{sen}\sigma\Big) -\\ - \frac{\mathrm{D}\mathrm{D}'^2}{r}\operatorname{sen}^2\sigma\Big(\mathrm{D}r'\cos\sigma - \frac{\mathrm{D}'^2}{r}\operatorname{sen}\sigma + r''\operatorname{sen}\sigma\Big) = 0\,.\end{aligned}$$

Pongasi ora per brevità

$$\mathrm{D}r'\cos\sigma - \frac{\mathrm{D}'^2}{r}\operatorname{sen}\sigma + r''\operatorname{sen}\sigma = \varDelta$$

e se ne tragga D'^2 in funzione di D e $\varDelta$ colla formola

$$\frac{\mathrm{D}'^2\operatorname{sen}\sigma}{r} = \mathrm{D}r'\cos\sigma + r''\operatorname{sen}\sigma - \varDelta\,;$$

la precedente diviene:

$$\begin{aligned}2t\{\mathrm{D}^2r'\cos\sigma + \mathrm{D}r''\operatorname{sen}\sigma + \sigma'\varDelta\}^2 + r\mathrm{D}^2(\mathrm{D} + \sigma')(\mathrm{D}r'\cos\sigma + r''\operatorname{sen}\sigma - \varDelta)\\ - \operatorname{sen}\sigma(\mathrm{D} + \sigma')\varDelta^2 + r\mathrm{D}(\mathrm{D} + \sigma')^2\varDelta - \operatorname{sen}\sigma\mathrm{D}\varDelta(\mathrm{D}r'\cos\sigma + r''\operatorname{sen}\sigma - \varDelta) = 0\,,\end{aligned}$$

che deve risultare *identica* in D e $\varDelta$. Ne seguono le condizioni necessarie e sufficienti

$$2t\sigma' = \operatorname{sen}\sigma \tag{13}$$

$$2tr'\cos\sigma + r = 0 \tag{14}$$

$$2tr''\operatorname{sen}\sigma + r\sigma' = 0 \tag{15}$$

$$4tr'\sigma'\cos\sigma + r\sigma' - r'\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma = 0 \tag{16}$$

$$4t\sigma'\operatorname{sen}\sigma\, r'' + r\sigma'^2 - \operatorname{sen}^2\sigma\, r'' = 0\,. \tag{17}$$

Noi escludiamo la soluzione $\sigma' = 0$ perchè allora la (13) darebbe $\sigma = 0$ e, il sistema di raggi essendo quello delle tangenti alle deformate dei meridiani, saremmo ricondotti al teorema, già sopra citato, di Weingarten [1]. Eliminando $2t$ dalle (14 (15) per mezzo della (13), otteniamo le due equa-

$$(14^*) \qquad r\sigma' + r' \operatorname{sen}\sigma \cos\sigma = 0$$

$$(15^*) \qquad \operatorname{sen}^2\sigma\, r'' + r\sigma'^2 = 0$$

e le (16), (17) si riducono a queste medesime.

Resta dunque, se sarà possibile, di determinare σ, r, t in funzione di u in guisa da soddisfare le (13), (14*), (15*) e inoltre l'equazione

$$(18) \qquad t' + \cos\sigma = 0,$$

che segue per derivazione dalla (9).

Ora dalla (14*) si ha intanto

$$(19) \qquad r = c \cot\sigma,$$

essendo c una costante. Sostituendo nella (15*), otteniamo per σ l'equazione differenziale

$$\sigma'' = 3 \cot\sigma\, \sigma'^2,$$

dalla cui integrazione segue

$$(20) \qquad \sigma' = k \operatorname{sen}^3\sigma,$$

indicando k una nuova costante. Dopo di ciò la (13) diventa

$$(21) \qquad 2t = \frac{1}{k \operatorname{sen}^3\sigma}$$

e la (18) è identicamente soddisfatta.

Il nostro problema ammette dunque certamente soluzioni; queste si ottengono prendendo per σ un integrale della (20) indi assumendo r dalla (19) e t dalla (21). Si tratta ora di vedere quale sarà la superficie di rotazione corrispondente. A tale scopo deduciamo dalla (20)

$$du = \frac{d\sigma}{k \operatorname{sen}^3\sigma}$$

e dalla (19)

$$dr = -\frac{c\,d\sigma}{\operatorname{sen}^2\sigma},$$

indi

$$du^2 = \frac{1}{k^2 c^2}\left(1 + \frac{r^2}{c^2}\right) dr^2.$$

L'elemento lineare della superficie di rotazione è adunque

$$ds^2 = \frac{1}{k^2 c^2}\left(1 + \frac{r^2}{c^2}\right) dr^2 + r^2\, dv^2.$$

La costante c è affatto in nostro arbitrio [2]; prendiamo per semplicità

$$c = \pm\frac{1}{k}$$

[1] La stessa cosa intendiamo nelle ricerche dei paragrafi seguenti senza che lo ripetiamo.

[3] Cangiando la costante c si viene soltanto a sostituire alla superficie di rotazione un'altra sua deformata dì rotazione.

ed avremo

$$ds^2 = (1 + k^2 r^2)\, dr^2 + r^2\, dv^2 .$$

Questo elemento lineare appartiene al paraboloide di rotazione, la cui parabola meridiana ha per equazione

$$z = \frac{kr^2}{2} .$$

La formola (19) dà poi per l'inclinazione dei raggi sulla tangente alla parabola

$$\operatorname{tg} \sigma = \pm \frac{1}{kr} ,$$

ciò che dimostra che i raggi emanano dal fuoco ovvero sono paralleli all'asse. Si osservi in fine che il valore di t tratto dalla (21):

$$t = \frac{1}{2k}(1 + k^2 r^2)$$

eguaglia appunto la lunghezza del raggio focale. Così è completamente dimostrato il nostro teorema A).

§ 4. Supponiamo ora invece che la superficie Σ rimanga sempre, nelle infinite flessioni di S, a curvatura costante $\frac{1}{A}$. Dovremo avere in tal caso

$$(\varrho_1 - t)(\varrho_2 - t) = A$$

ovvero

$$(t^2 - A) - t(\varrho_1 + \varrho_2) + \varrho_1 \varrho_2 = 0$$

che, per la (10), diviene:

$$(t^2 - A)(EG - F^2) + t\,\{gE - (f + f')\,F + eG\} + eg - ff' = 0.$$

Sostituendo pei coefficienti i valori (11) e procedendo del resto in modo del tutto simile come sopra, troviamo per le funzioni incognite σ, r, t le equazioni seguenti:

$$(t^2 - A)\, \sigma' = t \operatorname{sen} \sigma \tag{22}$$

$$2(t^2 - A)\, \sigma' r' \cos \sigma + rt\sigma' - tr' \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma = 0 \tag{23}$$

$$2(t^2 - A)\, \sigma' \operatorname{sen} \sigma r'' + rt\sigma'^2 - t \operatorname{sen}^2 \sigma r'' - r \operatorname{sen} \sigma\, \sigma' = 0 \tag{24}$$

$$(t^2 - A)\, r' \cos \sigma + rt = 0 \tag{25}$$

$$(t^2 - A) \operatorname{sen} \sigma r'' + rt\sigma' - r \operatorname{sen} \sigma = 0 , \tag{26}$$

alle quali aggiungendo la solita

$$t' + \cos \sigma = 0 , \tag{27}$$

avremo tutte le condizioni necessarie e sufficienti perchè sussista la voluta proprietà. Ora, in forza della (22), le (23) (24) diventano rispettivamente

$$r\sigma' + \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma\, r'' = 0 \tag{23*}$$

$$t \operatorname{sen}^2 \sigma r'' + rt\sigma'^2 - r\sigma' \operatorname{sen} \sigma = 0 \tag{24*}$$

e le (25) (26) si riducono esse stesse a queste.

Restano dunque soltanto da soddisfarsi le (22), (23*), (24*), (27). Intanto la (23*) ci dà ancora

$$r = c \cot\sigma \,, \tag{28}$$

indi la (24*) diventa

$$t = \frac{\sigma' \cos\sigma}{3 \cot\sigma \,.\, \sigma'^2 - \sigma''} \,. \tag{29}$$

Sostituendo nella (27), troviamo per σ l'equazione differenziale

$$\frac{d}{du} \log (3 \cot\sigma \,.\, \sigma'^2 - \sigma'') = \frac{d}{du} \log(\operatorname{sen}^3 \sigma \cos\sigma) \,,$$

da cui integrando risulta

(30) $\quad 3 \cot\sigma \,.\, \sigma - \sigma'' = h \operatorname{sen}^3 \sigma \cos\sigma \,,\quad$ essendo h una costante.

La (29) si cangia quindi nell' altra

$$t = \frac{\sigma'}{h \operatorname{sen}^3 \sigma} \tag{31}$$

e la (22) ci dà allora per σ l'equazione differenziale del 1° ordine

$$\frac{\sigma'^2}{h^2 \operatorname{sen}^6 \sigma} = \mathrm{A} + \frac{1}{h \operatorname{sen}^2 \sigma} \,, \tag{32}$$

che trae seco, come conseguenza differenziale, la (30).

Restando A affatto arbitraria, il nostro problema ammette dunque sempre soluzioni, che si ottengono prendendo per σ un integrale della (32), indi assumendo r dalla (28) e t dalla (31).

§ 5. Vogliamo ora esaminare quale è la superficie di rotazione corrispondente, nella qual cosa resta, come sopra, a nostra disposizione la costante c. Dalla (32) ricaviamo

$$du^2 = \frac{d\sigma^2}{h \operatorname{sen}^4 \sigma (1 + h\mathrm{A} \operatorname{sen}^2 \sigma)}$$

e quindi per l' elemento lineare della superficie di rotazione

$$ds^2 = \frac{d\sigma^2}{h \operatorname{sen}^4 \sigma (1 + h\mathrm{A} \operatorname{sen}^2 \sigma)} + c^2 \cot^2 \sigma \, dv^2 \,.$$

Per determinare la curva meridiana

$$z = \psi(r)$$

abbiamo la equazione

$$1 + \psi'^2(r) = \frac{1 + \dfrac{r^2}{c^2}}{k^2 h \left(1 + h\mathrm{A} + \dfrac{r^2}{c^2}\right)} \,,$$

ossia

$$\psi'^2(r) = \frac{(1 - c^2 h)\left(1 + \dfrac{r^2}{c^2}\right) - h^2 c^2 \mathrm{A}}{c^2 h \left(1 + h\mathrm{A} + \dfrac{r^2}{c^2}\right)} \,. \tag{33}$$

Separiamo ora i due casi di $A > 0$ ovvero $A < 0$. Trattando in questo paragrafo il primo caso, poniamo, ciò che non altera la generalità, $A = 1$, onde

$$\psi'^2(r) = \frac{1 - c^2 h(h+1) + \frac{1 - c^2 h}{c^2} r^2}{c^2 h(h+1) + hr^2}.$$

Volendo superficie *reali*, occorrerà che sia $h(h+1) > 0$, chè altrimenti risulterebbe $\psi'^2(r)$ negativo. Ora disponiamo di c ponendo

$$c^2 = \frac{1}{h(h+1)},$$

indi

$$\psi'(r) = \frac{hr}{\sqrt{1 + hr^2}}$$

e però

$$z = \psi(r) = \sqrt{1 + hr^2},$$

ossia

$$z^2 - hr^2 = 1.$$

Ora se $h < 0$, pongasi $h = -\frac{1}{a^2}$ e a causa di $h(h+1) > 0$ sarà $a < 1$; la curva meridiana sarà in tal caso l' ellisse

$$z^2 + \frac{r^2}{a^2} = 1$$

e l' asse di rotazione sarà l' asse maggiore di lunghezza $= 2$.

Quando h sia positivo pongasi $h = \frac{1}{a^2}$ e si avrà per curva meridiana l' iperbole

$$z^2 - \frac{r^2}{a^2} = 1,$$

l' asse trasverso, di lunghezza $= 2$, coincidendo coll' asse di rotazione. Le formole

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{c}{r} = \pm \frac{1}{\sqrt{h(h+1)} \cdot r}$$

dimostrano poi che i raggi emanano dall' uno o dall' altro dei due fuochi. Il nostro teorema B) è così completamente dimostrato.

§ 6. Veniamo ora al caso della curvatura negativa e facciamo senz' altro $A = -1$. La (33) diventa

$$\psi'^2(r) = \frac{1 - c^2 h + c^2 h^2 + \frac{1 - c^2 h}{c^2} r^2}{c^2 h(1-h) + hr^2},$$

dove, per avere curve reali, dovrà supporsi h positivo, come risulta anche del resto dalla (32). Poniamo

$$h = a^2, \quad c = \pm \frac{1}{a}$$

ed avremo

$$\psi'(r) = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2 + a^2 r^2}}.$$

Distinguiamo ora secondo che $a = 1$, ovvero $a \neq 1$.

1°. Per $a = 1$ la curva meridiana è la curva esponenziale

$$(\alpha) \qquad r = e^z.$$

Le formole

$$\operatorname{tg} \sigma = \pm \frac{1}{r}, \quad t = r$$

dimostrano che i raggi emananti dai punti della superficie sono i raggi stessi dei paralleli, ovvero i loro riflessi, e i segmenti intercetti fra S e Σ hanno lunghezza eguale al raggio del parallelo (¹). Possiamo quindi enunciare il teorema seguente:

Nella superficie S *di rotazione attorno all'asse* z *che ha per meridiano la curva esponenziale* $r = e^z$ *si immaginino disposti su tutti i raggi dei paralleli altrettanti segmenti terminati alla* S *ed al centro rispettivo; si fletta comunque la* S *che seco trasporti i detti segmenti invariabilmente connessi, ai loro punti di partenza da* S, *alla* S *medesima. Dopo la deformazione il luogo degli estremi liberi dei segmenti sarà una superficie pseudosferica normale ai segmenti ed una seconda superficie pseudosferica si otterrà riflettendo i segmenti stessi sulla superficie e prendendo il luogo dei termini dei segmenti riflessi.*

2°. Sia $a \neq 1$. Allora per equazione della curva meridiana troviamo

$$(\beta) \qquad r = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} \cosh z, \quad \text{se } a > 1$$

$$(\gamma) \qquad r = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a} \operatorname{senh} z, \quad \text{se } a < 1.$$

La curva (β) deriva evidentemente dalla catenaria comune accorciando tutte le ordinate normalmente alla direttrice in un rapporto costante e può dirsi la *catenaria accorciata.*

A ciascuna delle ∞^1 superficie di rotazione con curve meridiane (β) o (γ) si coordinano due sistemi di raggi, riflessi l'uno dell'altro, che trasportati dalla relativa superficie, in qualsiasi sua deformazione, dànno sempre luogo alle normali di due superficie pseudosferiche.

(¹) Si osservi che se la S ha la forma di rotazione, una delle due superficie pseudosferiche derivate è l'ordinaria pseudosfera mentre l'altra si riduce all'asse di rotazione.

§ 7. Limitandoci per ora ad esaminare il caso della superficie esponenziale di rotazione, vediamo in qual modo dipendono fra loro le due superficie pseudosferiche che si ottengono, secondo il paragrafo precedente, da ogni sua deformata S. Siano Σ', Σ'' queste due superficie pseudosferiche e sia Σ la superficie complementare di S rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani, cioè la seconda falda focale della congruenza delle tangenti a queste geodetiche. Dalle mie antiche ricerche risulta che anche la Σ è una superficie pseudosferica e con semplici considerazioni geometriche si può stabilire che *le due superficie pseudosferiche* Σ', Σ'' *sono ambedue complementari della* Σ.

Inversamente sussiste il teorema:

Prese due superficie pseudosferiche Σ', Σ'' *complementari di una medesima* Σ *le normali a* Σ', Σ'' *in due punti corrispondenti* (*normali che giacciono nel medesimo piano tangente di* Σ) *si incontrano in un punto* P; *il luogo di questo punto* P *è una superficie applicabile sulla superficie esponenziale di rotazione e le due superficie* S, Σ *sono complementari l'una dell'altra.*

Queste singolari proprietà della superficie esponenziale di rotazione dànno luogo bensì, come si vede, ad un modo di trasformazione delle superficie pseudosferiche, che coincide peraltro colla trasformazione complementare.

Rimane ora da vedere se le analoghe proprietà delle altre superficie di rotazione dei tipi (β) (γ) dànno luogo ad altri modi di trasformazione delle superficie pseudosferiche, ovvero riconducono a trasformazioni già note. La prima ipotesi sembra la più probabile, ma se anche sussistesse la seconda il risultato non cesserebbe di presentare un certo interesse poichè ci darebbe modo di trovare infinite deformate per flessione delle superficie di rotazione dei tipi (β) e (γ).

La decisione di questa e di molte altre questioni che naturalmente si collegano ai teoremi della presente Nota deve rimanere riservata ad ulteriori ricerche.

AGGIUNTA.

Dopo la presentazione della presente Nota ho cominciato alcune ricerche più generali che, nel caso delle superficie minime danno il seguente teorema più generale del teorema A): *Se da ciascun punto* M *di una superficie* S *parte un segmento* MM' *ed il luogo degli estremi* M' *è una superficie minima ortogonale ai raggi, la condizione necessaria e sufficiente perchè la medesima proprietà si conservi in tutte le flessioni della* S, *alla quale i segmenti* MM' *si immaginano invariabilmente collegati, è che la* S *sia applicabile sul paraboloide di rivoluzione ed, eseguita questa applicazione, i segmenti* MM' *concorrano nel fuoco, ovvero si dispongano parallelamente all'asse, avendo ciascuno lunghezza eguale al corrispondente raggio focale.*

Matematica. — *Di un' equazione funzionale simbolica e di alcune sue conseguenze.* Nota del Corrispondente S. PINCHERLE.

Sono note alcune trasformazioni usate nella teoria delle equazioni differenziali lineari per ridurre certe classi di tali equazioni a tipi integrabili. Sono particolarmente importanti le trasformazioni di Laplace e di Eulero (1), la prima delle quali ha guidato in modo così notevole, per opera specialmente del Poincaré (2), alla conoscenza delle equazioni ad integrali irregolari. Queste trasformazioni sono operazioni funzionali distributive, definite da certe loro proprietà caratteristiche cui si può dare la forma di equazioni funzionali simboliche, e dalle quali si deducono in modo assai semplice, le ulteriori proprietà delle operazioni medesime (3). Delle due operazioni citate, la operazione di Laplace è di gran lunga quella il cui comportamento appare più strano: essa ha di fronte all' operazione di Eulero un carattere che si potrebbe dire di trascendenza, ed il dott. Amaldi, nella citata sua Nota, ha riscontrato due determinazioni, o come egli si esprime con giusto criterio di analogia, due *rami* di questa operazione, rami il cui legame fra di loro non appare a prima giunta evidente. In quanto all' operazione di Eulero, essa non differisce in sostanza da quella di derivazione ad indice qualunque, intuita dal Leibniz, introdotta nella scienza dal Liouville e studiata da numerosi autori (4), sebbene piuttosto con intendimento di pura curiosità che in vista di possibili applicazioni; nè credo che ne sia stata notata l' identità, cui ora accennava, con l' operazione di Eulero, così feconda invece di applicazioni, gran parte delle quali risalgono a noti lavori dell' Heine (5).

Nella presente Nota, studio un' equazione simbolica generale che contiene come casi particolari quelle cui soddisfano le citate due operazioni. Ricerco quale è la multiplicità di determinazioni dell' operazione definita da una tale equazione; trovo lo sviluppo in serie della soluzione generale dell' equazione stessa, e faccio infine l' applicazione ai due casi speciali di cui si è discorso, e a qualche altro caso particolare notevole. Oltre all' interesse

(1) Su queste trasformazioni, v. Schlesinger, *Handbuch der Lineardiff. Gleichungen*, Bd I, Abschn. VII, Kap. 4 e Bd. II, Abschn. XII. Nella stessa opera (indice) si trova una estesa bibliografia dell' argomento.

(2) Americ. Journ. der Math., T. VII e Acta Math., T. VIII.

(3) V. Amaldi, *Sulla trasformazione di Laplace*, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, serie 5ª, T. VII, agosto 1898; e una mia lettera allo Schlesinger, Journ. fur die r. und ang. Mathematik, Bd. 119, s. 347.

(4) Riemann, Holmgren, Spitzer, Oltramare, Bourlet ed altri.

(5) Nei T. LX, LXI e LXII del Journ. für die r. und ang. Mathematik.

intrinseco che presenta l'equazione di cui si occupa questo lavoro, mi pare che essa ne offra anche uno di indole generale, poichè essa porge l'occasione di trasportare in una regione più vasta, ed in cui le possibili combinazioni sono straordinariamente moltiplicate, quelle considerazioni e quei metodi — compreso quello tanto semplice e fecondo dei coefficienti indeterminati — che sembravano esclusivi della teoria delle funzioni analitiche.

1. Sia X il simbolo di un'operazione funzionale distributiva, X′ la sua derivata funzionale ([1]), cioè, essendo φ una funzione analitica arbitraria,

$$X'(\varphi) = X(x\varphi) - xX(\varphi).$$

Mi propongo di studiare l'operazione definita dall'equazione simbolica

$$FX' = GX, \tag{1}$$

essendo F e G due espressioni (o forme) differenziali lineari, di ordine qualunque m, quest'ordine potendosi senza restrizione supporre uguale per entrambi. Essendo D il simbolo solito della derivazione ordinaria, sarà dunque

$$F = \alpha_0 D^m + \alpha_1 D^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1} D + \alpha_m D^0 ,$$
$$G = \beta_0 D^m + \beta_1 D^{m-1} + \cdots + \beta_{m-1} D + \beta_m D^0 .$$

2. Cerchiamo quale relazione passi fra due operazioni X , Y soddisfacenti alla stessa equazione (1). Poniamo Y = XK, dove K è una nuova operazione; verrà ([2]), denotando cogli accenti le derivazioni funzionali:

$$FX'K + FXK' = GXK .$$

Ma dalla (1) si ha, qualunque sia la funzione su cui si opera:

$$FX'K = GXK ,$$

onde segue, per ogni funzione soggetta alle operazioni indicate:

$$FXK' = 0 , \quad \text{onde } K' = 0 ,$$

e quindi ([3]) K è la semplice operazione di moltiplicazione.

Se dunque $X(\varphi)$, applicata alla funzione arbitraria φ, soddisfa all'equazione (1), anche $X(\mu\varphi)$, considerata come operazione applicata alla stessa funzione, soddisfa alla medesima equazione.

3. Essendo μ una funzione analitica qualsivoglia, indichiamo con α una serie ordinata per le potenze crescenti di x. In questa serie si può con-

([1]) Vedi il mio *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif*, Math. Annal., Bd. XLIX, 1897. In ciò che segue, quel lavoro verrà citato colla lettera *M* seguita dal numero del paragrafo. Come in quella memoria, le maiuscole romane indicano operazioni distributive, le minuscole greche indicano funzioni, le minuscole romane indicano numeri, reali o complessi.

([2]) *M*, § 58.

([3]) *M*, § 60, *a)*.

siderare l'*intensità* della convergenza, riguardando come più intensamente convergente quella serie che ha raggio di convergenza maggiore, e a parità di raggio, quella serie che una operazione A definita da $A(x^n) = a_n x^n$ muta in serie avente maggiore raggio di convergenza [1]. Una funzione della forma $\alpha\mu$ si potrà dire allora tanto più *prossima* a μ quanto più sarà intensamente convergente la serie α; le più prossime, in questo senso, saranno le $x\mu$, $(a+bx)\mu$, $(a+bx+cx^2)\mu$, ... ; poi le $\alpha\mu$ in cui α è trascendente intera, ecc.

L'insieme delle funzioni $\alpha\mu$ dove le α sono tutte le serie di potenze convergenti più intensamente di una serie data α, costituisce ciò che chiamerò un *intorno* della funzione μ; a questo intorno appartengono certamente tutte le funzioni $x^n\mu$ e le loro combinazioni lineari in numero finito. Ho già considerato simili intorni al § 64 del ricordato *Mémoire* [2].

4. Ora, per ogni operazione distributiva X vale, come ho dimostrato [3], in un intorno conveniente di una funzione μ, lo sviluppo (analogo alla serie di Taylor nella teoria delle funzioni) in serie assolutamente ed uniformemente convergente:

$$(2)\quad X(\varphi\mu) = X(\mu)\,\varphi + X'(\mu)\,\varphi' + \frac{1}{1\,.\,2} X''(\mu)\,\varphi'' + \cdots \frac{1}{n\,!} X^{(n)}(\mu)\,\varphi^{(n)} + \cdots,$$

dove si è posto $\varphi' = D\varphi$, $\varphi'' = D^2\varphi$, ecc.

Se la X deve soddisfare alla equazione (1), questa equazione stessa, derivata successivamente, ci fornisce i coefficienti dello sviluppo (2); si ha infatti, derivando funzionalmente la (1) [4]:

$$FX'' = (G - F')\,X' + G'X\,,$$
$$FX''' = (G - 2F')\,X'' + (2G' - F'')\,X' + G''X\,,$$

e in generale, indicando con (n_m) l' $m+1^{\text{simo}}$ coefficiente della potenza n^{sima} del binomio:

$$(3)\quad FX^{(n+1)} = (G - nF')\,X^{(n)} + (nG' - (n_2)\,F'')\,X^{(n-1)} + \cdots$$
$$\cdots\,((n_{m-1})\,G^{(m-1)} - (n_m)\,F^{(m)})\,X^{(n-m+1)} + (n_m)\,G^{(m)}X^{(n-m)}\ [5]\,.$$

Questa è una relazione ricorrente che permette di determinare successivamente le funzioni $X'(\mu)$, $X''(\mu)$, ... restando arbitraria la sola $X(\mu)$, che indicheremo con λ_0. Ma la determinazione delle successive $X^{(n)}(\mu)$ mediante

(1) Questo concetto verrà più ampiamente svolto e discusso in un prossimo lavoro.

(2) Cfr. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, T. XI: *Sulle serie procedenti secondo le derivate successive* ecc., § 4.

(3) *M.*, § 61.

(4) *M.*, § 58.

(5) Si noti l'analogia di forma fra questa e l'equazione ipergeometrica generalizzata od equazione di Pochhammer. Nonostante la diversità dei simboli, la (3) si può ridurre a quella equazione differenziale particolarizzando opportunamente i simboli stessi

la (3) (che è, rispetto ad esse, un' equazione lineare mista differenziale e alle differenze) non è univoca, come si vede facilmente. Infatti dalla (1) deduciamo

$$X'(\mu) = F^{-1}GX(\mu),$$

ossia $X'(\mu) = F^{-1}G\lambda_0$; in altri termini, la $X'(\mu)$ si ottiene da λ_0 mediante la risoluzione di un' equazione differenziale lineare non omogenea di cui F è il primo membro; essa è quindi determinata all' infuori di una funzione ω_1 contenente linearmente m costanti arbitrarie, funzione che è l' integrale generale dell' equazione omogenea $F = 0$. In particolare, se λ_0 ed i coefficienti di G sono funzioni analitiche regolari nell' intorno di $x = 0$, si può prendere come una delle determinazioni di $X'(\mu)$ l' integrale principale λ_1 [1] dell' equazione non omogenea, e si avrà per determinazione generale

$$X'(\mu) = \lambda_1 + \omega_1 .$$

Analogamente, determinata che sia $X'(\mu)$, la $X''(\mu)$ resterà determinata mediante una analoga equazione differenziale lineare non omogenea, avente per primo membro F, e così via, per modo che $X^{(n)}(\mu)$ conterrà linearmente nm costanti arbitrarie.

5. Come si vede, indicando con $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ una serie di speciali determinazioni delle $X(\mu), X'(\mu), X''(\mu), \ldots$, dove λ_0 è arbitraria, se ne deduce che la determinazione generale delle medesime è

$$\lambda_0 , \ \lambda_1 + \omega_1 , \ \lambda_2 + \omega_2 , \ldots ,$$

dove le $\omega_1, \omega_2, \ldots$ soddisfano alla stessa equazione ricorrente (3), colla determinazione iniziale $\omega_0 = 0$; cioè esse sono date dal sistema:

$$\begin{cases} F(\omega_1) = 0 , \\ F(\omega_2) = (G - F')\, \omega_1 \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ F(\omega_{n+1}) = (G - nF')\, \omega_n + (nG' - (n_2)\, F'')\, \omega_{n-1} + \cdots + (n_m)\, G^{(m)} \omega_{n-m} . \end{cases}$$

È da notare che la risoluzione dell' equazione mista (3), che fornisce le successive $X^{(n)}(\mu)$, richiede l' aggiunzione dei soli campi di trascendenza che provengono dall' integrazione successiva di equazioni aventi F per primo membro.

6. Abbiamo dunque imparato a determinare l' espressione analitica dell' operazione definita dall' equazione (1), sotto forma di uno sviluppo in serie ordinato per le derivate successive della funzione arbitraria, e convergente assolutamente ed uniformemente in un intorno della funzione data μ. Per $\varphi = 1$, quello sviluppo dà $X(\mu) = \lambda_0$; pertanto, ad una funzione arbitraria

[1] *Hauptintegral* degli autori tedeschi. Per la sua determinazione, v. *M.*, §§ 110 e segg.

μ l' operazione X può fare corrispondere una funzione pure arbitraria λ_0. Ciò è analogo a quanto accade, nella teoria delle funzioni, per le equazioni differenziali del prim' ordine: se $y = \varphi(x)$ è l' integrale generale di una simile equazione, si può fissare ad arbitrio il valore y_0 di y che corrisponde ad un dato valore x_0 di x.

7. Dirò *ramo* dell' operazione X l' insieme delle sue determinazioni per le quali ad una funzione data μ corrisponde una funzione parimente data λ_0. Siano X_1, X_2 due simili determinazioni: posto $X_3 = X_2 - X_1$, si avrà

$$X_3(\mu\varphi) = \omega_1\varphi' + \frac{\omega_2}{1\,.\,2}\varphi'' + \cdots + \frac{\omega_n}{n!}\varphi^{(n)} + \cdots; \tag{4}$$

la X_3 è un ramo dell' operazione che ammette come radice la funzione data μ.

In particolare, si può considerare quel ramo di X che fa corrispondere ad una costante una costante: $X(1) = 1$. Si ottiene allora lo sviluppo, valido nell' intorno della costante

$$X(\varphi) = \varphi + \lambda_1\varphi' + \frac{1}{1\,.\,2}\lambda_2\varphi'' + \cdots,$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ è la successione di funzioni determinata, all' infuori delle addittive $\omega_1, \omega_2, \ldots$, dal sistema (3) colla condizione iniziale $\lambda_0 = 1$. Fissata la determinazione di ogni λ_n, resta fissata quella delle $X(x^n) = \xi_n$, legate colle λ_n da

$$\xi_n = \lambda_n + n\,x\,\lambda_{n-1} + (n_2)\,x^2\lambda_{n-2} + \cdots + nx^{n-1}\lambda_1 + x^n. \tag{5}$$

8. Applichiamo la teoria generale svolta nelle poche righe precedenti ad alcune equazioni particolari della forma (1), e consideriamo dapprima il caso in cui la forma differenziale lineare F che figura nel primo membro della (1) si riduce all' ordine zero, nel quale caso non ha più luogo la moltiplicità di determinazioni delle λ_n dall' equazione mista differenziale e alle differenze (3), poichè questa moltiplicità è dovuta, come si è visto, alla determinazione molteplice della F^{-1}.

L' equazione (1) si riduce, in questo caso, a

$$X' = GX; \tag{6}$$

il sistema ricorrente (3) è dato da

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = G\lambda_0, \\ \lambda_2 = G\lambda_1 + G'\lambda_0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{n+1} = G\lambda_n + nG'\lambda_{n-1} + \cdots (n_{m-1})\,G^{(m-1)}\lambda_{n-m+1} + (n_m)\,G^m\lambda_{n-m}; \end{array}\right. \tag{7}$$

le λ_n sono determinate senza ambiguità quando sia fissata la λ_0. Talchè, quando sia stabilito il ramo della X che si considera mediante la posizione

$X(\mu) = \lambda_0$, lo sviluppo in serie (2) resta fissato senza ambiguità nei suoi coefficienti; in questo caso, la determinazione delle λ_n non richiede l'aggiunzione di alcun campo di trascendenza a quello di λ_0 e dei coefficienti di G.

9. Supponiamo che un'operazione X, soddisfacente alla equazione (6), ammetta una radice μ. Sarà allora $\lambda_0 = 0$, e quindi, per le (7), tutte le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ saranno identicamente nulle. Essendo dunque $X'(\mu) = 0$, $X''(\mu) = 0, \ldots$, sarà $X(x\mu) = 0$, $X(x^2\mu) = 0, \ldots$, e quindi le funzioni $\mu, x\mu, x^2\mu, \ldots$ e tutte le loro combinazioni lineari, saranno radici di X, la quale ammetterà pertanto uno spazio lineare di radici formato da tutti gli elementi di un intorno di μ. Manca in tale caso, per $X(\varphi\mu)$, uno sviluppo in serie della forma (2); questo fatto si può esprimere dicendo che l'operazione X è *singolare* nell'intorno di μ, o che μ è un *elemento singolare* di X.

In particolare, sostituendo ad $X(\varphi)$ il ramo $X(\mu\varphi) = X_1(\varphi)$, questo ammette come radice $\varphi = 1$, $\varphi = x$, $\varphi = x^2, \ldots$, e quindi tutto un intorno S della costante; la costante è, in questo caso, una singolarità di X_1.

10. Mostriamo però come sia possibile di ottenere come segue un'espressione analitica per X_1 anche quando essa è singolare nell'intorno della costante. All'uopo, si indichi con σ una funzione che non sia radice di X_1, e si consideri, essendo α un elemento di S:

$$X_1(\alpha) = X_1\left(\frac{\alpha\sigma}{\sigma}\right);$$

questa si sviluppa (M, § 63) in

$$X_1(\alpha) = X_1(\sigma)\frac{\alpha}{\sigma} + X_1'(\sigma)\, D\frac{\alpha}{\sigma} + \frac{1}{1\,.\,2} X''_1(\sigma)\, D^2\frac{\alpha}{\sigma} + \cdots;$$

ora

$$D\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\left(\alpha' - \frac{\sigma'}{\sigma}\alpha\right)$$

ed indicando con $E(\alpha)$ la forma di prim'ordine

$$\alpha' - \frac{\sigma'}{\sigma}\alpha,$$

viene, come si verifica immediatamente:

$$D\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}E(\alpha),\ D^2\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}E^2(\alpha), \ldots D^n\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}E^n(\alpha).$$

Si ottiene così lo sviluppo:

$$X_1(\alpha) = \frac{1}{\sigma}\left(X_1(\sigma)\,\alpha + X'_1(\sigma)\,E\alpha + \frac{1}{1\,.\,2}X''_1(\sigma)\,E^2\alpha + \cdots\right), \tag{8}$$

in cui le $X'_1(\sigma)$, $X''_1(\sigma)$, ... sono determinate univocamente dalle (7) mediante $X_1(\sigma)$, che per ipotesi non è zero; lo sviluppo così ottenuto è valido in un intorno della funzione σ.

11. Consideriamo, per fare una prima applicazione particolare, l'equazione della forma (6)

$$X' = \beta X,$$

dove β è una funzione analitica regolare nell'intorno di $x = 0$. Le equazioni (7) danno allora

$$\lambda_1 = \beta\lambda_0, \quad \lambda_2 = \beta\lambda_1, \ldots,$$

onde

$$\lambda_n = \lambda_0 \beta^n,$$

e lo sviluppo di X è

$$X(\varphi) = \lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \beta^n \varphi^{(n)}. \tag{9}$$

Indichiamo con a il massimo valore assoluto di $\beta(x)$ entro il cerchio (r) di centro $x = 0$ e di raggio r; sia poi S l'intorno della costante costituito dalle serie di potenze convergenti in cerchi di centro $x = 0$ e di raggi superiori ad a. Essendo φ un elemento di S, ed $a + r'$ il suo raggio di convergenza, sarà per ogni x preso entro il minore dei due cerchi (r), (r'):

$$|x| + |\beta(x)| < a + r',$$

e quindi, entro quel cerchio, $X(\varphi) = \varphi(x + \beta(x))$. Il ramo della operazione X dato dalla serie (9) non è dunque altro che il risultato, moltiplicato per λ_0, della sostituzione di $x + \beta(x)$ al posto di x in ogni elemento di S.

Se, in particolare, β si riduce ad una costante a — p. es. positiva — il ramo X ora trovato non è altro che $\lambda_0\varphi(x + a)$. Questo ramo non si applicherebbe a certe funzioni, ad esempio ad una funzione σ che non si potesse continuare fuori di un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio $\leq a$. Per ottenere un ramo di operazione soddisfacente all'equazione $X' = aX$ e valido intorno a σ, basta procedere come nel § 10; si ottiene così un ramo X_1 definito da $X_1(\sigma) = 1$, ed il cui sviluppo, valido in un intorno di σ, sarà

$$X_1(\varphi) = \sum \frac{1}{n!} E^n \varphi,$$

dove, come dianzi, la $E\varphi$ è la forma differenziale lineare di prim'ordine $\varphi' - \frac{\sigma'}{\sigma} \varphi$.

12. Un caso particolare dell'equazione (6), più interessante del precedente, si ottiene facendo $G = D - x$. L'equazione simbolica che ne nasce, cioè:

$$X' = (D - x) X, \tag{10}$$

è quella cui soddisfa la trasformazione di Laplace ([1]).

Relativamente a quest'equazione, le equazioni ricorrenti (7) prendono la forma:

$$\begin{cases} \lambda_1 = (D - x) \lambda_0 \\ \lambda_2 = (D - x) \lambda_1 + \lambda_0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_{n+1} = (D - x) \lambda_n + n\lambda_{n-1}. \end{cases}$$

L'integrazione di questo sistema si eseguisce senza difficoltà, e si trova

$$\lambda_n = \lambda_0^{(n)} - nx\lambda_0^{(n-1)} + (n_2)\, x^2\lambda_0^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n x^n \lambda_0; \tag{11}$$

questo risultato si ha immediatamente per i primi valori dell'indice, e si dimostra poi in generale, deducendosi dall'equazione ricorrente che se la (11) vale per l'indice n, varrà anche per l'indice successivo $n + 1$. Il ramo dell'operazione X, definita (univocamente) da $X(\mu) = \lambda_0$, è dunque dato in un intorno di μ, da

$$X(\mu\varphi) = \lambda_0\varphi + \tag{12}$$

$$+ (\lambda'_0 - x\lambda_0)\, \varphi' + \cdots + \frac{1}{n!} (\lambda_0^{(n)} - nx\lambda_0^{(n-1)} + \cdots (-1)^n x^n\lambda_0)\, \varphi^{(n)} + \cdots.$$

Si faccia in particolare $\lambda_0 = e^{ax}$; viene:

$$e^{-ax} X(\mu\varphi) = \varphi + (a - x)\, \varphi' + \cdots \frac{(a - x)^n}{n!} \varphi^{(n)} + \cdots,$$

che per le funzioni di un intorno di μ assai facile a determinarsi, non è altro che $\varphi(a)$.

Facendo $X(1) = \frac{1}{x}$, si ha un ramo dell'operazione in discorso dato da

$$X(\varphi) = \frac{1}{x}\, \varphi - \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) \varphi' + \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + \frac{x}{1\,.\,2}\right) \varphi'' - \cdots,$$

da cui risulta

$$X(x) = -\frac{1}{x^2},\ X(x^2) = \frac{1\,.\,2}{x^3}, \ldots;$$

([1]) Infatti, la (10) non è altro che l'equazione a) della citata Nota dell'Amaldi, cioè una delle equazioni di definizione della trasformazione di Laplace.

ed è questo il ramo della trasformazione di Laplace considerato al § 4 della citata Nota del dott. Amaldi.

Sarebbe interessante di vedere qaule è la condizione affinchè un ramo dell'operazione X definita dalla (10) soddisfi alla seconda equazione di definizione della trasformazione di Laplace: $XD = -xX$; ma non è qui il luogo di insistere su ciò.

13. Veniamo ora ad alcune applicazioni in cui la F dell'equazione (1) non si riduca all'ordine zero, e consideriamo per prima l'equazione, cui soddisfa la trasformazione di Eulero e la derivazione d'indice qualunque s:

$$DX' = sX . \tag{13}$$

L'equazione ricorrente (3) si riduce in questo caso a

$$DX_n = (s - n + 1) X_{n-1} ,$$

da cui, fatto $X(\mu) = \lambda_0$, $X_n(\mu) = \lambda_n$, viene

$$\lambda_n = s(s-1) \dots (s - n + 1) D^n \lambda_0 .$$

Si ha così, per il ramo della X determinato dalla condizione $X(\mu) = \lambda_0$, e per un intorno della funzione μ:

$$X(\mu\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (s_n) D^{-n} \lambda_0 . \varphi^{(n)} .$$

Volendo aggiungere per un ramo dell'operazione definita da (13), la condizione di essere commutabile colla derivazione, si soddisferanno le condizioni perchè X sia derivata d'indice s. Ciò si può ottenere nel modo indicato al § 108 del *Mémoire* .

14. Il sig. Borel, nelle sue recenti ed interessanti ricerche sulle serie del Taylor ([1]), ha fatto uso di un'operazione distributiva che egli definisce per le potenze intere e positive di x, e quindi per l'intorno della costante, mediante le uguaglianze:

$$X(s) = 1 , \ X(x^n) = \frac{x^n}{n!} .$$

Questa operazione gode manifestamente, per ogni serie di potenze φ intere e positive di x, della proprietà:

$$DX(x\varphi) = X(\varphi) ,$$

che si può anche scrivere

$$DX' + xDX = 0 , \tag{14}$$

poichè dalla definizione della derivazione funzionale si deduce

$$DX' = DX(x\varphi) - xDX(\varphi) - X(\varphi) .$$

([1]) Acta Mathematica, T. XX, pag. 243.

Si può dunque assumere l'equazione simbolica (14) come definizione di un' operazione; l'operazione di Borel sarà quel ramo dell'operazione così definita, che è individuata dalla condizione $X(1)=1$.

Ora l'equazione mista differenziale e alle differenze (3) si riduce, nel caso dell'equazione (14), e posto $X(\mu)=\lambda_0$, $X^{(n)}(\mu)=\lambda_n$, alla forma:

$$D\lambda_{n+1}=-(xD+n)\lambda_n-nx\lambda_{n-1},$$

ossia

$$\lambda'_{n+1}+n\lambda_n+x(\lambda'_n+n\lambda_{n-1})=0. \tag{15}$$

Questa si integra senza difficoltà; si ha infatti

$$\lambda_1=D^{-1}\lambda_0-x\lambda_0,$$

onde per sostituzione, ed applicazione dell'integrazione per parti [1]

$$\lambda_2=D^{-2}\lambda_0-2xD^{-1}\lambda_0+x^2\lambda_0,$$

e in generale, col solito passaggio da n ad $n+1$:

$$\lambda_n=D^{-n}\lambda_0-nxD^{-(n-1)}\lambda_0+(n_2)\,x^2D^{-(n-2)}\lambda_0-\cdots+(-1)^n x^n\lambda_0.$$

Talchè, definendo un'operazione mediante l'equazione simbolica (14), il ramo di questa operazione individuato da $X(\mu)=\lambda_0$ è determinato, nell'intorno della funzione μ, dallo sviluppo

$$X(\mu\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(D^{-n}\lambda_0-nxD^{-(n-1)}\lambda_0+(n_2)x^2D^{-(n-2)}\lambda_0\ldots+(-1)^n x^n\lambda_0)D^n\varphi. \tag{16}$$

La determinazione non è però univoca, essendovi nei coefficienti le costanti che vi si introducono linearmente colle quadrature eseguite su λ_0.

Si noti che, dalla (16), segue:

$$X(\mu)=\lambda_0,\ X(x\mu)=D^{-1}\lambda_0,\ldots X(x^n\mu)=D^{-n}\lambda_0.$$

Il ramo dell'operazione X determinato da $X(1)=1$ e prendendo inoltre, nelle quadrature $D^{-1}s$, $D^{-2}s$, ... l'estremo inferiore in $x=0$, coincide coll'operazione di Borel.

15. Per ultima, consideriamo l'operazione definita dall'equazione simbolica (non omogenea in X)

$$DX'=1, \tag{17}$$

la quale, sebbene non rientri nel tipo (1), vi si avvicina però assai. Se poniamo anche qui

$$X(\mu)=\lambda_0,\ X^{(n)}(\mu)=\lambda_n$$

[1] Vale a dire, in generale, della formula (17) del § 89 del *Mémoire*.

e sviluppiamo $X(\mu\varphi)$ secondo la formula (2), viene che le $X^{(n)}(\mu)$ si determinano immediatamente dalla (17), che derivata funzionalmente dà:

$$X' + DX'' = 0, \dots nX^{(n)} + DX^{(n+1)} = 0,$$

e quindi, poichè $DX'(\mu) = \mu$, onde $\lambda_1 = D^{-1}\mu$, viene

$$\lambda_2 = -D^{-2}\mu, \ \lambda_3 = 2D^{-3}\mu, \dots \lambda_n = (-1)^{n-1}(n-1)!\, D^{-n}\mu.$$

Si ha così lo sviluppo

$$(18) \quad X(\mu\varphi) = \lambda_0\varphi + D^{-1}\mu \,.\, \varphi' - \frac{1}{2} D^{-2}\mu \,.\, \varphi'' + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} D^{-n}\mu . \varphi^{(n)} + \dots$$

Qui la funzione λ_0 è affatto arbitraria, e sono pure arbitrarie le costanti che nascono dalla determinazione delle quadrature applicate a μ. Da notarsi il ramo dell'operazione X determinato da $X(1) = 0$, cioè

$$(19) \quad X(\varphi) = D^{-1}1 \,.\, \varphi' - \frac{1}{2} D^{-2}1 \,.\, \varphi'' + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} D^{-n}1 \,.\, \varphi^{(n)} + \dots .$$

Se applichiamo questa operazione alla funzione $\frac{1}{1-x}$, ed assumiamo per le quadrature l'estremo inferiore $x = 0$, si ottiene, con un calcolo facile,

$$(20) \qquad X\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\frac{1}{1-x} \log(1-x).$$

Colle medesime determinazioni, si trova

$$X(x^m) = \left(m - \frac{1}{2}(m_2) + \frac{1}{3}(m_3) - \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{m}\right) x^m,$$

e dal confronto colla (20), si ha la formula di calcolo combinatorio

$$m - \frac{1}{2}(m_2) + \frac{1}{3}(m_3) - \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}.$$

Si noti che l'operazione definita in quest'ultimo paragrafo ammette un ramo commutabile colla derivazione, e che soddisfa all'equazione simbolica $e^X = D$, per cui esso potrebbe indicarsi simbolicamente con $\log D$. Questo ramo dà l'operazione infinitesima generatrice del gruppo ad un parametro delle operazioni D^s.

Matematica. — *Contributo alla geometria delle masse.* Nota dell'ing. A. Ciappi, presentata dal Socio V. Cerruti.

I.

1. Consideriamo un sistema di masse $m_1\, m_2 \ldots m_n$ di segno qualunque distribuite in un piano π e occupanti su esso rispettivamente il posto dei punti $P_1\, P_2 \ldots P_n$. Supponiamo per ora $\Sigma m \neq 0$.

Essendo a e b due rette arbitrarie di π indichiamo con $y_1\, y_2 \ldots y_n$ le distanze dei punti $P_1\, P_2 \ldots P_n$ dalla retta a valutate ortogonalmente o secondo una direzione arbitraria, per es. quella di b; e indichiamo con $x_1\, x_2 \ldots x_n$ le distanze degli stessi punti dalla retta b valutate pure ortogonalmente o secondo una direzione arbitraria, per es. quella di a.

2. S'intende per *momento statico* del dato sistema di masse rispetto alla retta b, la somma

$$\Sigma mx$$

estesa a tutte le masse del sistema; e per *momento di 2° grado* rispetto alle due rette a e b, la somma

$$\Sigma mxy$$

essa pure estesa a tutte le masse del sistema.

Tanto il momento statico quanto il momento di 2° grado si dicono *normali* se le distanze sono valutate ortogonalmente, e si dicono *obliqui* se esse sono valutate obliquamente.

Per fissare le idee noi supporremo che dette distanze sieno valutate secondo le direzioni di a e di b.

3. Dei punti P affetti da coefficienti uguali o proporzionali alle masse m, troviamo il baricentro O e diciamo $X_0\, Y_0$ le sue distanze da b e da a. Poscia determiniamo separatamente i momenti statici di tutte le masse m rispetto alla retta b, e ritenendo i punti P affetti da coefficienti uguali o proporzionali a questi momenti statici, troviamo il loro baricentro B che chiamasi *centro di 2° grado* o *centro relativo* alla retta b, perchè esso è unico, resta invariato qualunque sia la direzione assunta per computare le distanze x e dipende esclusivamente dalla posizione della retta b. Indichiamo con Y_b la distanza di B dalla retta a.

In modo analogo troviamo il centro A relativo alla retta a e chiamiamo X_a la sua distanza dalla retta b.

4. Per un noto teorema sui momenti statici, si ha allora

$$\Sigma mxy = Y_b . \Sigma mx = Y_b . X_0 . \Sigma m \tag{1}$$

e così pure

(2) $$\Sigma mxy = X_a . \Sigma my = X_a . Y_0 . \Sigma m$$

conseguentemente

(3) $$Y_b . X_0 = X_a . Y_0$$

5. Supponiamo ora che nessuna delle due rette a e b passi pel baricentro O del sistema, cioè che sieno X_0 e Y_0 diversi da zero, mentre la retta a passi per B, cioè sia $Y_b = 0$; dalla (3) risulta allora

$$X_a = 0$$

e quindi il centro A relativo ad a sta sopra b.

Le due rette o assi a e b diconsi allora *coniugati* e rispetto ad essi è evidentemente

$$\Sigma mxy = 0 .$$

Pertanto tutte le rette passanti per B hanno i centri relativi situati su b e così tutti i punti di una retta a hanno per assi relativi rette che inviluppano il punto A.

6. Onde è che il dato sistema di masse genera una corrispondenza reciproca tra i punti e le rette del piano π, ossia un sistema polare, la cui conica fondamentale, anche se imaginaria, ha per centro un punto reale e reali le coppie di diametri coniugati; e gode sempre della proprietà che rispetto ad essa un asse e il centro relativo sono polare e polo.

7. Ciò premesso prendiamo in esame due assi a e b *non coniugati*, ma di cui il primo passi per O.

Poichè $Y_0 = 0$ ed evidentemente $X_a = \infty$, risulta dalla (2)

$$\Sigma mxy = \infty . 0 . \Sigma m$$

vale a dire il momento di 2° grado si presenta sotto forma indeterminata; ma dalla (1) si ha

$$\Sigma mxy = Y_b . X_0 . \Sigma m$$

e così l'indeterminatezza è tolta.

8. Considerando però due assi a e b *non coniugati* entrambi passanti per O, allora mentre è $\Sigma mxy \neq 0$, sono $X_0 = Y_0 = 0$ e $Y_b = \infty$, $X_a = \infty$, quindi tanto dalla (1) quanto dalla (2) si ha

$$\Sigma mxy = \infty . 0 . \Sigma m .$$

In tal caso non si saprebbe togliere l'indeterminatezza senza ricorrere al teorema seguente:

Il momento di 2° grado di un sistema di masse distribuite in un piano, rispetto a due assi non coniugati di cui uno passi pel baricentro del sistema e l'altro si sposti comunque purchè parallelamente a sè stesso, è costante.

Infatti, sia O il baricentro del sistema (centro della conica fondamentale); dei due assi non coniugati a e b, incontrantisi in M′, l'asse a passi per O, e sia B il centro relativo a b. Condotta da B la parallela a b fino ad incontrare in M l'asse a, risulta $\overline{BM} = Y_b$, e poichè $\overline{OM'} = X_0$, si ha per la (1)

$$\Sigma mxy = \overline{BM} \,.\, \overline{OM'} \,.\, \Sigma m \,. \tag{4}$$

Inoltre tracciata la retta BO, di cui diremo B′ il punto d'incontro con b, abbiamo in BO il diametro della conica fondamentale coniugato alla direzione di b, ossia abbiamo il luogo del centro relativo all'asse b quando b si sposta parallelamente a sè stesso.

Ora collo spostarsi di b parallelamente a se stesso, si ha sul diametro OB oltre alla punteggiata B...... l'altra punteggiata B′...... accoppiata colla prima in involuzione; e contemporaneamente sull'asse a restano individuate due altre punteggiate M...... e M′...... pure accoppiate in involuzione con lo stesso centro in O. Pertanto risulta

$$\overline{OM} \,.\, \overline{OM'} = \text{costante} \tag{5}$$

e poichè dal triangolo OBM si ha

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{BM}} = \text{costante} = \mu$$

da cui

$$\overline{OM} = \mu \,.\, \overline{BM}$$

sostituendo nella (5) si ottiene

$$\overline{BM} \,.\, \overline{OM'} = \text{costante}$$

e perciò dalla (4)

$$\Sigma mxy = \text{costante}$$

come volevasi dimostrare.

In conseguenza di ciò per trovare il momento di 2° grado rispetto a due assi a e b *non coniugati* ed entrambi *passanti* per O, basta condurre un terzo asse b_1 parallelo a b, rilevare la sua distanza X_0 da O, trovare il suo centro relativo B_1 e la distanza Y_{b_1} di questo da a e infine calcolare il prodotto $X_0 \,.\, Y_{b_1} \,.\, \Sigma m$.

II.

9. Passiamo ora a considerare il caso di $\Sigma m = 0$, cioè il caso in cui il dato sistema di masse $m_1\ m_2 \ldots m_n$, che diremo S, possa immaginarsi costituito da due sistemi S_1 e S_2 tali che la somma delle masse di S_1, che indicheremo con $\Sigma m'$, sia uguale e di segno contrario alla somma delle masse di S_2, che indicheremo con $\Sigma m''$.

Cercati separatamente i baricentri O_1 e O_2 dei due sistemi S_1 e S_2, può darsi:

1° che O_1 sia distinto da O_2

2° che O_1 sia sovrapposto ad O_2.

Nel primo caso il sistema S ha per baricentro il punto all' infinito della congiungente $O_1 O_2$; il suo momento statico rispetto a tutte le rette di un fascio qualunque di raggi paralleli è costante; la conica direttrice della polarità è una parabola, e il teorema sussiste ancora e può dimostrarsi anche direttamente in maniera assai semplice.

Nel secondo caso il sistema S è privo di baricentro; il suo momento statico rispetto ad un' asse qualunque del piano è nullo; la conica inviluppo fondamentale della polarità degenera in una coppia di punti appartenenti alla retta all' infinito del piano, e il teorema non solo sussiste ancora, ma diviene più generale.

Sia infatti O la posizione comune ai due baricentri O_1 e O_2. Considerando un asse qualunque a troviamone i centri relativi A' e A'' nei due sistemi di masse S_1 e S_2. Il centro relativo ad a nel sistema S sarà evidentemente il baricentro dei due punti A' e A'' affetti da coefficienti uguali o proporzionali ai momenti statici di S_1 e S_2 rispetto ad a; ma poichè tali momenti statici sono uguali e di senso contrario, segue che il detto centro è il punto all' infinito della congiungente $A'A''$ e pertanto è $A'A''$ la direzione coniugata ad a. Conseguentemente il centro relativo ad un' asse qualunque del piano sta sulla retta all' infinito di questo, e tale retta all' infinito può considerarsi come asse relativo ad un punto qualsivoglia del piano.

Tracciamo un altro asse qualunque b non coniugato ad a. Uniamo A' e A'' fra di loro e con O e diciamo M' e M'' le intersezioni di OA' e OA'' con a; tiriamo per A' e A'' le parallele ad a fino ad incontrare in C e D l' asse b; e infine conduciamo per O e A'' le parallele a b fino ad incontrare a in M e $A'C$ in A.

Il momento di 2° grado del sistema S rispetto ai due assi a e b è espresso allora da

$$(6) \qquad \Sigma mxy = \overline{OM} \, . \, \Sigma m' \, . \, \overline{A'C} - \overline{OM} \, . \, \Sigma m'' \, . \, \overline{A''D} = \overline{OM} \, . \, \overline{A'A} \, . \, \Sigma m' \, .$$

Ora restando fisso a, comunque si sposti b, purchè parallelamente a sè stesso, la distanza $\overline{A'A}$ rimane invariata come la $\overline{OM}$, e perciò

$$\Sigma mxy = \text{costante}$$

onde:

se un sistema di masse distribuite in un piano è privo di baricentro, il suo momento di 2° grado rispetto a due assi qualsivogliano non coniugati di cui uno resti fisso e l' altro si sposti comunque purchè parallelamente a sè stesso, è costante.

10. Ma vi ha di più. Si rileva per cose note, essere

$$\overline{OM'}\,.\,\overline{OA'} = \text{costante} = c_1 \tag{7}$$

e inoltre, osservando che con lo spostarsi di a parallelamente a sè stesso i suoi centri relativi A′ e A″ si spostano sulle congiungenti OA′ e OA″ conservandosi allineati col punto all'infinito della A′A″, si vede facilmente che il punto A scorre sulla congiungente OA e che quindi

$$\frac{\overline{A'A}}{\overline{OA'}} = \text{costante} = c_2$$

da cui

$$\overline{A'A} = c_2 \cdot \overline{OA'}$$

e ancora, dal triangolo MOM′,

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}} = \text{costante} = c_3$$

da cui

$$\overline{OM} = c_3\,.\,\overline{OM'}$$

onde sostituendo nella (6)

$$\Sigma mxy = c_3\,.\,\overline{OM'}\,.\,c_2\,.\,\overline{OA'}\,.\,\Sigma m'$$

e pertanto dalla (7)

$$\Sigma mxy = c_1\,.\,c_2\,.\,c_3\,.\,\Sigma m' = \text{costante}\,.$$

Di qui il teorema più generale:
quando il sistema S *è privo di baricentro, il suo momento di 2° grado rispetto a due assi qualsivogliano non coniugati è costante comunque entrambi si spostino, purchè parallelamente a sè stessi.*

11. Se $a \equiv b$, il momento di 2° grado diviene *momento d' inerzia*, e il teorema precedente dà luogo alla notevole proposizione:
se un sistema di masse distribuite in un piano è privo di baricentro, il suo momento d' inerzia rispetto ad ogni retta di un fascio qualunque di rette parallele è costante (1).

III.

12. Tutte le proprietà precedentemente dimostrate possono estendersi con abbastanza facilità ad un sistema di masse $m_1\ m_2 \ldots.\ m_n$ che occupino rispettivamente la posizione dei punti $P_1\ P_2 \ldots.\ P_n$ comunque situati nello spazio.

(1) In particolare, il momento d' inerzia è nullo rispetto a tutte le rette che hanno o l'una o l'altra delle due direzioni individuate dalle tangenti comuni alle coniche fondamentali delle polarità generate dai due sistemi S_1 e S_2.

Indicheremo ancora con S il dato sistema di masse e supporremo in primo luogo $\Sigma m \neq 0$.

Consideriamo due piani qualsiansi α e β e chiamiamo con $y_1\ y_2 \ldots\ y_n$ le distanze dei punti $P_1\ P_2 \ldots P_n$ da α computate normalmente o secondo una direzione arbitraria; e così indichiamo con $x_1\ x_2 \ldots x_n$ le distanze analoghe da β computate normalmente o secondo una direzione arbitraria.

13. S' intende per *momento statico* del sistema S rispetto al piano α la somma

$$\Sigma my$$

estesa a tutte le masse del sistema; e per *momento di 2° grado* di S rispetto ai due piani α e β la somma

$$\Sigma mxy$$

estesa a tutte le masse di S.

Anche in tal caso si distinguono i momenti in *normali* ed *obliqui*, a seconda che le distanze sieno computate normalmente od obliquamente.

Per fissare le idee noi valuteremo le distanze x e y parallelamente alle intersezioni dei piani α e β con un terzo piano arbitrario che diremo γ.

14. Dei punti P affetti da coefficienti uguali o proporzionali alle rispettive masse m, troviamo il baricentro O, centro del sistema S, e diciamone $X_0\ Y_0$ le distanze da β e da α.

Determinati poi i singoli momenti statici delle masse m rispetto al piano β, riteniamo i punti P affetti da coefficienti uguali o proporzionali a tali momenti statici e troviamone il baricentro B che dicesi *centro di 2° grado* o *centro relativo* al piano β, perchè è unico e non dipende che dalla posizione del piano β. Diciamo Y_β la sua distanza da α.

Analogamento determinati i momenti statici delle masse m rispetto al piano α, troviamo il centro A relativo ad α e diciamone X_α la distanza da β.

15. Per essere

$$\Sigma mxy = Y_\beta \,.\, X_0 \,.\, \Sigma m = X_\alpha \,.\, Y_0 \,.\, \Sigma m \tag{8}$$

e quindi

$$Y_\beta \,.\, X_0 = X_\alpha \,.\, Y_0$$

risulta che se B sta su α, A si trova su β: tali piani si dicono allora *coniugati* e rispetto ad essi il momento di 2° grado è evidentemente nullo.

Di più segue che tutti i piani passanti per B hanno i centri relativi situati su α, e pertanto il centro relativo ad un piano è l' inviluppo di tutti i suoi piani coniugati.

16. Il sistema S individua quindi una corrispondenza reciproca tra i punti e i piani dello spazio, ossia un sistema polare la cui quadrica fondamentale, reale o imaginaria, ha sempre il centro reale coincidente con O e reali le coppie di piani e diametri coniugati. Rispetto a tale quadrica è

evidente che un piano ed il suo centro relativo si comportano come piano polare e polo; e quindi la congiungente AO è il diametro della quadrica coniugato ai piani paralleli ad α, cioè è il luogo dei centri relativi a tutti i piani paralleli ad α.

17. Ciò premesso consideriamo due piani arbitrarî α e β non coniugati di cui α passi per O.

Essendo B il centro relativo a β uniamo B con O e per questa congiungente conduciamo il piano che contiene la direzione coniugata ad α. Assumeremo questo piano come piano γ.

Chiamando allora B′ la traccia di BO su β e B″ il punto in cui il piano γ incontra la retta $\overline{\alpha\beta}$, saranno B′B″ e B″O le intersezioni di γ coi piani β e α. Condotta da B la parallela a B′B″, diciamo B‴ il punto ove essa incontra la B″O. Il momento di 2° grado del sistema S rispetto ai due piani α e β, è espresso allora, per la prima della (8), da

$$\Sigma mxy = \overline{BB''} \cdot \overline{OB''} \cdot \Sigma m \tag{9}$$

Ora, comunque si sposti il piano β, purchè parallelamente a sè stesso, i punti B . . . . e B′ . . . . della congiungente BO descrivono due punteggiate in involuzione di cui O è il centro; e così sulla B″O vengono generate le punteggiate B‴. . . . e B″. . . . pure in involuzione con centro in O; onde risulta

$$\overline{OB'''} \cdot \overline{OB''} = \text{costante} = c_1 \tag{10}$$

ma del triangolo OB‴B si ha

$$\frac{\overline{OB'''}}{\overline{BB'''}} = \text{costante} = c_2$$

da cui

$$\overline{OB'''} = c_2 \cdot \overline{BB'''}$$

quindi dalla (10)

$$\overline{BB'''} \cdot \overline{OB''} = \text{costante} = c_3$$

e dalla (9)

$$\Sigma mxy = c_3 \cdot \Sigma m = \text{costante}$$

onde il teorema:

è costante il momento di 2° grado di un sistema di masse, comunque distribuite nello spazio, rispetto a due piani non coniugati di cui uno passi pel baricentro del sistema e l'altro si sposti comunque purchè parallelamente a sè stesso.

IV.

18. Passiamo ora a considerare il caso che sia $\Sigma m = 0$, e indichiamo con S_1 e S_2 i due sistemi parziali che costituiscono il sistema S.

Se il baricentro O_1 del sistema S_1 ($\Sigma m'$) è diverso da quello O_2 del sistema S_2 ($\Sigma m''$), il baricentro del sistema complessivo S è a distanza in-

finita sulla congiungente $O_1 O_2$; il momento statico di S rispetto ad ogni piano di un fascio qualunque di piani parelleli è costante; la quadrica fondamentale della polarità è un paraboloide ad una falda, e il precedente teorema risulta evidente.

Se poi $O_1 \equiv O_2$ il sistema S è privo di baricentro; il suo momento statico rispetto ad un piano qualunque dello spazio è nullo; la quadrica inviluppo fondamentale della polarità degenera in una conica situata sul piano all' infinito dello spazio, ossia il centro relativo ad un piano generico α è il punto all' infinito della congiungente $A'A''$ essendo A' e A'' i centri relativi ad α rispettivamente nei due sistemi S_1 e S_2, e un punto qualunque dello spazio può esser considerato come centro di 2° grado del piano all' infinito.

Considerando un altro piano generico β non coniugato ad α, e assunto il piano $OA'A''$ come piane γ, uniamo A' e A'' con O e diciamo M' e M'' le tracce di queste congiungenti sul piano α, talchè sia $M'M''$ l'intersezione $\overline{\alpha\gamma}$; inoltre per A' e A'' sul piano γ conduciamo le parallele ad $M'M''$ e diciamo C e D le loro tracce su β, talchè sia CD l' intersezione $\overline{\gamma\beta}$; e infine sempre su γ tiriamo per A'' e O le parallele a CD fino ad incontrare rispettivamente $A'C$ in A e $M'M''$ in M.

Il momento di 2° grado del sistema S rispetto ai due piani α e β è espresso da

$$(11) \qquad \Sigma mxy = \overline{OM} \,.\, \Sigma m' \,.\, \overline{A'C} - \overline{OM} \,.\, \Sigma m'' \,.\, \overline{A''D} = \overline{OM} \,.\, \overline{A'A} \,.\, \Sigma m'.$$

Ora se α rimane fisso e β si sposta parallelamente a sè stesso, non solo il segmento $\overline{OM}$ resta invariato, ma anche la distanza $\overline{A'A}$; perciò

$$\Sigma mxy = \text{costante}$$

e quindi:
in un sistema di masse privo di baricentro, è costante il momento di 2° grado rispetto a due piani qualsivogliano non coniugati, di cui uno resti fisso e l' altro si sposti comunque purchè parallelamente a sè stesso.

19. Inoltre, se si tiene fisso β e si fa spostare parallelamente a sè stesso il piano α, risulta

$$\overline{OM} \,.\, \overline{A'A} = \text{costante},$$

onde, più in generale:
il momento di 2° grado di un sistema di masse privo di baricentro è costante rispetto a due piani qualsivogliano α e β non coniugati, comunque questi si spostino purchè parallelamente a sè stessi.

20. Se $\alpha \equiv \beta$ il momento di 2° grado diviene momento d' inerzia e pertanto si ha la proposizione seguente:
il momento d' inerzia di un sistema di masse privo di baricentro è costante rispetto ad ogni piano di un fascio qualunque di piani paralleli (1).

(1) In particolare il momento d' inerzia è nullo rispetto a tutti i piani che hanno una qualunque delle infinite giaciture individuate dai piani tangenti comuni alle due quadriche fondamentali delle polarità generate dai due sistemi S_1 e S_2.

Matematica. — *Sulle congruenze di curve.* — Nota di T. LEVI-CIVITA, presentata dal Socio BELTRAMI.

Matematica. — *Sulle equazioni a coppia di integrali ortogonali.* Nota di T. LEVI-CIVITA, presentata dal Socio BELTRAMI.

Matematica. — *Sulle deformazioni infinitesime della superficie negli spazî a curvatura costante.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sui battimenti luminosi e sull'impossibilità di produrli ricorrendo al fenomeno di Zeemann.* Nota del dott. O. M. CORBINO, presentata dal Socio BLASERNA.

1. Il prof. Righi [1] ebbe per il primo a considerare la possibilità dell' interferenza di due raggi luminosi di diverso periodo, realizzando il fenomeno analogo a quello dei battimenti sonori. Egli dedusse prima con semplici considerazioni analitiche che se si fa pervenire su uno schermo la luce proveniente da due sorgenti a vibrazioni parallele e di diverso periodo, si produce un sistema di frange che si muovono perpendicolarmente alla loro direzione, nel senso di allontanarsi dalla sorgente che compie un numero maggiore di vibrazioni [2], e in modo tale che passano per un punto dello schermo tante frange luminose a ogni minuto secondo quanta è la differenza tra i numeri di vibrazioni delle due sorgenti.

L' esperienza non è realizzabile ricorrendo a due radiazioni diverse dello spettro, prima perchè esse sono completamente indipendenti nelle brusche perturbazioni di fase che subisce la vibrazione, e poi perchè ricorrendo a due radiazioni anche tanto vicine che la loro distanza nello spettro sia eguale a $^1/_{514}$ della distanza delle due righe del sodio, si avrebbero ancora 1000

[1] Effettivamente nella Memoria del Righi è detto che le frange si debbono spostare nel senso di *avvicinarsi* alla sorgente che ha un numero maggiore di vibrazioni. Si tratta però di uno scambio di dicitura come si deduce dal ragionamento, e come mi confermò, dietro mia domanda, l' illustre Professore, il quale m' autorizzò a riferire questa correzione da fare al testo della sua Memoria.

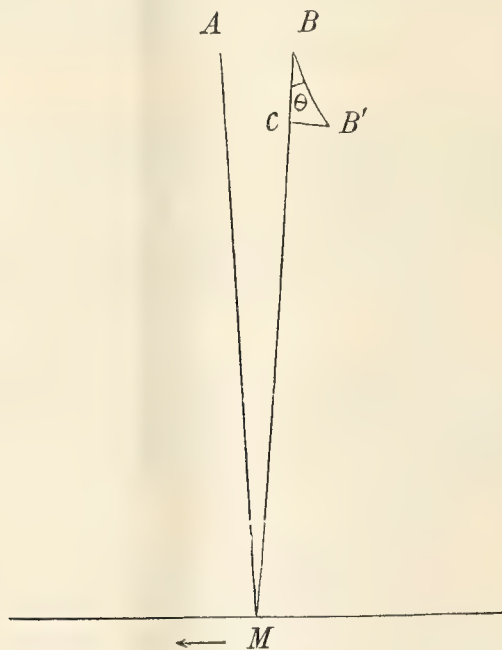
[2] Mem. Acc. Bologna. Serie 4ª, tomo IV, gennaio 1883, Journal de Physique, pag. 437, 1883.

milioni di battimenti per secondo, cioè passerebbero nell' istesso tempo 1000 milioni di frange per un punto dello schermo.

L' esperienza fu invece realizzata (1) cinque anni dopo, producendo due immagini coniugate di una stessa sorgente, e alterando il numero di vibrazioni della luce emessa da una di essa per il passaggio attraverso un polarizzatore in rotazione, con delle disposizioni sperimentali più o meno complicate.

2. Una volta messa innanzi l' idea dell' interferenza tra raggi luminosi di diverso periodo, non è difficile ideare delle esperienze semplicissime o interpretarne delle antiche come realizzanti il fenomeno dei battimenti.

Così è noto che, spostando uno degli specchi di Fresnel parallelamente a sè stesso, si genera uno spostamento delle frange da essi prodotte: l' esperienza fu fatta per la prima volta da Fizeau e Foucault.

È facile il riconoscere in questa esperienza la realizzazione del fenomeno dei battimenti. Infatti per il moto di uno degli specchi viene alterato, in conseguenza del principio di Döppler, il periodo della luce da esso riflessa; sullo schermo interferiscono quindi raggi di diverso periodo, producendosi conseguentemente il fenomeno delle frange in moto.

Se A e B sono le due immagini date dagli specchi e uno di questi subisce un certo spostamento parallelamente a sè stesso, la immagine corrispondente, per es. B, subirà uno spostamento doppio BB', nella stessa direzione, avvicinandosi a un punto M dello schermo di una lunghezza

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BB}' \cos\theta$$

(1) Mem. Acc. Bologna, serie 3ª, t. VIII, nov. 1877. Appendice.

Il numero di vibrazioni apparente di B si sarà accresciuto, per il principio di Döppler, di $\frac{BC}{\lambda}$ e altrettante frange passeranno per il punto M, nel senso della freccia, in virtù dell' enunciato del Righi.

Ora questo numero è appunto quello che si suol dedurre nei trattati [1] considerando la posizione delle frange al principio e alla fine del movimento. Però che si tratti di un vero fenomeno di battimenti è dimostrato dal fatto che le frange *persistono* durante il moto dello specchio, quando, cioè, sullo schermo effettivamente interferiscono raggi di diverso periodo.

Del resto questa esperienza non è, in fondo, che una variante di quella del Righi. L' alterazione del periodo di una delle due luci interferenti che nell' esperienza del Righi era ottenuta con la rotazione di polarizzatori o di lamine di miche, si produce qui in modo semplicissimo col moto dello specchio. Anche lì ciascuna esperienza poteva essere spiegata considerando quale dovesse essere la posizione delle frange per ciascuna posizione successiva del polarizzatore girante. « Ma — come osserva il prof. Righi — mentre in questa maniera la » spiegazione è quasi sempre più lunga e difficile, essa è « ancora meno razionale, poichè effettivamente quando i raggi di lunghezza « d' onda modificata sono stati separati, essi hanno una esistenza reale, e un « prisma deve certamente rifrangerli in ragione di questa nuova lunghezza « d' onda ».

Analogamente si può considerare come un' esperienza di battimenti lo spostamento degli anelli di Newton al variare della distanza delle due superficie tra cui essi si producono.

Così siano essi prodotti per interferenza della luce riflessa dalla superficie A con quella riflessa dalla superficie B; si osserverà uno spostamento di

frange quando varia la distanza AB. Ora questa può variare o per uno spostamento di A, o per uno spostamento di B; in entrambi i casi si altera per il principio di Döppler il periodo della luce riflessa da una delle superfici, l' interferenza avviene tra luci di diverso periodo e si produce quindi il fenomeno del movi mento delle frange. Anche in questo caso si può calcolare con questo processo lo spostamento delle frange, e si trova lo stesso numero cui si perviene per altra via.

[1] Mascart, *Traité d'Optique*, t. I, p. 175.

Altrettanto dicasi dello spostamento di frange che si osserva in alcuni refrattometri, per es. in quello di Michelson, per il movimento di uno specchio.

3. Ma l' esperienza più semplice che realizza il fenomeno dei battimenti luminosi in modo perfettamente analogo ai battimenti sonori è quella notissima per cui, esaminando con un nicol la luce emergente da un altro nicol lentamente girante, si osservano delle intermittenze di luce e di oscurità. Infatti la luce emergente dal nicol girante è cinematicamente equivalente alla sovrapposizione di due fasci di luce circolare capaci di interferire e di diverso numero di vibrazioni.

Il nicol analizzatore lascia passare due componenti rettilinee che sono anch' esse di diverso periodo e che producono il fenomeno dei battimenti.

L' interposizione adunque di un nicol sul tragitto di un fascio di luce a piano di polarizzazione girante produce al di là il fenomeno dei battimenti.

4. Risulta allora evidente, come può desumersi da una mia precedente Nota [2], la risposta a un quesito postosi dal prof. Righi [1], se cioè sia possibile produrre il fenomeno dei battimenti ricorrendo alle alterazioni di periodo causate da un campo magnetico su una sorgente che si trovi in esso.

Infatti, secondo l' interpretazione del Cornu, il campo trasforma ciascuna delle due vibrazioni ortogonali indipendenti da cui era costituita la luce primitiva in una vibrazione continua girante, e le due vibrazioni, durante la rotazione, si mantengono a 90° l' una dall' altra. Se di quelle componenti ne esistesse una sola, cioè se la luce emessa dalla sorgente fuori del campo fosse già polarizzata in un piano determinato, per il semplice impiego di un nicol si otterrebbero i battimenti luminosi che potrebbero far constatare le più lievi tracce dell' effetto Zeemann; ma finchè la sorgente senza il campo manda luce naturale, il fenomeno dei battimenti sarà inosservabile, poichè alla primitiva componente rotante si sovrappone sempre l' altra che si mantiene a 90° dalla prima. Si ritrova così la condizione cui per via analitica giunge il Righi, che cioè perchè si possano avere battimenti o frange in moto è necessario che la luce emessa dalla sorgente fuori del campo non sia luce naturale.

5. Questa condizione, come bene osserva l' illustre professore, è praticamente irrealizzabile. Però è facile vedere che si può modificare l' esperienza in modo da eliminare l' effetto dell' altra componente disturbatrice.

Osserviamo la luce emessa dalla sorgente non in direzione delle linee di forza ma in direzione perpendicolare. La primitiva riga spettrale viene ordinariamente trasformata, per il fenomeno di Zeemann, in un *triplet* le cui componenti esterne sono polarizzate nel senso delle linee di forza, l' interna perpendicolarmente alle linee di forza stesse. Con un nicol avente la sezione principale

(1) Rend. Lincei, serie 5ª, vol. VII, aprile 1898.
(2) Rend. Lincei, vol. VII, fasc. 11°, giugno 1898.

parallela alle linee di forza potremo arrestare la componente interna; rimarranno le due esterne che corrispondono, secondo il Cornu, a una componente della luce primitiva alterata dal campo e trasformata in due vibrazioni parallele interferibili e di diverso periodo. Esse produrranno il fenomeno dei battimenti, e quindi, osservando con un nicol la luce emessa dalla sorgente nel campo, se l'alterazione del periodo è convenientemente piccola, si dovrebbero avere delle intermittenze di luce e di oscurità.

Come si vede così è eliminato l'effetto dell'altra componente che rendeva impossibile il fenomeno dei battimenti con luce parallela alle linee di forza del campo. Ma si potranno osservare le previste intermittenze di luce e di oscurità?

Nei primi tentativi, eseguiti qualche tempo fa, di realizzar l'esperienza mi sorse un dubbio che esposi in nota nel lavoro citato. Tutto ciò infatti vale, io osservavo, finchè si tien conto di una *sola* particella luminosa: ma se si considera che la sorgente è costituita di un numero infinito di particelle che vibrano indipendentemente l'una dall'altra, i massimi e i minimi dovuti alle diverse particelle non saranno coincidenti e daranno quindi, attraverso a un nicol, luce di intensità media costante.

Questa stessa osservazione si può ripetere per l'esperienza progettata dal Righi, e concluderne che la condizione trovata per aver frange in moto, che cioè le due componenti della luce primitiva non siano eguali, è bensì necessaria ma è lungi dall'esser sufficiente, poichè si incorre in una difficoltà ben più grave e insormontabile, inerente alla costituzione stessa delle sorgenti luminose.

È facile rintracciare la necessità di ricorrere a una sola particella vibrante anche nel ragionamento analitico del prof. Righi.

È chiaro infatti come, ogni volta che si producono fenomeni di interferenza, ci si metta sempre in tali condizioni che i diversi sistemi di frange dovute ai varî punti della sorgente siano coincidenti. È perciò che nell'esperienza di Young, in quelle degli specchi e del biprisma di Fresnel ecc., si ricorre a una fenditura strettissima convenientemente orientata; è perciò che le frangie spariscono appena la fenditura sia troppo larga.

Ora, finchè la posizione dei massimi e dei minimi luminosi dipende dalla differenza di cammino che i raggi interferenti acquistano fuori dalla sorgente, è possibile dare a questa una forma tale che quei massimi e minimi coincidano. Ma quando la posizione dei massimi e minimi dipende dalla fase propria della particella, essendo le vibrazioni delle diverse particelle completamente indipendenti, non si possono avere massimi e minimi che ricorrendo a una particella sola. L'esperienza dei battimenti riesce nelle disposizioni sperimentali ottiche del Righi e nelle altre sopra esposte, solo perchè l'alterazione del periodo avviene fuori della sorgente, allo stesso istante per tutte le particelle. Credo adunque si possa concludere che la produzione dei battimenti luminosi, ricorrendo al fenomeno di Zeemann, è impossibile.

Fisica. — *Ricerche sull' inclinazione magnetica durante il periodo di fabbricazione dei vasi fittili greci* [1]. Nota del dott. G. Folgheraiter, presentata dal Socio Blaserna.

Fra le ricche collezioni di vasi greci, che esistono nei Musei archeologici d'Italia, meritano di essere collocate in prima linea: quella di Firenze per i vasi attici e corinzii, quella di Napoli per i vasi attici e quella di Siracusa per i vasi corinzii. Per concessione avuta dai Direttori di questi tre Musei ho potuto compiere lo studio della distribuzione del magnetismo su una lunga serie di questi vasi, ed ora nella presente Nota esporrò i risultati, ai quali sono giunto riguardo all' inclinazione magnetica durante il periodo di fabbricazione dei vasi attici.

Generalmente i vasi attici vengono per la tecnica e per la cronologia divisi in due gruppi: in vasi a figure rosse su fondo nero ed in vasi a figure nere su fondo rosso. I primi hanno avuto secondo gli archeologi un secolo di vita, e precisamente la loro fabbricazione avrebbe avuto principio al cominciare del V secolo a. Cr., e sarebbe cessata alla fine di esso. I secondi sono per lo più giudicati più antichi, e si attribuiscono al secolo VI a. Cr.; ma secondo la classificazione esistente nel Museo archeologico di Firenze essi possono risalire fino alla metà del VII secolo a. Cr., e scendono fino alla fine del V secolo abbracciando così un periodo di circa 250 anni.

Fra le svariate specie di vasi, che la ceramica greca ha prodotto, ho scelto per le mie ricerche quasi esclusivamente le anfore ad anse basse (o per essere più esatto, quelle anfore le cui anse incominciano alla base del collo, e vanno a terminare al ventre), per la ragione, che si può avvicinare all' intensimetro egualmente bene sia la periferia della loro base, sia quella della bocca. I vasi di questa forma furono esaminati quasi tutti, e lasciai da parte solo quelli troppo grandi per la difficoltà nel maneggiarli, e perchè non era provveduto di adatto sostegno per collocarli avanti all' intensimetro. Anche gli oinochoai a forma ovoidale, a bocca rotonda e ad ansa bassa furono da me esaminati, perchè non presentavano alcun impedimento al loro completo studio. Volli ancora prendere in esame i bellissimi oinochoai a bocca trilobata e ad ansa molto elevata, esistenti nel Museo di Firenze all' unico scopo però di potere stabilire, se all'epoca in cui essi furono fabbricati, l' inclinazione magnetica era in Grecia boreale od australe.

1. Vasi a figure rosse su fondo nero. Nel Museo nazionale di Napoli esistono bellissime anfore attiche a figure rosse su fondo nero molto eleganti, poco panciute e con piede elevato [2]. Io ne esaminai 36, che ave-

[1] Vedi pag. 121 di questo volume.

[2] Nell'ottobre 1897 tutti questi vasi si trovavano raccolti nelle vetrine 52, 53 e 54.

vano press' a poco eguale grandezza, come si vede dal seguente specchietto, che dà i limiti, entro i quali variano le loro dimensioni.

Diametro della base	massimo mm.	98	minimo mm.	78
" " bocca	" "	153	" "	140
Altezza	" "	375	" "	310

Fa eccezione solo il vaso n.° 1351, che ha la base del diametro di mm. 140.

Nella seguente tabella riassumo i risultati avuti: nella 1ª colonna sono riportati i numeri d' inventario delle anfore esaminate, nelle successive colonne sono notati i valori di $K + K'$ e di $K - K'$, delle intensità magnetiche cioè nei quattro punti della sezione normale di ciascun' anfora. Nell'ultima colonna è data l' inclinazione magnetica calcolata in base a questi valori, come è stato esposto in una Nota antecedente [1]. Resta sempre sottinteso, che le conclusioni non hanno valore che alla condizione, che le anfore siano state collocate nella fornace col loro asse geometrico verticale.

Tabella I.

	Base		Bocca		Inclinazione magnetica
	K + K′	K — K′	K + K′	K — K′	
n° 1357	+ 0°46′,9	— 0°41′,4	— 0°16′,0	+ 0°21′,3	0° 3′
1354	+ 2 22, 0	— 2 8, 8	— 1 25, 8	+ 1 43, 1	0 30
1353	+ 1 25, 3	— 1 0, 1	— 1 3, 6	+ 1 21, 0	1 9
1364	+ 1 21, 6	— 1 3, 5	— 1 56, 3	+ 2 4, 5	1 10
1298	+ 1 0, 9	— 0 57, 5	— 0 36, 2	+ 0 45, 9	1 26
1363	+ 1 52, 1	— 1 42, 2	— 1 39, 2	+ 1 35, 5	1 32
1296	+ 1 54, 4	— 1 51, 3	— 1 30, 6	+ 1 52, 7	2 4
1291	+ 1 2, 9	— 1 0, 7	— 0 10, 4	+ 0 25, 4	3 43
1301	— 3 30, 9	+ 3 6, 7	+ 1 26, 2	— 0 50, 8	5 6
1289	+ 0 45, 1	— 0 18, 6	— 2 24, 7	+ 2 2, 8	6 47
1293	+ 1 13, 0	— 0 38, 2	— 1 22, 2	+ 1 17, 3	6 48
1329	— 1 30, 6	+ 1 14, 6	+ 1 42, 0	— 1 7, 5	7 13
1295	— 2 30, 5	+ 1 53, 4	+ 1 14, 9	— 0 49, 9	7 34
1287	+ 1 44, 3	— 0 50, 4	— 1 48, 0	+ 1 29, 2	9 28
1351	— 1 40, 8	+ 1 16, 3	+ 2 29, 2	— 1 28, 8	10 12
1365	— 1 2, 3	+ 0 47, 9	+ 1 28, 2	— 0 44, 9	10 56
1284	+ 1 43, 4	— 0 34, 4	— 1 43, 2	+ 1 21, 7	12 39
1355	— 2 0, 9	+ 1 6, 1	+ 2 12, 5	— 1 17, 0	12 45
1359	+ 1 25, 5	— 0 25, 5	— 1 57, 9	+ 1 25, 5	13 15
1325	— 1 29, 2	+ 0 58, 8	+ 1 26, 6	— 0 38, 4	13 35
1302	— 3 3, 1	+ 1 31, 7	+ 0 56, 6	— 0 32, 6	14 29
1326	+ 1 57, 3	— 0 43, 2	— 3 25, 4	+ 1 51, 3	16 2
1297	— 0 19, 7	+ 0 11, 6	+ 1 12, 1	— 0 30, 0	16 47
1286	— 0 28, 0	+ 0 20, 7	1 3, 6	— 0 28, 9	16 52
1366	— 3 15, 9	+ 1 21, 4	+ 2 12, 2	— 1 5, 5	16 58
1283	— 1 15, 2	+ 0 42, 7	+ 1 57, 9	— 0 42, 5	17 22
1349	+ 1 58, 3	— 0 35, 4	— 0 53, 3	+ 0 36, 4	18 11
1290	+ 2 45, 5	— 0 45, 5	— 1 33, 2	+ 0 59, 6	18 54
1350	+ 0 38, 5	— 0 7, 6	— 0 35, 0	+ 0 20, 8	19 28
1358	— 1 26, 0	+ 0 19, 1	+ 1 33, 7	— 0 11, 6	29 59
1330	+ 2 16, 5	+ 0 39, 8	— 1 26, 2	— 0 13, 3	53 30

[1] Vedi questo volume pag. 71.

Se si esaminano i valori dell' inclinazione magnetica, si scorge, che l'ultimo corrispondente alla distribuzione del magnetismo libero nell' anfora 1330 si stacca in modo deciso dagli altri: il che mostra, che il vaso o non fu cotto coll' asse geometrico verticale, o non appartiene al periodo di fabbricazione dei vasi greci. Anche l'anfora 1358 dà per l'inclinazione magnetica un valore molto grande, ed ammesso che sia stata cotta in posizione verticale, essa dovrebbe appartenere ad un' epoca più tarda (1).

Ma anche escludendo questi due vasi, i limiti entro i quali l'inclinazione magnetica varia, sono assai estesi, 19°,5. La discordanza tra i singoli valori può dipendere da diverse cause: o i vasi sono stati collocati nella fornace inclinati; o hanno avuto luogo delle induzioni accidentali, che hanno mascherato l'azione del magnetismo terrestre; o effettivamente ha avuto luogo una variazione grande nell'inclinazione magnetica durante il periodo di fabbricazione di questa specie di vasi. Io sono lontano dal credere, che le divergenze dipendano dalla posizione troppo inclinata data ai vasi durante la cottura, perchè come i vasai greci si sono mostrati perfetti artefici nel formare e modellare i vasi, così non si può fare a meno di ammettere, che essi abbiano usato la massima cura nel collocare i prodotti della loro arte in una posizione assai stabile entro la fornace, affinchè non avvenissero degli spostamenti capaci di produrre rotture o deformazioni. Tutto al più si può concedere, che per causa della posizione non perfettamente verticale le divergenze nel valore dell' inclinazione siano comprese entro i limiti trovati per i vasi d'Arezzo e di Pompei. D'altra parte la distribuzione del magnetismo assai regolare nelle anfore greche ci obbliga ad escludere l'ipotesi, che induzioni magnetiche, prodotte da cause accidentali, abbiano mascherata o modificata quella del campo magnetico terrestre.

Per spiegare la poca concordanza tra i valori ottenuti restano allora queste due ipotesi: o la variazione secolare dell' inclinazione magnetica durante il V secolo a. Cr. è stata realmente assai notevole, o il periodo entro il quale gli archeologi limitano la fabbricazione dei vasi attici a figure rosse su fondo nero, deve venire un po' allargato. Per ora però lasciamo impregiudicata la questione, che verrà ripresa dopo avere esaminato i risultati avuti dai vasi a figure nere su fondo rosso.

Per calcolare il valore medio dell' inclinazione magnetica durante il periodo di fabbricazione dei vasi a figure rosse, bisognerebbe sapere, se i singoli valori ottenuti sono tutti positivi o no, ossia in altri termini se l' equatore magnetico è passato o no al nord della Grecia. Uno sguardo alla polarità

(1) Nella tabella compariscono soltanto 31 anfore, perchè le altre 5 hanno mostrato una distribuzione alquanto irregolare del magnetismo: i nn. 1285, 1327, 1328 e 1356 posseggono due massimi e due minimi alla periferia della bocca, il n. 1352 ha il massimo della bocca spostato di 60° dal piano della sezione normale. Per questo motivo essi non furono presi in considerazione.

magnetica della base dei vasi esaminati ci mostra, che su di essa prevale ora il magnetismo nord ora il sud; ma devo far notare, che le anfore possono essere state collocate nella fornace indifferentemente sia colla loro base in basso, sia colla loro bocca, perchè non vi è alcuna ragione tecnica, per la quale si possa escludere piuttosto l'una che l'altra posizione: anzi è probabile, che per utilizzare lo spazio i vasai abbiano collocato accanto ad un vaso diritto uno capovolto, come si usa anche al presente. Però dalle ricerche, che verrò in seguito esponendo, fatte su oinochoai ad ansa elevata (e che per conseguenza sono stati cotti diritti) attribuiti al V secolo a Cr. risulta chiaramente, che la polarità prevalente alla loro base è positiva. Sicchè se le anfore a figure rosse appartengono allo stesso periodo, anche l'inclinazione magnetica dedotta dalla distribuzione del loro magnetismo si deve considerare come positiva, ed in tal caso il suo valore medio risulta eguale a 9° 45'. Se poi si volesse ammettere, che al principio del periodo, al quale tali vasi vengono attribuiti, l'inclinazione magnetica fosse stata australe, il valore medio risulterebbe ancora minore.

2. Vasi attici a figure nere su fondo rosso. Di questa specie di vasi se ne trova una bellissima collezione nel Museo archeologico di Firenze, ed un piccolo numero nei Musei di Siracusa e di Napoli.

Nella seguente tabella riporto i risultati avuti dall'esame delle anfore e degli oinochoai a bocca circolare e ad ansa bassa trovati nel Museo di Firenze [1]. Nella 2ª colonna è segnata l'epoca probabile della loro fabbricazione, come risulta dalle targhette apposte alle varie vetrine, in cui essi si trovano raccolti. Gli oggetti esaminati furono 35, ma tre di essi furono lasciati a parte perchè hanno mostrato una distribuzione irregolare del magnetismo [2].

[1] Tutti questi vasi sono riuniti nelle vetrine IV — X.

[2] Essi sono: l'anfora n. 1807 bellissima, intera ed assai grande; ma i punti di massima e minima intensità magnetica non si trovano sopra due diametri, ma sopra due corde; di più tre di questi punti hanno polarità nord ed uno solo polarità sud. L'anfora n. 1852 perfettamente conservata ed assai grande ha alla bocca una distribuzione irregolarissima del magnetismo con 3 massimi e 3 minimi. Il terzo è un'anfora senza numero attribuita al periodo 550-450, intera e molto grande, che ha tre dei punti della sezione normale con polarità nord ed uno solo con polarità sud.

TABELLA II.

	Epoca a. Cr.	Base K + K′	Base K — K′	Bocca K + K′	Bocca K — K′	Inclinazione magnetica
Anfora senza n.	650-600	+ 2° 23′,6	— 1° 55′,6	— 1° 56′,3	+ 2° 8′,9	1° 32′
» n. 1841	»	— 0 45,2	+ 0 40,9	+ 1 52,6	— 1 37,2	3 17
» » 1800	»	— 3 56,6	+ 3 52,4	+ 4 0,4	— 2 38,6	4 43
» » 1845	»	— 1 30,1	+ 0 44,3	+ 1 0,9	— 0 16,7	19 42
» » 1817	»	+ 0 10,2	— 0 9,6	— 0 3,0	+ 0 31,4	22 20
» » 1804	550	— 0 42,7	+ 0 35,0	+ 0 37,3	— 0 17,2	8 52
» senza n.	»	— 1 21,8	+ 1 15,7	+ 1 30,9	— 0 44,7	9 33
» n. 1815	»	+ 1 6,1	— 0 34,2	— 0 35,2	+ 0 24,4	11 13
» » 1662	550-450	+ 1 53,7	— 1 18,9	— 1 11,0	+ 1 38,9	1 0
» senza n.	»	+ 0 59,6	— 0 43,5	— 0 40,0	+ 0 47,3	2 14
Oinochoe n. 2120	»	+ 2 22,5	— 1 35,0	— 2 37,7	+ 2 36,1	3 40
» » 2113	»	+ 2 9,4	— 1 15,2	— 2 13,5	+ 2 8,7	5 13
Anfora » 2072	»	— 1 47,0	+ 1 26,3	+ 1 19,3	— 0 43,8	8 51
» » 1641	»	+ 1 41,9	— 0 50,3	— 1 24,4	+ 1 18,7	9 6
Oinochoe » 1894	»	+ 0 38,6	— 0 32,2	— 0 28,3	+ 0 30,1	14 23
Anfora » 1812	»	— 2 4,8	+ 1 15,9	+ 1 25,4	— 0 31,9	16 5
Oinochoe » 2118	»	— 2 18,8	+ 0 3,5	+ 1 16,2	— 1 25,3	16 45
Anfora senza n.	»	— 1 14,1	+ 0 43,0	+ 1 17,5	— 0 7,6	22 57
» n. 1869	»	— 1 47,1	+ 0 40,3	+ 2 33,5	— 0 21,9	28 55
» » 1712	»	+ 4 29,7	+ 1 20,2	— 3 15,3	— 1 26,8	61 39
» » 1802	550-400	+ 0 52,5	— 0 37,2	— 0 38,4	+ 0 44,3	2 15
» » 1815	»	+ 1 15,5	+ 0 1,4	— 1 6,9	— 0 15,9	49 35

I vasi di questa tabella sono per grandezza assai diversi tra loro. Vi è una serie di anfore assai grandi (quelle che corrispondono ai nn. 1641, 1662, 1812, 1815, 1841, 1869), la cui altezza varia tra 410 e 440 mm. con un diametro alla base tra 150 e 160 mm., e col diametro della bocca ancora maggiore: i quattro oinochoai sono i vasi più piccoli: hanno un' altezza di circa 227 mm. col diametro alla base di circa mm. 84 e col diametro alla bocca di mm. 90. Gli altri vasi hanno dimensioni intermedie, ma in generale la loro base è molto ampia.

I vasi greci a figure nere su fondo rosso trovati nel Museo di Napoli sono 6. Anch' essi sono anfore, ma meno grandi di quelle del Museo di Firenze. La loro altezza varia tra un minimo di 240 mm. ed un massimo di 320 mm.; il diametro della base è compreso tra 85 e 112 mm. e quello della bocca tra 115 e 163 mm. I risultati avuti sono riuniti nella seguente tabella, ove le varie colonne hanno lo stesso significato che nelle tabelle antecedenti.

TABELLA III.

	Base K + K′	Base K — K′	Bocca K + K′	Bocca K — K′	Inclinazione magnetica
n° 919	+ 1° 0′,2	— 0° 41′,5	— 0° 30′,9	+ 0° 46′,4	0° 52′
892	+ 0 41,3	— 0 38,2	— 0 11,8	+ 0 25,8	4 15
896	+ 0 49,8	— 0 46,3	— 0 20,7	+ 0 43,3	5 54
889	+ 0 23,7	— 0 14,6	— 0 8,1	+ 0 26,2	6 1
910	+ 1 55,3	— 0 45,8	— 1 0,3	+ 0 38,9	15 5
895	+ 0 51,1	+ 0 20,0	— 0 22,3	— 0 2,7	54 30

Nel Museo nazionale di Siracusa vi sono pure alcuni vasi a figure nere su fondo rosso: alcuni di essi provengono dalle tombe greche di Megara Hyblaea [1], città che sorgeva sopra il terrazzo, che viene ora attraversato dalla linea ferroviaria Catania-Siracusa a circa 800 m. a sud della stazione di Lumidoro. Sono anfore molto grandi con base e bocca ampie [2]. Altre anfore provengono dalla Necropoli del Fusco presso Siracusa: una di queste (n. 6027) è completamente nera [3] e viene attribuita al VI secolo a. Cr.; altre due della stessa epoca (nn. 12589 e 12590) che hanno un'altezza di appena 20 cm. sono rosse a cordonature nere [4]. Evvi pure un' anfora abbastanza grande di provenienza incerta.

La seguente tabella riassume i risultati avuti.

TABELLA IV.

Provenienza	n°	Base		Bocca		Inclinazione magnetica
		K + K′	K — K′	K + K′	K — K′	
Megara Hyblaea	7617	+ 1°10′,4	— 0°38′,1	— 0°22′,9	+ 0°36′,2	5°11′
»	11619	+ 0 39,4	— 0 37,4	— 0 34,3	+ 1 12,1	9 57
»	10088	+ 0 17,2	— 0 7,2	— 0 15,7	+ 0 9,6	16 8
Siracusa	12590	+ 2 31,3	— 2 10,1	— 1 3,6	+ 1 29,1	0 24
»	6027	— 4 4,4	+ 3 4,9	+ 3 0,2	— 1 58,8	7 50
»	12589	+ 1 0,9	— 0 13,1	— 1 5,1	+ 1 11,9	7 55
incerta	8763	— 1 14,2	— 0 17,4	+ 1 43,5	+ 0 34,0	56 26

[1] Per potere meglio giudicare dell'età di questi vasi, riporto qui alcune notizie sulle vicende di guerra di questa città. Megara Hyblaea fondata dai Dori probabilmente verso l'anno 728 a. Cr. fu distrutta totalmente da Gelone I, tiranno di Siracusa verso l'anno 482 a. Cr. Nell'inverno dell'anno 415 al 414 i Siracusani per difendersi contro gli Ateniesi dopo avere fortificato i lati deboli della loro città, muuirono di difesa anche certe località esterne, e fra queste compare anche Megara. Quest' ultima località fu dagli Ateniesi attaccata invano. Ancora nell'anno 309 a. Cr. Megara era una piccola fortezza, perchè Diodoro Siculo parla di un combattimento avvenuto tra i Cartaginesi ed i Siracusani nelle acque di Megara. I Siracusani avuta la peggio si salvarono a nuoto, e parte della loro flotta fu salvata dal presidio uscito dalla fortezza.

Megara assieme ad altre città della Sicilia tentò tra gli anni 214-210 di ribellarsi contro i Romani, ma fu fieramente punita, e di essa Livio ricorda, che nel 214 *Marcellus.... Megara vi capta diruit at diripuit ad reliquorum ac maxime Syracusanorum terrorem.* Da allora Megara diventò un povero e piccolo centro di campagna.

Vedi P. Orsi, *Megara Hyblaea* parte 1ª, *Monumenti antichi* pubblicati per cura della R. Acc. dei Lincei, vol. I, pag. 689, 1890.

[2] Due di queste anfore non compariscono nella tabella 4ª, perchè hanno una distribuzione irregolare del magnetismo. Quella proveniente dalla tomba 778 (n. 11889) è mancante nel ventre, e se si esamina la sezione, si trova che l'argilla non è compatta ed omogenea, ma stratificata tanto da sembrare uno schisto. L'anfora n. 12063 della tomba 971 presenta alla bocca due massimi e due minimi, e di più in tre punti della sezione normale ha polarità nord ed in uno solo polarità sud.

[3] Cavallari, *Sugli scavi eseguiti nella Necropoli del Fusco presso Siracusa.* Atti della R. Acc. dei Lincei. Mem. Classe scienze morali ecc., serie 4ª, vol. I, 1884-85, pag. 198.

[4] Orsi, *Scavi eseguiti nella Necropoli del Fusco, nel dicembre 1892 e gennaio 1893.* Atti della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. I, 1893, *Notizie degli scavi,* pag. 464.

In complesso si hanno dunque 35 vasi attici a figure nere su fondo rosso, tutti della stessa forma: ma tra essi se ne trovano quattro con distribuzione del magnetismo tale, per cui bisognerebbe ammettere un' inclinazione del campo magnetico terrestre marcatamente diversa da quella, che ha agito sugli altri 31 vasi: e di quelli, credo, non si può tenere alcun conto ([1]).

Merita speciale attenzione la tabella 2ª, nella quale i vasi sono divisi secondo l' epoca, a cui vengono dagli archeologi assegnati. Si vede, che al periodo più antico sono attribuite tre anfore, per la magnetizzazione delle quali l' inclinazione magnetica doveva essere in media circa 3°, ma poi vengono assegnate allo stesso periodo altre due anfore, per le quali l' inclinazione magnetica avrebbe dovuto essere circa 21°. Se si tiene presente, che esse hanno una grandezza abbastanza considerevole, che sono provvedute di ampia base, che la loro fattura è assai accurata, e che infine la distribuzione del loro magnetismo è assai regolare, quell' aggruppamento non è spiegabile, perchè non si può ammettere, nè che la variazione dell' inclinazione magnetica in un periodo di tempo tanto breve sia stata così grande, nè che discordanze così accentuate siano dovute alla posizione, in cui furono collocate le anfore durante la cottura.

Ma un altro ostacolo si oppone qui alla interpretazione dei risultati avuti. Se si avesse la certezza, che l' inclinazione magnetica in Grecia è sempre stata boreale, e si tiene presente, che il suo valore nel I secolo a. Cr. era press' a poco eguale all' attuale, i vasi coll' asse magnetico più inclinato si dovrebbero ritenere in generale come posteriori a quelli, in cui l'asse magnetico è meno inclinato; ma, come verrà in seguito esposto, nel VII secolo a. Cr. l' inclinazione magnetica era con tutta probabilità australe, e quindi i vasi coll' asse magnetico più inclinato potrebbero anche essere più antichi. Naturalmente sia nell' uno che nell' altro caso quelle cinque anfore non dovrebbero restare classificate nello stesso periodo di tempo.

Al periodo 550-450 anni a. Cr. sono ascritti dei vasi, parte dei quali andrebbero bene d' accordo per la distribuzione del loro magnetismo coi vasi attribuiti al cuore del VI secolo, ma un' altra parte dovrebbe appartenere ad un' epoca anteriore; anche il vaso 1802 dell' ultimo periodo troverebbe il suo posto tra anfore più antiche.

I vasi delle tabelle 3ª e 4ª sono giudicati del VI secolo, a. Cr., ed in generale indicano, che l' inclinazione magnetica era assai piccola.

([1]) Sarebbe il caso di dubitare, che i quattro vasi siano dovuti all'opera di qualche abile artefice moderno o del I secolo a. Cr., riuscito a rivaleggiare nella ceramica cogli antichi vasai, perchè la distribuzione del magnetismo corrisponde a quella dei vasi aretini ed a quella che verrebbe prodotta, se i vasi venissero fabbricati al presente. Io faccio notare la coincidenza senza entrare in merito della cosa, perchè affatto profano in Archeologia.

Le conclusioni, che per ora, secondo me, si possono tirare dallo studio esposto sono:

1. Dalla distribuzione del magnetismo libero in molti dei vasi a figure nere su fondo rosso, che in parte si fanno risalire al VII secolo, ed in parte si attribuiscono al VI e perfino al V secolo a. Cr., risulta che vi fu un' epoca in cui l'inclinazione magnetica in Grecia era assai prossima a zero. Quest'epoca non può essere ancora ben precisata, ma forse non si è lontani dal vero, se si colloca tra il VII ed il VI secolo. Anche dalla distribuzione del magnetismo libero in molti dei vasi a figure rosse si arriva alla conclusione, che l'inclinazione era scesa quasi a zero.

2. Alla fine del periodo di fabbricazione dei vasi greci, ossia verso il 400 a. Cr. l'inclinazione magnetica aveva già raggiunto il valore di circa 20°: se si eccettuano i pochi vasi, che hanno mostrato una distribuzione del magnetismo eguale a quella, che avrebbero se fossero fabbricati ai nostri giorni, due sole anfore darebbero un valore un po' maggiore.

Fisica. — *Sulla dissociazione dell' ipoazotide* [1]. Nota del dott. A. Pochettino, presentata dal Socio Blaserna.

Come osserva il Duhem nel suo *Traité de Mécanique chimique*, le ricerche sperimentali sulla determinazione delle costanti fisiche delle combinazioni gassose dissociabili sono fin qui, anche riguardo all' ipoazotide che pure è il corpo più facile e più interessante a studiarsi, poco numerose.

Quello che si è fatto in questo campo, riguarda solo la densità di tali combinazioni; anzi, rispetto a questa costante, le ricerche teoriche e sperimentali hanno, almeno per l' ipoazotide, quasi esaurito l'argomento. La ricerca più importante è quella teorica del Gibbs [2]; questi, basandosi sul criterio fondamentale di riguardare una combinazione gassosa dissociabile come una mescolanza in proporzioni variabili di due gas poco discosti dallo stato perfetto e polimeri uno dell' altro, ha assegnata una formola che dà la legge delle variazioni della densità del gas ipoazotico al variare della temperatura e della pressione, formola splendidamente confermata dalle numerose ed accurate esperienze di Mitscherlich, Troost, Deville, Wanklyn, Playfair e finalmente di E. ed L. Natanson [3].

Ma oltre la densità presenta un interesse grandissimo la questione del rapporto k dei calori specifici, poichè la conoscenza dell'andamento di questo rapporto permetterà di vagliare le ipotesi fatte sulla causa dei cambiamenti di densità dell' ipoazotide colla temperatura. Giacchè, sebbene la teoria di

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico di Roma.
[2] Americ. Journ. XVIII, pag. 277, 1879.
[3] Wied. Ann. XXVII, pag. 606, 1886.

Gibbs sia in modo mirabile conforme ai dati sperimentali, non tutti sono d'accordo con lui sull'origine di queste variazioni di densità: alcuni per esempio per spiegare il lavoro eccezionale che vien rivelato da questa variazione anormale delle densità ricorrono ai lavori interni, che nell' ipoazotide sarebbero grandissimi; questi lavori si eserciterebbero sia tra le varie molecole, sia nell' interno di ognuna di esse, senza però mutarne il numero [1].

Io mi sono quindi proposto di determinare l'andamento dei valori di k al crescere della temperatura e quindi della dissociazione.

Già i signori E. ed L. Natanson nelle loro ricerche sulle variazioni della densità dell' ipoazotide a temperatura costante e a pressione variabile, ebbero occasione di constatare che al crescere della dissociazione il rapporto k cresce, fatto la cui spiegazione segue immediatamente dal criterio fondamentale del Gibbs, giacchè all'NO_2, per la teoria cinetica dei gas, deve naturalmente corrispondere un valore di k maggiore che non all' N_2O_4 la cui molecola è di una costituzione più complicata. Per raggiungere un grado di dissociazione maggiore (i Natanson si fermarono al 50 $^0/_0$ di dissociazione) ho pensato di operare non già a temperatura costante, ma a pressione costante, il che, nel caso mio, importava anche una minore complicazione degli apparecchi.

La misura di k venne eseguita col noto metodo della determinazione della velocità del suono. Il primo elemento quindi necessario alle mie misure era la densità del gas. Per questo mi son servito delle tabelle di Natanson e di Troost e Deville, per le temperature intermedie mi valsi della formola data dal Gibbs per la densità di una combinazione gassosa dissociabile, ossia:

$$\log_{10} \frac{(D_2 - D)^2}{2(D - D_1)} p = A + \frac{B}{a} \log_{10}(t + 273) - \frac{C}{t + 273},$$

dove $A\ B\ a\ C$ sono costanti dipendenti dal gas che si considera, $D\ D_1\ D_2$ sono rispettivamente le densità del miscuglio e dei due componenti (nel caso nostro NO_2 ed N_2O_4), p la pressione in atmosfere e t la temperatura in gradi centigradi. Pel caso speciale dell' ipoazotide il Gibbs assegna la formola:

$$\log_{10} \frac{(3{,}178 - D)^2}{2(D - 1{,}589)} p = 9{,}47056 - \frac{3118{,}6}{t + 273}$$

ossia [2]:

$$D = 3{,}178 + \theta - \sqrt{\theta(3{,}178 + \theta)},$$

dove:

$$\theta = 9{,}47056 - \frac{3118{,}6}{t + 273} \log p.$$

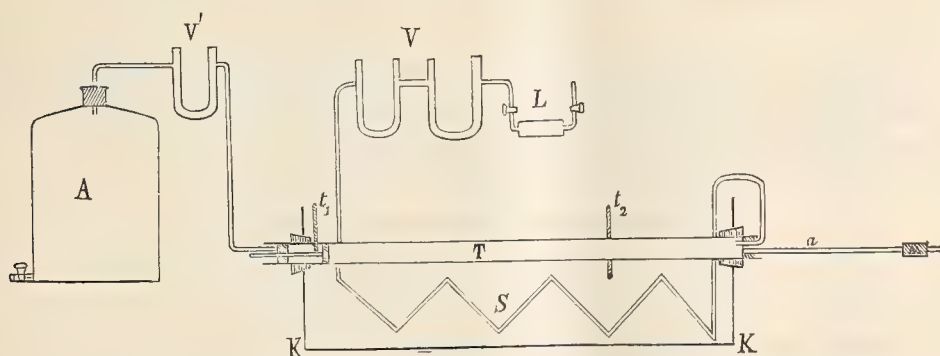
Avrei potuto mediante la disposizione ideata dai signori Natanson determinare io stesso questa densità, ma, date le cure che ho poste onde avere ipoazotide

[1] Ann. Chim. et Phys. 1882, vol. 30, pag. 383.

[2] Gibbs, *Thermodynamische Studien*, 1892, pag. 209.

la più pura possibile, la completa fiducia che le ripetute verifiche sperimentali inducono ad avere nella formola di Gibbs, almeno nei limiti di temperatura in cui ho operato io e più di tutto la poca entità relativa che un errore (quali sono le divergenze fra i dati sperimentali e teorici) nel valore della densità porta sul valore di k, mi hanno indotto a non complicare l'apparecchio e a limitarmi alla sola misura del rapporto k ammettendo nota la densità.

L' ipoazotide veniva preparata in gran quantità per mezzo del nitrato di piombo previamente disseccato con cura, e dopo aver lasciato sfuggire i primi prodotti, veniva raccolta liquida nei soliti tubi per liquefare i gas, tenuti entro una miscela frigorifera, per eliminare l'ossigeno proveniente anch' esso dalla dissociazione del nitrato di piombo. Il gas ipoazotico veniva quindi distillato con cura almeno due volte, per eliminare ogni possibile traccia di altro composto più stabile che si sarebbe potuto formare per l'azione dell'umidità dell'aria sull' ipoazotide. Ottenevo così un liquido color ambra chiaro, limpidissimo che durante il corso delle esperienze conservavo in appositi tubi muniti di due rubinetti.

La velocità di propagazione del suono nel gas veniva fatta con un apparecchio analogo a quello usato dal Kundt e dal Wüllner ecc. La disposizione sperimentale è data senz' altro dal seguente schema:

Dal tubo L contenente l' ipoazotide liquida, il gas svolgentesi veniva, mediante l'aspiratore A, dapprima tratto in due tubi V ad U ripieni di anidride fosforica e poscia in un serpentino S immerso in un bagno d'olio contenuto entro una cassetta metallica K previamente portato alla temperatura t alla quale si voleva sperimentare, temperatura che si leggeva mediante il termometro t_2; dal serpentino quindi il gas penetrava nel tubo di Kundt T parimenti immerso nel bagno, donde poi mediante apposita conduttura finiva nell'aspiratore A; l'umidità che da questo sarebbe potuta penetrare nel tubo T veniva allontanata mediante un altro tubo ad anidride fosforica V'. Finalmente la temperatura vera del gas nel tubo T al momento dell' esperienza determinavasi mediante un altro termometro t_1

introdotto in esso in modo che il bulbo fosse completamente immerso nel gas, solo quando i due termometri t_1 e t_2 segnavano a un dipresso la medesima temperatura. Tutte le giunture vennero ricoperte di mastice al minio, in modo da assicurare una tenuta quasi perfetta, di più nella conduttura vennero accuratamente evitati, per quanto era possibile, dei tratti di caoutschouc affinchè non avvenissero ostruzioni nei tubi causa l'azione dell'ipoazotide sulla gomma. La generazione delle onde stazionarie nel tubo T avveniva nel modo noto mediante le vibrazioni longitudinali di un' asta a di vetro tenuta fissa in un punto della sua lunghezza con una morsa di legno M. La polvere adoperata per livellarle era di silice insolubile ottenuta facendo bollire del silicato di potassio con acido cloridrico e tirando a secco due o tre volte. Il risultato pestato accuratamente e setacciato in modo da avere una polvere quasi impalpabile, veniva prima di essere introdotto nel tubo T fortemente disseccato in una stufetta.

La formola che dalla lunghezza d'onda del suono prodotto dall' asta nell' ipoazotide e nell'aria, dà il valore di k è la seguente:

$$K = 1{,}4053 \frac{l^2}{l_1^2} \cdot \frac{\delta}{\delta_1} \cdot \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t},$$

dove l, δ, t ed $l_1 \delta_1 t_1$ sono rispettivamente la semilunghezza d'onda, la densità e la temperatura nel gas e nell'aria, e 1,4053 è il valore di k per l'aria.

Per la misura delle lunghezze d'onda usavo una disposizione a mo' di comparatore, e ogni serie di onde veniva misurata tre o quattro volte nei due sensi secondo la formola assegnata da Kundt:

$$l = \frac{n L_1 + (n-2) L_2 + (n-4) L_3 + \cdots}{n^2 + (n-2)^2 + (n-4)^2 + \cdots}$$

dove:

l indica la lunghezza d'onda cercata;

L_1 la distanza che separa la prima e l'ultima onda, corrispondente a n onde;

L_2 quella che separa la seconda dalla penultima, corrispondente ad $n - 2$ onde e così via.

Le differenze fra la media così calcolata e le singole onde raggiungono quasi mezzo millimetro, e ciò dipende, come è noto, dal fatto che i limiti delle onde non sono uniformemente ben definiti, ma misurando varie onde col metodo dato da Kundt, quando si abbia cura di cercare di ottenere solo dei mucchietti di polvere ai nodi, si riesce ad ottenere una grandissima precisione. Usando varie precauzioni, che qui sarebbe lungo ed inutile ripetere, sono riuscito ad ottenere invece delle solite figure di Kundt dei semplici piccolissimi mucchietti di polvere con qualche archetto al più intorno, in

tal modo la posizione esatta del nodo si poteva avere con grande facilità e sicurezza.

Non mi rimane ora altro che riferire i risultati ottenuti che io dispongo nella seguente tabella, dove a $t\ l\ l_1\ t_1\ k$ attribuisco i significati già detti e con Δ indico la densità del gas a t^0 rispetto all'aria.

Ho aggiunto anche una colonna che dà il valore della percentuale 9 % della dissociazione alle varie temperature, ottenuto dalla densità Δ mediante la formola:

$$q = \frac{3,178 - \Delta}{\Delta},$$

dove, come si sa, 3,178 è la densità dell' N_2O_4 rispetto all'aria, calcolata dalla sua formola molecolare, e una colonna che mi dà il valore di k quale lo si deduce con la regola dei miscugli, supponendo il gas come un miscuglio di N_2O_4 e NO_2 nelle proporzioni date dalla colonna che riporta i valori di q.

t^0	Δ	l	l_1	t_1	9 %	K osserv.	K calcol.	Differenze
4,2	2,964	38,555	73.181	6,8	7,22	1,167	1,169	+ 0,002
8,0	2.925	38,746	73,300	13.0	8,65	1,169	1,172	+ 0,003
11,3	2,891	39,593	73,333	13,1	9,92	1,172	1,173	+ 0,001
16,2	2,818	40,308	73,125	9,4	12,77	1,175	1,177	+ 0,002
21,0	2,764	41,331	73,133	6,5	14,98	1,179	1,180	+ 0,001
26,7	2,650	42,656	73,000	7,0	19,92	1,198	1,187	— 0,011
35,2	2,526	44,492	73,000	7,3	25,81	1,201	1,195	— 0,006
39,8	2,453	45,576	73,490	12,0	29,55	1,208	1,200	— 0,008
44,0	2,363	46,368	73,430	13,4	34,49	1,219	1,209	— 0,010
49,6	2,256	48,912	73,230	8,0	40,87	1,232	1,217	— 0,015
60,0	2,065	52,167	73,000	7,2	53,90	1,247	1,235	— 0,012
66,0	1,991	53,956	73,270	7,4	59,62	1,255	1,243	— 0,012
70,0	1,920	55,439	73,300	7,0	65,47	1,260	1,251	— 0,009
75,7	1,851	57,240	73,470	6,6	71,69	1,266	1,260	— 0,006
80,6	1,801	58,372	73,270	7,0	76,46	1,272	1,266	— 0.006
85,0	1,755	59,222	73,000	8,2	81,08	1,275	1,273	— 0,002
90,0	1,728	60,393	73,124	7,5	83,91	1,280	1,277	— 0,003
95,0	1,699	61,428	73,181	7,0	87,05	1,280	1,281	+ 0,001
100,1	1,676	62,289	73,300	8,0	89,62	1,281	1,285	+ 0,004
105,0	1,658	63,058	73,500	10,0	91,67	1,284	1,288	+ 0,004
111,3	1,641	64,023	73,600	10,0	93,66	1,288	1,291	+ 0,003
114,0	1,635	64,065	73,000	10,0	94,37	1.289	1,292	+ 0,003
121,5	1,622	65,161	73,620	12,0	95,93	1,290	1,294	+ 0,004
125,0	1,612	65,328	73,000	10,0	97,15	1,290	1,297	+ 0,007
130,0	1,610	66 341	73,600	12,1	97,39	1,300	1,297	+ 0,003
135,0	1,607	66,154	72,920	12,0	97,76	1,298	1,297	+ 0,001
140,0	1,604	67.005	73,600	11,6	98,13	1,300	—	—
145,0	1,602	67,457	73,300	12,0	98,37	1,300	—	—
150,0	1,600	67,889	73,400	12,0	98,62	1,296	—	—

Dall' ispezione di questa tabella risulta che il valore di K cresce al crescere della temperatura t e quindi della dissociazione q, variando fra i due valori 1,17 e 1,30 corrispondenti rispettivamente a gas di costituzione esatomica (N_2O_4) e triatomica (NO_2). Gli andamenti dei valori osservati e dei valori calcolati secondo la regola dei miscugli, sebbene nella regione

di massima variazione della dissociazione presentino un po' di divergenza, sono del resto in abbastanza notevole accordo. Quelle divergenze potranno attribuirsi o ad una leggiera deviazione dalle leggi di cui abbiamo precedentemente parlato, o forse ad una dissociazione temporanea parziale prodotta nel gas dal propagarsi stesso delle onde sonore. Ad ogni modo potremo concludere che l'andamento del valore di k al crescere della temperatura, e la piccolezza delle divergenze fra i valori di k osservati e calcolati, sono da considerarsi come una riprova che nell' ipoazotide avviene realmente una dissociazione nel modo previsto da Gibbs, ossia una scissione successiva delle molecole della forma N_2O_4 in molecole della forma NO_2, scissione svelata dalle grandi variazioni di densità, e che quindi queste, come giustamente osservano E. ed L. Natanson, non devono attribuirsi come molti hanno creduto a una eccezionale deviazione di questo gas dalle leggi di Boyle e Gay-Lussac.

Fisica. — *Sulla teoria del contatto.* Nota I di QUIRINO MAJORANA, presentata dal Socio BLASERNA.

L'esperienza fondamentale di Volta, quella cioè che dimostra che due metalli eterogenei, posti in contatto metallico, si caricano a potenziali differenti, viene insegnata ordinariamente col dire: Si abbia un condensatore formato da due dischi piani isolati, l'uno di zinco e l'altro di rame; pongansi i due dischi in comunicazione metallica, e si renda la capacità del condensatore massima, avvicinando i due dischi; si interrompa la comunicazione metallica; allontanando lo zinco dal rame si trova quello carico positivamente, questo negativamente. La spiegazione, che si dà del fenomeno, si fonda sull'ammettere che, al punto di contatto dei due metalli, esiste una *forza elettromotrice di contatto*, la quale ha per effetto di tenere i due dischi sempre agli stessi potenziali elettrici, indipendentemente dalla loro capacità; capacità che nell'esperienza predetta si fa prima crescere, coll'avvicinare, poi decrescere, coll'allontanare i due metalli.

Tutti i metalli possono disporsi secondo un ordine ben determinato, in guisa che un termine della serie sia sempre positivo rispetto ad un termine seguente.

Helmholtz, nella sua *Erhaltung der Kraft* (1), fa una considerazione che io ripeto con altre parole: Si suppongano pezzi metallici di qualsiasi forma, natura e numero in comunicazione col suolo, e in determinate posizioni. Essi sono allora elettricamente, nel cosidetto *stato neutro*. Per il principio della conservazione dell'energia, quando si pongano in comunicazione diretta due qualunque di essi pezzi metallici, dopo aver soppresso le relative comunica-

(1) H. Helmholtz, *Ueber die Erhaltung der Kraft*, Ostwald's Klassiker der exak. Wiss., p. 34.

zioni col suolo, non si può generare alcun movimento di elettricità, a meno di cambiare la posizione di quei pezzi, alterando così le due capacità elettriche. Infatti, se così non fosse, basterebbe porre alternativamente in comunicazione metallica due di quei pezzi metallici fra di loro e col suolo, ed avere ogni volta un moto di elettricità, il che non è possibile perchè lo stabilire comunicazioni metalliche non costituisce *lavoro*.

Sviluppando l'idea di Helmholtz si arriva quindi alla conseguenza che anche i metalli, posti in comunicazione col suolo, sono ricoperti da uno strato elettrico di potenziale differente da metallo a metallo. Infatti anche ponendo una comunicazione metallica tra due qualunque di essi non si altera la distribuzione elettrica del sistema, e, secondo l'enunciato di Volta, due metalli riuniti metallicamente sono a potenziali differenti.

Sperimentalmente si ha dunque:

a) Un elettrometro (che è anch'esso costituito da pezzi metallici) non accusa alcuna carica elettrica se, dopo essere stato posto al suolo, vien legato con uno degli elementi di una coppia secca rame-zinco. Ciò se non si producono in questa operazione, dei cambiamenti nei valori delle capacità di ciascun conduttore.

b) Se si vuole studiare l'elettricità liberata dalla forza elettromotrice di contatto, occorre produrre delle variazioni di capacità nel sistema dei due metalli eterogenei.

Le precedenti considerazioni fanno vedere che per solito, didatticamente, non si espone chiaro e semplice il concetto fondamentale del fenomeno scoperto da Volta. Si pone il fatto della riunione metallica dei due metalli come essenziale, e il principiante crede spesso che, qualora questa non sia stata fatta, i due metalli, dopo essere stati posti al suolo, posseggono lo stesso potenziale.

Benchè sia certo che metalli posti in comunicazione, siano a differenti potenziali elettrici, pure l'idea che questa differenza sia dovuta ad una reale forza elettromotrice al contatto, non è ammessa con accordo generale dai fisici moderni. Anzi ancor stando coi più, coloro cioè che ammettono quella forza, devesi riconoscere che essa è qualcosa di diverso dalla forza elettromotrice che esiste in una coppia voltaica. Da questa può, quando che si voglia, raccogliersi elettricità libera, e ciò senza compiere lavoro esteriore, ma lasciando che avvenga l'azione chimica; una coppia metallica non può fornire elettricità che quando si alteri la capacità del sistema; e a far ciò occorre del lavoro per vincere le attrazioni elettriche dei varî strati che ricoprono i metalli.

Per legge naturale non esiste alcun corpo che, posto in comunicazione con uno degli elementi di una coppia secca rame-zinco, possa toglierli la più piccola quantità di elettricità; ciò è dovuto al fatto che la nuova forza

elettromotrice di contatto che si aggiunge è tale da soddisfare a questa condizione. E questo fatto, espresso in altre parole, dà la legge fissata da Volta, dei *contatti successivi.*

Che i fenomeni elettrici che si osservano toccando due pezzi metallici e variandone la mutua capacità, non si possano con assoluta certezza attribuire completamente alla ammessa forza elettromotrice di contatto, è stato riconosciuto dai più abili sperimentatori. Pellat (1), ad esempio, che ci ha fornito le misure più precise, servendosi del solito artificio di variar la capacità dei due conduttori eterogenei, al fine di generare delle cariche mobili, misura quale sarebbe la f. e. m. al contatto, che, ammesso che esista, darebbe luogo alla formazione di quelle cariche. Ma quando si tratta di affermare se veramente il contatto è sede di quella forza, è preoccupato dalla esistenza del mezzo atmosferico in cui le esperienze son fatte, e così si esprime:

« Due metalli differenti riuniti metallicamente (2), sono ricoperti nello « stato di equilibrio, da strati elettrici a potenziali ineguali.... È *estre-* « *mamente probabile* che la differenza di potenziale osservata tra gli strati « elettrici che ricoprono due metalli riuniti metallicamente, rappresenti anche « la differenza di potenziale che esiste tra quei metalli ». È estremamente probabile, e cioè non è assolutamente certo. L'osservazione dunque di cariche elettriche alle superficie dei metalli, potrebbe avere altra spiegazione all'infuori di quella della forza elettromotrice di contatto.

Non intendo rifar qui la storia dei sostenitori della teoria chimica; ma mi pare interessante rilevare che anche oggi vi è qualcuno che ammette qualcosa di simile. Voglio parlare del Lodge (3). Secondo questo fisico il fenomeno sarebbe molto complicato, e terrebbe alle seguenti proposizioni:

Una sostanza immersa in un mezzo qualunque *tende* ad esercitare sopra di esso un'azione chimica (meno che essa ne sia effettivamente attaccata). Questa *tendenza* porta la sostanza ad un potenziale differente dal mezzo in cui essa è immersa. Questo potenziale è positivo se l'elemento attivo (4) del mezzo è elettropositivo, negativo nel caso contrario. In aggiunta a questa forza di contatto tra la sostanza e il mezzo, dovuta all'azione chimica potenziale, ve ne è un'altra che è indipendente dalle proprietà chimiche, che risiede al contatto di due metalli, e che, sovrapposta alla prima, costituisce complessivamente ciò che si chiama *effetto Volta.*

(1) H. Pellat, *Différences de potentiel des couches électriques qui recouvrent deux métaux en contact.* Ann. de Chimie et de Physique, V, 24, p. 1-136, 1881.

(2) Basterebbe dire che sono stati scaricati al suolo.

(3) O. Lodge, *On the Seat of the Electrom. Forces in the Voltaic Cell.* Report of the British Association, Montreal, august-september 1884, p. 464-529. Vedi anche Phil. Magazine, 1885 e seg.

(4) Nel caso ordinario questo elemento attivo sarebbe l'ossigeno.

È facile rilevare da quale idea sia stato dominato Lodge nel dare questa spiegazione. Maxwell pel primo ha affermato che la sola via diretta per misurare la f. e. m. di contatto è l' effetto Peltier. Se A e B sono i due metalli, tra di essi esiste la f. e. m. A/B. Una corrente elettrica di intensità I che passa da A in B, e in una seconda esperienza da B in A sviluppa, in tempi eguali, quantità diverse di calore Q_1 e Q_2. E si ha

$$Q_1 - Q_2 = 2KI\,(A/B)$$

dove K è l' inverso dell' eq. meccanico del calore. Con questa relazione si possono ricavare i valori di A/B per i diversi metalli. Ma essi sono completamente in disaccordo con quelli che si misurano elettrostaticamente, sia per la loro grandezza che per l'ordine [1]. Se dunque le f. e. m. al contatto di due metalli fosse simile a quella che si ha in una pila, si dovrebbe ottenere l'effetto Peltier nel caso del contalto secco, in una misura ben diversa. E Pellat conclude dal suo importante lavoro, che non esiste alcun rapporto tra la differenza di potenziale al contatto di due metalli e la f. e. m. misurata dall' effetto Peltier. Non volendo uscir troppo dall' oggetto di questa pubblicazione, non insisto su ciò, e non rifaccio quindi i ragionamenti che Clausius ed altri autorevoli, hanno fatto per conciliare quell' enorme divergenza sperimentale. Del resto con tali ragionamenti si resta solo nel campo delle ipotesi, e non vi è alcun fatto sperimentale che li confermi [2].

Ritornando a Lodge, questi ha voluto ammettere che realmente esista la f. e. m. termoelettrica al contatto di due metalli, come la si calcola dal fenomeno Peltier, e sostiene che la differenza con i valori elettrostatici è dovuta alla *tendenza* a *combinazione chimica* dei metalli, con l' ossigeno circostante. Ma l' ipotesi di Lodge viene combattuta da lord Kelvin [3]. In opposizione ad essa, questi domanda: Quale è l' efficacia dell' ossigeno nel caso in cui le lastre del condensatore sono completamente verniciate? Quale

(1) Pellat, lavoro citato.

(2) Non voglio lasciare l' argomento senza riportare le seguenti autorevoli parole di lord Kelvin (Phil. Mag., luglio 1898, p. 102).

« Molti scrittori recenti (forse seguendo Maxwell, forse indipendentemente)..... hanno « assunto che l'effetto Peltier è l'equivalente termico della f. e. m. alla giunzione di due « metalli. In conseguenza è nata molta confusione sul riguardo della elettricità di con- « tatto e della sua relazione colle correnti termoelettriche, che ha offuscato le idee di « professori e studenti. In fatto si sa che la f. e. m. termoelettrica è enormemente più pic- « cola dell' elettrostatica. Il vero è che la f. e. m. di Volta si trova o si misura in metalli « alla stessa temperatura, ed è rappresentata in volt senza riguardo alla temperatura. Se « essa varia con la temperatura le sue *variazioni* sono indicate *in frazione di volt per* « *grado*. D' altro canto la f. e. m. termoelettrica dipende essenzialmente dalla differenza « di temperatura, e viene essenzialmente riferita al *grado termometrico* come p. e. in fra- « zione di volt per grado ».

(3) Kelvin, lavoro citato.

l'efficacia negli esperimenti di Erskine-Murray (¹) nei quali i dischi di zinco e di rame vengono graffiati e puliti dentro la paraffina fusa, in guisa da toglier loro qualsiasi traccia di atmosfera aderente? E nel caso degli esperimenti di Bottomley ed altri, nei quali le lastre di zinco e di rame sono tenute nel vuoto più alto che si possa raggiungere?

L'ipotesi di Lodge non è dunque accettata generalmente, ma in ogni modo essa fa vedere che, sull'interpretazione del fenomeno Volta, non esiste ancora grande accordo.

Per le ricerche che esporrò in seguito mi occorre ricordare i lavori di Exner (²). Le idee di questo fisico che è un fautore di una teoria chimica dei fenomeni di elettricità di contatto, non hanno trovato sostenitori come al tempo di De La Rive, forse anche perchè egli, con troppa vivacità, confutava le ricerche di Volta, asserendo l'esistenza di fatti che, contrariano la giustezza della teoria del contatto. Realmente molte delle affermazioni di Exner, sono fondate sopra esperienze che appoggiano la teoria del contatto, la qualcosa non era riconosciuta dall'autore. La teoria di Exner si basa esclusivamente sull'ammettere che i metalli si ricoprono, se immersi nell'aria, di strati sotsottilissimi di ossidi. Questi strati sarebbero, per il fatto stesso della loro formazione, elettrizzati, e manterrebbero le loro cariche permanentemente perchè isolanti. Tutti i fenomeni che si osservano e che sono spiegati dalla teoria del contatto sarebbero semplici effetti di induzione elettrostatica dovuta ai detti strati.

Numerose sono state le critiche che si sono fatte a tale asserto; ma ciò non pertanto si debbono ad Exner delle esperienze che, rettamente interpretate, oltre ad appoggiare la teoria del contatto fanno vedere che il suolo si debba ritenere come un corpo della serie di Volta (³).

In conseguenza della generale ostilità con cui sono state accolte le idee di Exner, talune interessanti esperienze da lui esposte, non sono state prese in grande considerazione. Una di esse diversamente condotta si ritroverà nelle pagine seguenti.

Lo scopo di questa Nota e di altre che presenterò in seguito, è di esporre talune esperienze che illustrano la teoria del contatto, e che si basano prin-

(¹) Erskine Murray, *On Volta Electricity of Metals.* Phil. Mag., v. 45, p. 398, 1898.

(²) Tutti i lavori di F. Exner sono nei Sitzb. der Wien. Akad. der Wissensch., e sono riportati sopra il Carl's repert. e sui Wied. Ann. tra gli anni 1877 e 1887.

(³) Per la critica delle esperienze di Exner vedi: Beetz, W. A, v. 12, pag. 290; Hoorweg, W. A. v. 11, pag. 133 e v. 12, pag. 90; Julius, W. A. v. 13, pag. 276; Schulze-Berge W. A. v. 15, pag. 440, e v. 12, pag. 307; Von Zahn, *Untersuch. üb. Contact. elek.*, Lipsia, Teubner, 1882; Ayrton e Perry, Phil. Mag. 1881, pag. 43; Lodge, lavoro citato; Stoletow, Journ. de Physique, II, v. 1, pag. 57; Uljanin, W. A. v. 30, pag. 699; Hallwachs W. A. v. 32, pag. 64; Wiedemann, *Elektricität,* vol. II, ult. ediz., pag. 990 e seg.

cipalmente sulla estensione del principio di Volta, estensione che ho esposto precedentemente.

Consideriamo due dischi, uno di rame e l'altro di zinco. Poniamoli in comunicazione col suolo e successivamente isoliamoli. Essi assumono per quel che si è visto, una determinata differenza di potenziale. Questa differenza secondo recenti determinazioni può variare con lo stato superficiale dei due metalli tra 0,7 e 1,02 volt; ed il rame è negativo rispetto allo zinco.

I due dischi sieno ad una distanza tale, che tra di essi non possa esercitarsi alcuna sensibile induzione. Si avvicinino allora di molto, tenendoli paralleli e coassiali. A causa della mutua induzione che viene così ad agire, la densità elettrica delle loro superficie affacciate viene ad essere accresciuta, e sulle facce esterne si formano due strati di elettricità libera, positiva sul rame, negativa sullo zinco. Ora se stabiliamo di nuovo le comunicazioni dei due dischi col suolo, questi strati esterni di elettricità si disperderanno attraverso i conduttori adoperati.

Se riportiamo i due dischi nelle primitive posizioni, la densità elettrica superficiale delle facce interne, tornerà a diminuire, e una quantità di elettricità (da ciascun disco) al disopra di quella che tollererebbe qualsiasi forza elettromotrice di contatto, sfuggirà attraverso i conduttori nel suolo. Questa quantità di elettricità è esattamente eguale, ma di segno contrario, a quella che si è liberata nell'atto dell'avvicinamento. Se dopo aver avvicinato i due dischi, anzichè scaricarli al suolo, si pongono in comunicazione metallica, si ottiene ancora lo stesso risultato, perchè la f. e. m. di contatto impedisce la neutralizzazione delle cariche positive dello zinco e delle negative del rame, ma non ostacola che le cariche libere formatesi all' atto del l'avvicinamento si annullino. E solo ciò avviene anche quando si pongono i dischi al suolo, perchè anche così ai punti di contatto esistono forze elettromotrici.

Tutto ciò costituisce semplici conseguenze della teoria del contatto e si può enunciare colle seguenti leggi:

a) Conduttori eterogenei (non eletrolitici) posti in comunicazione col suolo, assumono potenziali differenti e dipendenti dalla natura di ciascun conduttore.

b) Tutte le volte che due conduttori eterogenei, dopo essere stati scaricati al suolo vengono avvicinati, senza essere portati al contatto, acquistano cariche libere di elettricità, che possono essere tolte mediante un conduttore qualsiasi (non elettrolitico) posto in comunicazione col suolo, o isolato, ma in questo caso di capacità grandissima rispetto a quella dei conduttori su cui si esperimenta.

Queste *cariche di avvicinamento* sono di segno contrario a quelle che si ottengono nella ordinaria esperienza di Volta; talchè zinco che si avvicina

a rame si carica *negativamente*, rame che si avvicina a zinco si carica *positivamente* (1).

c) Tutte le volte che due conduttori eterogenei (abbastanza vicini fra di loro) si allontanano, dopo di essere stati scaricati al suolo, acquistano delle cariche per le quali vale anche ciò che è stato detto in *b*).

Le *cariche di allontanamento* sono quelle che si ottengono nella ordinaria esperienza di Volta, e sono esattamente eguali e di segno contrario a quelle di avvicinamento precedentemente studiate, qualora gli spostamenti dei dischi, nelle due esperienze, sieno gli stessi ma fatti in senso inverso.

La verifica delle asserzioni suesposte, si può a rigore ricavare da talune esperienze di Exner; benchè questo fisico concludesse dai fenomeni da lui osservati, per la inesattezza della teoria del contatto, e da essi togliesse criterî in appoggio alla sua teoria degli *strati superficiali di ossidi elettrizzati.*

Io ho voluto procedere mediante le seguenti esperienze alla detta verifica. In esse adopero un elettrometro di Hankel modificato (2). La foglia d'oro è sostituita da un sottilissimo filo di quarzo argentato. Con ciò si hanno varî vantaggi: *a*) L'istrumento ha una capacità elettrica assolutamente trascurabile; *b*) col microscopio si punta molto meglio il filo di quarzo che la foglia d'oro; *c*) si può avere una maggiore stabilità del punto zero, e nello stesso tempo una maggiore sensibilità.

Due dischi paralleli ed isolati, uno di ottone dorato e l'altro di zinco, scrupolosamente spianati e puliti al tornio, di circa 15 cm. di diametro sono posti alla distanza di pochi centimetri. Mediante un movimento a vite possono avvicinarsi l'uno all'altro sino a $^1/_2$ millimetro circa, senza che avvenga alcun contatto. Pongasi il disco di ottone dorato in comunicazione col suolo e il disco di zinco in comunicazione col suolo e col filo di quarzo argentato dell'elettrometro, che è caricato da 50 elementi Daniell. Togliendo la comunicazione dello zinco col suolo, non si osserva alcuna deviazione se non esistono cause perturbatrici. E allora, avvicinando lentamente, per mezzo delle vite, lo zinco al disco dorato, si osserva una piccola deviazione che va crescendo, durante il movimento dei due dischi, specie quando essi si sono di molto avvicinati. Quando essi sono ad $^1/_2$ mm. di distanza,

(1) Avverto che ho adottato questo linguaggio per brevità, ma a rigore non è esatto. Infatti: una lastra di zinco che si avvicina ad una di rame, se è unita con un elettrometro dà indicazione di carica negativa; e quindi per brevità si può dire che lo zinco si viene a caricare negativamente, ma realmente non si è formata solo la carica negativa; un eguale strato positivo resta vincolato al disco fintanto che rimane nella sua posizione. Col dire dunque: zinco carico negativamente, intendo: zinco unito con un elettrometro, dà indicazione negativa.

(2) M. E. Mallby, *Meth. zur Bestimm. grosser elektrolytischer Widerstände.* Zeitsch. für Physik. Chemie, v. 18, pag. 133.

il filo di quarzo si è spostato nella scala del microscopio per — 2,5 divisioni (la sensibilità dell' istrumento è di circa 3,5 divisioni per volt). Rimanendo i due dischi in questa posizione, il filo di quarzo rimane anch' esso permanentemente deviato dallo zero. Ma se scostiamo di nuovo i due dischi esso vi ritorna esattamente. Basta all' uopo che la loro distanza sia divenuta solo 2 o 3 centimetri. Se, dopo aver avvicinato i due dischi, tocchiamo per un istante lo zinco con un filo comunicante col suolo o con una grossa capacità isolata, l'elettrometro ritorna a zero, e allontanando i due dischi si ottiene una larga deviazione positiva del filo di quarzo, talvolta sino a 22 parti della scala. Le due cariche che così si sono ottenute, negativa nel primo caso, positiva nel secondo, sono eguali, perchè se non si ha cura di riportare a zero il filo di quarzo, annullando la piccola deviazione di — 2,5 divisioni, non si ottiene alcuna deviazione positiva. La spiegazione del fatto che la carica di avvicinamento viene accusata da una piccola deviazione, e quella di allontanamento da una molto più grande, benchè esse sieno eguali, deve ricercarsi nella considerazione dei differenti valori che ha la capacità del sistema nei due casi. La carica di avvicinamento si ottiene al crescere delle capacità, giacchè il disco di zinco si avvicina al disco di rame che è ad un potenziale differente. La carica di allontanamento si ottiene nel moto inverso, quando cioè la capacità diminuisce. Le due cariche dunque, benchè eguali, sono indicate dall' elettrometro da deviazioni molto differenti, perchè essendo distribuite sopra capacità di diverso valore, sono a potenziali differenti.

È chiaro che le deviazioni osservate cambiano solo di segno ma non di valore assoluto se invece di porre al suolo il disco dorato, si pone al suolo lo zinco e si lega il primo con l'elettrometro, ripetendo le stesse operazioni.

Chi ripete l'esperimento di Volta non osserva per solito la carica di avvicinamento o perchè essa produce solo una piccola deviazione dell' ago dell' elettrometro, o perchè la comunicazione di uno dei metalli con l' elettrometro viene stabilita solo dopo averlo portato in contatto con l'altro metallo. L'esperienza di Exner di scaricare alternativamente i dischi di zinco e di rame dopo averli avvicinati, si riporta a quella che hò indicato, e la dimostrazione che essa sia contraria alla teoria del contatto, non ha valore come hanno fatto notare Julius, Pellat, Ayrton e Perry, ecc.

Noterò infine che nel fare l'esperienza descritta, mi sono assicurato della inesistenza di cause perturbatrici che potessero mascherare il fenomeno. Così se nelle condizioni in cui mi son posto, si ripete l'esperienza con dischi di egual natura, non si ottiene alcuna sensibile deviazione, perchè allora, benchè ciascuno di essi sia carico a determinato potenziale, essendo i due potenziali eguali la variazione di capacità del sistema è piccola (al massimo da 1 a 2).

Ripetendo l' esperienza con dischi di egual natura, ma portando uno di essi ad un potenziale più elevato dell' altro che resta unito con l'elettrometro, (mediante uno shunt fatto sul circuito di una pila), si ottengono le stesse deviazioni dell'ago dell'elettrometro, se la differenza di potenziale dei due dischi è di 0,8 — 0,9 volt. Questo valore rappresenta dunque la forza elettromotrice di contatto della coppia zinco-oro adoperata.

Fisica. — *Verifica del principio dell' equivalenza termodinamica per un conduttore bimetallico.* Nota di Paolo Straneo, presentata dal Socio Blaserna.

In due Note precedenti [1] ho dedotte le espressioni delle temperature stazionaria e variabile di un conduttore lineare composto di due metalli, le cui estremità sono mantenute costantemente alla temperatura assunta come zero. Ora farò uso dell' espressione della temperatura stazionaria per dedurre un metodo di verifica del principio dell' equivalenza. Mi pare che questa ricerca possa presentare qualche interesse, non solo perchè è desiderabile che un principio esperimentale, quale è quello dell' equivalenza, venga verificato per tutte le forme di trasformazione di energia in calore, ma anche perchè dimostra che i fenomeni termoelettrici procedono con tale regolarità da poter venire studiati esperimentalmente sulla base dei risultati analitici.

Ricordiamo che nel caso speciale in cui le variazioni delle temperature che intervengono nel conduttore si limitino a pochi gradi, noi potremo assumere come costanti i coefficienti di conducibilità interna ed esterna e di resistenza elettrica relativi ai due metalli, che come precedentemente indicheremo con k_1, h_1, ω_1 e k_2, h_2, ω_2; e che inoltre noi potremo trascurare l' effetto Thomson. Poniamo nell' asse del conduttore composto dei due fili di lunghezza l_1 ed l_2 l' asse delle ascisse x_1 e x_2, ed assumiamo come origine delle x_1 l' estremità del primo filo e come origine delle x_2 il punto di contatto dei due fili. Allora le temperature stazionarie U_1 ed U_2 saranno date dalle formule:

$$U_1 = C_1 + A_1 e^{\lambda_1 x_1} + B_1 e^{-\lambda_1 x_1}, \quad U_2 = C_2 + A_2 e^{\lambda_2 x_2} + B_2 e^{-\lambda_2 x_2};$$

ove si pose:

$$C_1 = i^2 \frac{\omega_1}{J q h_1 p}, \quad C_2 = i^2 \frac{\omega_2}{J q h_2 p}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{h_1 p}{k_1 q}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{h_2 p}{k_2 q}},$$

indicando con i l' intensità della corrente che attraversa il conduttore, con p e q il perimetro e la sezione uguale per i due fili, con P il coefficiente del-

[1] Vedi questi Rendiconti, vol. VII, 1° sem., pag. 346; 2° sem, pag. 206.

l'effetto Peltier fra i due metalli alla temperatura media in cui si esperimenta e finalmente con J l'equivalente meccanico della caloria. Le costanti A_1, B_1, A_2, B_2 saranno poi le radici del seguente sistema di equazioni di primo grado:

$$C_1 + A_1 + B_1 = 0$$

$$C_2 + A_2 e^{\lambda_2 l_2} + B_2 e^{-\lambda_2 l_2} = 0$$

$$C_1 + A_1 e^{\lambda_1 l_1} + B_1 e^{-\lambda_1 l_1} = C_2 + A_2 + B_2$$

$$\lambda_1 k_1 (A_1 e^{\lambda_1 l_1} - B_1 e^{-\lambda_1 l_1}) - \lambda_2 k_2 (A_2 + B_2) = P \frac{i}{q} .$$

La quantità di calore Q' che il conduttore considerato perde nell'unità di tempo per conducibilità interna dalle estremità mantenute alla temperatura zero è evidentemente:

$$Q' = q \left\{ k_1 \left(\frac{dU_1}{dx_1}\right)_0 + k_2 \left(\frac{dU_2}{dx_2}\right)_{l_2} \right\} .$$

La quantità di calore Q'' che esso perde per conducibilità esterna dalla superficie circondata dall'aria è:

$$Q'' = p \left\{ h_1 \int_0^{l_1} U_1 \, dx_1 + h_2 \int_0^{l_2} U_2 \, dx_2 \right\} .$$

Sostituendo per U_1 ed U_2 i loro valori, eseguendo le derivazioni e le integrazioni e sommando le quantità Q' e Q'' si avrà la quantità totale di calore Q che il conduttore perde nell'unità di tempo.

$$Q = Q' + Q'' = q \left\{ \lambda_1 k_1 (A_1 - B_1) + \lambda_2 k_2 (A_2 e^{\lambda_2 l_2} - B_2 e^{-\lambda_2 l_2}) \right\}$$
$$+ p \left\{ h_1 \left[C_1 l_1 + \frac{A_1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 l_1} - 1) - \frac{B_1}{\lambda_1} (e^{-\lambda_1 l_1} - 1) \right] \right.$$
$$\left. + h_2 \left[C_2 l_2 + \frac{A_2}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 l_2} - 1) - \frac{B_2}{\lambda_2} (e^{-\lambda_2 l_2} - 1) \right] \right\} .$$

Trovandosi il conduttore in uno stato termico stazionario per il principio dell'equivalenza, l'energia calorifica da esso emessa dovrà essere eguale all'energia elettrica da esso dissipata. La prima è misurata dal prodotto JQ, la seconda dal prodotto dell'intensità della corrente nella differenza di potenziale alle estremità del conduttore; indicando questo prodotto con $i\Delta p$ si avrà:

$$i\Delta p = JQ .$$

Questa è l'equazione che si tratta di verificare esperimentalmente. Essa contiene i valori di p, q, i, l_1 ed l_2 che sono direttamente misurabili e dei coefficienti k_1, k_2, h_1, h_2, P, ω_1 ed ω_2. Questi ultimi si devono determinare

esperimentalmente con metodi specialmente convenienti al caso particolare che ci occupa.

Determinazione dei coefficienti k_1, k_2, h_1 *ed* h_2. I movimenti di calore prodotti dagli effetti della corrente elettrica differiscono assai da quelli che si studiano nella teoria ordinaria del calore. Infatti, mentre generalmente i flussi calorifici si considerano provocati da variazioni delle temperature alle superficie dei corpi, nel nostro conduttore invece dobbiamo distinguere due differenti svolgimenti di calore, di cui il primo avviene in ogni punto del conduttore, è sempre positivo e non varia quando si inverta la corrente; mentre il secondo avviene nella superficie di contatto dei due fili e cambia il segno colla direzione della corrente. Noi non possiamo quindi *a priori* affermare che per la determinazione dei coefficienti di conducibilità termica possiamo far uso dei metodi e delle formole ordinarî, ma dovremo in ogni singolo caso considerare rigorosamente le speciali condizioni del nostro problema.

Invertendo periodicamente la corrente nel conduttore, la temperatura tenderà a divenire per ogni punto di esso una funzione periodica del tempo. Vediamo ora se la conoscenza di questa funzione per diversi punti del conduttore ci può condurre alla deduzione dei coefficienti voluti. Indichiamo con u_1' ed u_2' le temperature che si avrebbero nelle due parti del conduttore nel caso ideale in cui l'effetto Peltier fosse nullo; con u_1'' ed u_2'' quelle che si avrebbero se la resistenza fosse nulla. Le temperature reali u_1 ed u_2 saranno rispettivamente:

$$u_1 = u_1' + u_1'' \quad , \quad u_2 = u_2' + u_2'' .$$

Siccome invertendo la corrente solo la u_1'' e la u_2'' mutano segno, potremo indicare gli stati stazionarî cui tendono le temperature u_1 ed u_2 per le due differenti direzioni della corrente con:

$$\overset{+}{U}_1 = U_1' + U_1'' , \qquad \overset{+}{U}_2 = U_2' + U_2'' ,$$

$$\overset{-}{U}_1 = U_1' - U_1'' , \qquad \overset{-}{U}_2 = U_2' - U_2'' ;$$

da cui si deduce:

$$U_1' = \frac{\overset{+}{U}_1 + \overset{-}{U}_1}{2} \quad , \quad U_2' = \frac{\overset{+}{U}_2 + \overset{-}{U}_2}{2} .$$

Le funzioni U_1' ed U_2' si possono quindi determinare esperimentalmente dall'osservazione delle $\overset{+}{U}_1$, $\overset{+}{U}_2$, $\overset{-}{U}_1$ ed $\overset{-}{U}_2$.

Per la loro definizione le U_1' ed U_2' devono soddisfare le equazioni differenziali:

$$(1) \qquad \frac{d^2U_1'}{dx_1^2} - \frac{h_1 p}{k_1 q} U_1' + \frac{i^2\omega_1}{q^2 k_1 J} = 0 , \quad \frac{d^2U_2'}{dx_2^2} - \frac{h_2 p}{k_2 q} U_2' + \frac{i^2\omega_2}{q^2 k_2 J} = 0 ;$$

le cui condizioni, assumendo provvisoriamente l'origine tanto delle x_1 quanto delle x_2, nel punto di contatto dei due fili, prenderanno la forma:

$$(1') \quad \begin{gathered} (U_1')_{x_1=l_1} = (U_2')_{x_2=l_2} = 0 \\ (U_1')_{x_1=0} = (U_2')_{x_2=0} = \frac{\overset{+}{U}_c + \overset{-}{U}_c}{2}, \end{gathered}$$

indicando con $\overset{+}{U}_c$ ed $\overset{-}{U}_c$ le temperature reali stazionarie al contatto dei due fili per le differenti direzioni della corrente.

Ora supponiamo che per un lungo spazio di tempo si sia periodicamente invertita la corrente. La temperatura al contatto dei due fili sarà divenuta con grande approssimazione una funzione periodica oscillante intorno alla temperatura che in esso si avrebbe se l'effetto Peltier fosse nullo, cioè intorno alla temperatura $\frac{\overset{+}{U}_c + \overset{-}{U}_c}{2}$. In ogni altro punto si avrà una funzione periodica dello stesso periodo T oscillante intorno al valore che assume in quel punto la funzione U_1', o rispettivamente la U_2'.

Le equazioni delle temperature u_1 ed u_2 sarebbero allora:

$$(2) \quad \begin{gathered} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{k_1}{c_1 \varrho_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{h_1 p}{q \varrho_1 c_1} u_1 + \frac{i^2 \omega_1}{c_1 \varrho_1 q^2 J}; \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{k_2}{c_2 \varrho_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \frac{h_2 p}{q \varrho_2 c_2} u_2 + \frac{i^2 \omega_2}{c_2 \varrho_2 q^2 J}. \end{gathered}$$

Per determinare le costanti di integrazione avremo le condizioni:

$$(2') \quad \begin{gathered} (u_1)_{x_1=l_1} = (u_2)_{x_2=l_2} = 0, \text{ per ogni } t; \\ (u_1)_{x_1=0} = (u_2)_{x_2=0} = \frac{\overset{+}{U}_c + \overset{-}{U}_c}{2} + \varrho_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \varrho_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T} t + \alpha_n\right), \text{ per ogni } t; \end{gathered}$$

ed inoltre la condizione che per ogni x_1, od x_2 le u_1 ed u_2 siano funzioni periodiche del tempo, aventi il periodo T.

Le parti delle u_1 ed u_2, che non variano quando si inverte la corrente, devono avere raggiunto il loro stato stazionario prima che le u_1 ed u_2 siano divenute periodiche. Poniamo quindi:

$$u_1 = U_1' + u_1'', \quad u_2 = U_2' + u_2''.$$

Ciascuna delle equazioni (2) si potrà così scindere in due parti, di cui le prime non saranno altro che le equazioni (1) e le seconde saranno:

$$(3) \quad \frac{\partial u_1''}{\partial t} = \frac{k_1}{c_1 \varrho_1} \frac{\partial^2 u_1''}{\partial x_1^2} - \frac{h_1 p}{q \varrho_1 c_1} u_1''; \quad \frac{\partial u_2''}{\partial t} = \frac{k_2}{c_2 \varrho_2} \frac{\partial^2 u_2''}{\partial x_2^2} - \frac{h_2 p}{q \varrho_2 c_2} u_2''.$$

Stabilendo inoltre che le condizioni in cui devono soddisfare le prime siano le (1′), avremo per le (3) le seguenti condizioni:

$$(u_1'')_{x_1=l_1} = (u_2'')_{x_2=l_2} = 0\,,\ \text{per ogni tempo.}$$

$$(3')\qquad (u_1'')_{x_1=0} = (u_2'')_{x_2=0} = \varrho_0 + \sum_{n=0}^{n=\infty} \varrho_n \,\text{sen}\left(\frac{2n\pi}{\mathrm{T}}\,t + \alpha_n\right),\ \text{per ogni tempo.}$$

Per la completa determinazione degli integrali delle (3) dobbiamo ancora aggiungere che le u_1'' ed u_2'' debbono essere funzioni periodiche, aventi il periodo T per ogni x_1 ed x_2.

Le parti della temperatura variabili col tempo soddisfano quindi equazioni e condizioni che rientrano completamente nei tipi ordinarî, che si incontrano nella teoria del flusso lineare del calore. Noi possiamo quindi proporci di determinare i coefficienti voluti dalla propagazione della variazione periodica della temperatura al contatto dei due fili, prescindendo dalla considerazione della corrente elettrica e dei suoi effetti termici.

Siccome ora le due equazioni e le condizioni relative alle due parti del conduttore non differiscono che per gli indici *uno* e *due*, noi possiamo limitarci a considerarne una di esse, omettendo gli indici. Dovremo quindi integrare l' equazione:

$$(4)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\varrho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{hp}{q\varrho c}\,u$$

colle condizioni:

$$(4')\qquad (u)_{x=l} = 0\,,\ \text{per ogni } t;$$

$$(4'')\qquad (u)_{x=0} = \varrho_0 + \sum_{n=0}^{n=\infty} \varrho_n \,\text{sen}\left(\frac{2n\pi}{\mathrm{T}}\,t + \alpha_n\right),\ \text{per ogni } t;$$

$$(4''')\qquad u = \mathrm{V}_0 + \sum_{n=0}^{n=\infty} v \,\text{sen}\left(\frac{2n\pi}{\mathrm{T}}\,t + \xi_n\right),\ \text{per ogni } x \text{ e } t,$$

in cui le ξ_n possono essere funzione di x.

Col noto metodo di Eulero si giunge al seguente integrale generale che soddisfa pure la condizione (4‴):

$$u = \mathrm{M}_0 e^{-\gamma_0 x} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathrm{M}_n e^{-\gamma_n x} \,\text{sen}\left(\frac{2n\pi}{\mathrm{T}}\,t + \beta_n - \vartheta_n x\right)$$

$$+ \mathrm{N}_0 e^{+\gamma_0 x} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathrm{N}_n e^{+\gamma_n x} \,\text{sen}\left(\frac{2n\pi}{\mathrm{T}}\,t + \gamma_n + \vartheta_n x\right)$$

in cui le M_n, N_n, β_n e γ_n sono costanti arbitrarie che si devono determi-

nare in modo che siano soddisfatte le condizioni (4′) e (4″); le η_n e ϑ_n sono:

$$\eta_n = \sqrt{\left\{\sqrt{\frac{p^2h^2}{4q^2h^2} + \frac{\pi^2 c^2 \varrho^2 n^2}{k^2 \mathrm{T}^2}} + \frac{ph}{2qk}\right.},$$

$$\vartheta_n = \sqrt{\left\{\sqrt{\frac{p^2h^2}{4q^2k^2} + \frac{\pi^2 c^2 \varrho^2 n^2}{k^2 \mathrm{T}^2}} - \frac{ph}{2qk}\right.}.$$

Come Ångstrom [1] per il caso di un filo indefinito, limitiamo le nostre ricerche agli armonici di periodo T, cioè ai termini corrispondenti ad $n = 1$ e per semplicità omettiamo l' indice. Senza diminuire la generalità noi possiamo evidentemente porre $\alpha_1 = 0$; la condizione per $x = 0$ diverrà così:

$$u = \varrho \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{\mathrm{T}}.$$

Le (4′) e (4″) ci daranno allora le seguenti equazioni colle quali potremo determinare M, N, β e γ in funzione di η, ϑ e l:

$$\begin{gathered}
\mathrm{M}e^{-\eta l} \cos(\beta - \vartheta l) + \mathrm{N}e^{\eta l} \cos(\gamma + \vartheta l) = 0, \\
\mathrm{M}e^{-\eta l} \operatorname{sen}(\beta - \vartheta l) + \mathrm{N}e^{\eta l} \operatorname{sen}(\gamma + \vartheta l) = 0, \\
\mathrm{M} \operatorname{sen} \beta + \mathrm{N} \operatorname{sen} \gamma = 0, \\
\mathrm{M} \cos \beta + \mathrm{N} \cos \gamma = 1.
\end{gathered}$$

Osservando quindi l' andamento periodico della temperatura nel punto $x = 0$, e calcolando dalle osservazioni col metodo di Bessel il primo armonico verremo a conoscere la somma:

$$\mathrm{M} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \beta\right) + \mathrm{N} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \gamma\right).$$

Eseguendo sul punto x' la stessa osservazione e lo stesso calcolo conosceremo la somma:

$$\mathrm{M}e^{-\eta x'} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \beta - \vartheta x'\right) + \mathrm{N}e^{\eta x'} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \beta + \vartheta x'\right).$$

Avremo così due equazioni da cui potremo con metodi di successive approssimazioni dedurre le due incognite η e ϑ e quindi le k ed h.

Determinazione dei coefficienti ω_1, ω_2 *e* P *e verifica del valore di* J. L' osservazione della temperatura stazionaria per le due direzioni della corrente nel punto di contatto dei due fili ci conduce ad un' equazione che contiene le incognite P, ω_1, ω_2 ed J [2]. La stessa osservazione in due altri punti qualsiasi, per esempio nei punti x'_1 ed x'_2 ci conduce a due altre equazioni

[1] Ångstrom, Annalen der Physik und Chemie, Band 114.

[2] Vedi questi Rendiconti, vol. VII, 1° sem., pag. 353.

delle stesse incognite, cioè a due valori della U_1' ed U_2. Queste tre equazioni unitamente alla:

$$JQ = i\Delta p,$$

che si tratta di verificare, ci permettono di calcolare le incognite ω_1, ω_2, P ed J.

Mi riservo di comunicare nel prossimo fascicolo come furono realizzate esperimentalmente le condizioni supposte, come vennero eseguite le misure ed a quali risultati numerici si potè giungere.

Fisica. — *Sulla dipendenza tra il fenomeno di Zeemann e le altre modificazioni che la luce subisce dai vapori metallici in un campo magnetico.* Nota del dott. ORSO MARIO CORBINO, presentata dal Socio BLASERNA.

Fisica. — *Sui raggi catodici, sui raggi Röntgen e sulle dimensioni e la densità degli atomi.* Nota II di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio BLASERNA.

Fisica. — *Sul ripiegamento dei raggi Röntgen dietro gli ostacoli.* Nota dei dott. R. MALAGOLI e C. BONACINI, presentata dal Socio BLASERNA.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Sopra un sistema di doppia registrazione negli strumenti sismici.* Nota di G. AGAMENNONE, presentata dal Socio TACCHINI.

Una recente Nota del dott. A. Cancani sopra la registrazione, da lui chiamata *veloce-continua* [1], mi fa decidere a dare fin da ora un cenno di altri sistemi di registrazione sismica da me da poco adottati.

Si sa quanto beneficio la sismologia abbia ritirato dall'adozione della registrazione continua; ed è pur noto come i bisogni sempre più crescenti della sismometria abbian fatto sì che la velocità di scorrimento della carta bianca od affumicata sia andata sempre aumentando, non solo per la massima

[1] Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. VIII, pag. 46, seduta dell'8 gennaio 1899.

esattezza nelle ore, ma eziandio per l'analisi più particolareggiata dei movimenti del suolo. Già fin dal 1894 il Cancani, partigiano allora d'una velocità unica e moderata, propose e più tardi adottò nei nuovi strumenti di Rocca di Papa una velocità oraria di 60^{cm}, lusingandosi che con ciò si sarebbero ottenuti ottimi risultati [1]. Negli ultimi modelli del suo microsismografo, il prof. Vicentini ha creduto perfino di raddoppiare detta cifra. Dal canto mio, ho sempre ritenuto che anche con siffatte enormi velocità non sarebbe mai possibile un'analisi rigorosa e proficua dei movimenti sismici, sovratutto quando trattisi d'onde rapidissime, il cui periodo oscillatorio può alle volte raggiungere una frazione piccolissima di minuto secondo. Anche ammesso, grazie alla niditezza dei tracciati su carta affumicata ed alla massima velocità adottata dal Vicentini (2^{cm} al minuto) che si arrivasse a percepire tutte le oscillazioni più rapide che potessero figurare in un sismogramma, mi pare che saremmo sempre lontani dal poterle bene studiare e per conseguenza nell'impossibilità di risolvere l'importantissimo problema del determinare ad ogni istante la direzione e l'intensità del moto sismico.

È per queste ragioni che ispirandomi all'eccellente idea del Gray, io ho cercato fin dal 1889 di realizzare un meccanismo pratico, semplice e poco costoso, il quale da sè s'incaricasse d'accrescere notevolmente la velocità della carta soltanto al principiare e per tutta la durata d'ogni scossa; mentre quando il suolo resta tranquillo si fa economia della zona di carta, e questa scorre allora con velocità assai minore e precisamente quanto basti per la determinazione precisa del tempo. Un siffatto meccanismo, ch'io ho chiamato *registratore di terremoti a doppia velocità*, è stato già da me descritto in questi stessi Rendiconti [2] ed è stato in seguito applicato a varî strumenti del Collegio Romano, i quali scrivono tutti ad inchiostro, mediante pennine bilicate, su carta bianca. I sismogrammi da me ottenuti fino ad oggi sono già abbastanza numerosi e costituiscono la migliore prova dei servigî che può rendere un tale meccanismo [3].

L'esperienza di ben 5 anni ha provato come non siano troppo da temersi alcune obbiezioni, fatte al mio registratore, circa la probabilità che nei terremoti di lunga durata le pennine vengano a mancare d'inchiostro o si esaurisca la provvista di carta annessa all'apparecchio. Del resto, al 1° scatto del registratore che fa scorrere rapidamente la zona, non manca di porsi in azione una suoneria elettrica, destinata appunto a chiamare l'osservatore,

[1] Ibid., ser. 5ª, vol. III, pag. 551, seduta del 2 giugno 1894.

[2] Ibid., ser. 5ª, vol. I, pag. 247, seduta del 2 ottobre 1892.

[3] Due tra questi sismogrammi si trovano riprodotti in due Note del ch. prof. Tacchini, inserite in questi Rendiconti: Ser. 5ª, vol. III, p. 275 e vol. VI, p. 243. Altri sismogrammi hanno figurato all'Esposizione di Torino del 1898 nella mostra dell'Uff. Centr. di Met. e Geod.

affinchè corra presso lo strumento o per aggiungere inchiostro, o rinnovare il rotolo di carta, o rimontare il peso motore, o provvedere infine a qualunque altro bisogno. Si sa che un apparecchio così costoso e completo non può generalmente trovar posto che in un osservatorio di 1° ordine, dove tanto di giorno che di notte deve sempre trovarsi una persona per la sorveglianza degli strumenti in caso di terremoto. Ma quand' anche sia grave l' inconveniente dell' insufficienza dell' inchiostro in un terremoto di lunga durata, non si può forse sperare che da oggi a l' indomani si possa ideare un sistema di registrazione ad inchiostro meglio rispondente allo scopo, oppure trovare un nuovo metodo d' iscrizione, per es. a base elettro-chimica, od in mancanza di meglio ricorrere alla stessa registrazione su carta affumicata che per effetto del registratore a doppia velocità avanzi d' ordinario lentamente e si metta a correre solo al prodursi d' una scossa?

Dunque mi pare che pur prescindendo dal sistema prescelto per ottenere il tracciato, la convenienza dell' adozione del registratore a doppia velocità sia fuori di causa. Che se io ho cercato d' arrestarmi alla registrazione ad inchiostro, l' ho fatto per molte ragioni, già di per se stesse ovvie e che qui tralascio d' enumerare.

In quanto all' altra obbiezione che, in occasione cioè di lentissimi e deboli moti del suolo, si avrebbero sulla carta, svolgentesi a grande velocità, ondulazioni talmente lunghe ed appiattite che nulla di esatto se ne potesse ricavare, mi pare che, anche ammesso l' inconveniente lamentato, non sia il caso di dover rinunciare per esso a tutti gli altri innumerevoli benefizî inerenti al registratore a doppia velocità (1).

Comunque sia, per attenuare l' inconveniente del possibile esaurimento dell' inchiostro — in occasione di prolungati terremoti e quando nel tempo stesso faccia disgraziatamente difetto il pronto arrivo dell' osservatore — il ch. prof. comm. P. Tacchini ha pensato se non fosse il caso di trarre un ulteriore profitto dal prolungamento degli stili, quale è già adottato negli strumenti sismici forniti dal registratore a doppia velocità, e precisamente per ottenere una seconda registrazione che serva di controllo o di complemento. L' idea era buona ed io ho cercato di realizzarla nel sismometrografo esposto dall' Uff.

(1) Ma tale obbiezione mi sembra altresì di poco valore, poichè se l' ampiezza di tali ondulazioni è così insignificante, allora gli stili, in seguito ai loro microscopici movimenti non sarebbero più in istato di provocare lo scatto della grande velocità, ed in questo caso le ondulazioni lentissime sarebbero distintamente registrate a piccola velocità. Che se invece l' escursione degli stili può raggiungere una frazione non troppo piccola di millimetro e perciò sufficiente a provocare la corsa rapida della carta, allora io non vedo perchè con un pò di buona volontà non si possano riconoscere le ondulazioni in questione e misurarne il periodo, tanto più se le linee relative alle varie componenti si trovano assai vicine tra loro, allo scopo di lasciare la più grande latitudine possibile all' escursione delle penne sulla carta, ciò che permette di percepire meglio i punti culminanti delle sinusoidi per quanto appiattite esse siano.

Centr. di Met. e Geod. all'Esposizione di Torino del 1898 e che ivi funzionò benissimo in occasione di alcune scosse. In questo strumento, all'estremità dei prolungamenti degli stili vi sono anche degli aghi destinati a scrivere sopra una zona di carta affumicata, chiusa in se stessa ed a cavalcioni su d'un cilindro orizzontale, il quale è collegato, mediante un cordoncino di rimando, allo stesso registratore a doppia velocità fissato sul davanti dello strumento. Finchè il suolo è tranquillo e la carta bianca si svolge lentamente sotto le penne ad inchiostro, la carta affumicata resta invece immobile; ma se in seguito ad un contatto elettrico, tra uno degli stili e la rispettiva asticina verticale, scatta il registratore a doppia velocità, allora tanto la carta bianca quanto quella affumicata cominciano subito a scorrere rapidamente in ragione d'una quindicina di metri all'ora e si ottiene così un doppio sismogramma, l'uno ad inchiostro, l'altro sul nerofumo. Quando, dopo un paio di minuti, cessata la grande velocità, la carta affumicata riprende la sua abituale immobilità, quella bianca invece si rimette al passo, e così di seguito per quanti altri scatti potessero verificarsi sia durante una stessa scossa di lunga durata, sia per scosse diverse. Con tale disposizione ognun vede come la registrazione rapida de' moti sismici sia assicurata sulla carta affumicata nel caso, non impossibile, che una delle pennine cessi di scrivere sulla carta bianca per mancanza d'inchiostro o per qualsiasi altra causa.

Naturalmente ad impedire che i tracciati si sovrappongano sulla carta affumicata, l'asse di rotazione del cilindro motore è tagliato a vite in modo che la carta vada spostandosi poco a poco lateralmente, man mano che essa corre sotto gli stili dello strumento, precisamente come dipoi ha fatto il Cancani nel suo *registratore veloce-continuo*. Di più, ad impedire che l'inerzia e l'attrito del meccanismo, che soprassiede al movimento della carta affumicata, possano ostacolare il buon funzionamento del registratore a doppia velocità, al quale è collegato, la rotazione del cilindro motore della carta affumicata è facilitata da un apposito pesetto pendente da una funicella, la quale è avvolta sull'asse stesso del cilindro.

L'innovazione applicata al sismometrografo di Torino mi ha fatto dipoi pensare se forse non convenisse addirittura, senza aumentare il costo dell'apparecchio, separare la grande dalla piccola velocità, vale a dire far scrivere uno stesso strumento, mediante il sistema da me adottato degli stili prolungati, sopra due registratori indipendenti, l'uno dotato d'una zona di carta che si svolge invariabilmente con moderata velocità, l'altro fornito d'una striscia di carta affumicata, destinata a correre soltanto al sopraggiungere d'ogni scossa.

Quest'idea io ho potuto realizzare in un nuovo strumento che si sta costruendo per la Stazione sismica sperimentale del Collegio Romano, ed io qui prendo l'occasione per ringraziare il prof. comm. Tacchini, diret-

tore dell' Uff. Centr. di Met. e Geod. per i mezzi necessarî che mi ha concessi.

Sul davanti dello strumento gli stili scrivono, al solito ad inchiostro, sopra una zona di carta bianca larga 13^{cm} e che si svolge da un grosso rotolo di provvista con una velocità oraria di 40^{cm}, cioè in ragione di un buon decimo di millimetro per ogni secondo di tempo [1]. Dalla parte opposta, i prolungamenti degli stili scrivono, mediante aghetti bilicati, sopra una striscia di carta affumicata, chiusa in se stessa e posta a cavalcioni sopra il solito cilindro orizzontale, rilegato ad un congegno del tutto analogo alla parte del *registratore a doppia velocità* che soprassiede allo svolgimento rapido della carta. Questo meccanismo, d' un' estrema semplicità e che è posto di fianco al cilindro motore della carta affumicata, permette a piacere a quest' ultima o di entrare in rapido scorrimento e di perdurarvi fino all' esaurimento completo di tutta la corsa, oppure di correre soltanto allorchè l' instrumento resti perturbato, vale a dire ogni volta che l' escursione degli stili sia capace di provocare lo scatto del meccanismo, mediante il ben noto contatto elettrico. Si potrebbe ancora, secondo un' ingegnosa riflessione fatta in proposito dal prof. comm. Tacchini, applicare un sistema misto che permettesse d' utilizzare gli scatti successivi del meccanismo, finchè si trattasse di scosse relativamente brevi; e solo nel caso che il numero di detti scatti sorpassasse un dato limite — ciò che indicherebbe che molto probabilmente s' ha da fare con un terremoto di lunghissima durata — la carta affumicata seguitasse liberamente a scorrere fino alla fine della sua corsa. In tal modo si farebbe a meno d' ulteriori scatti e non si farebbe più dipendere da nulla il buon esito della registrazione. Dirò anzi che il sig. Direttore ha l' intenzione di far eseguire il meccanismo che permetta di raggiungere lo scopo ora accennato [2].

(1) L iscrizione automatica del tempo è fatta sulla zona di minuto in minuto con segni speciali per le ore e mezze ore, mediante un collegamento elettrico con un buon cronometro di marina. Per evitare poi gli errori di parallasse, del pari che ho già praticato in altri strumenti, è la carta stessa che ad ogni minuto e per un breve istante si sposta lateralmente al di sotto delle penne per 2-3 decimi di millimetro al più, in modo che le linee presentino per tal fatto altrettanti microscopici puntini senza che per questo gli stili siano menomamente perturbati. Oltre a ciò, vi è una penna apposita che traccia, pure di minuto in minuto, dei segni ben più visibili ad uno dei bordi della zona e serve specialmente per mettere bene in evidenza i segni delle ore e mezze ore.

(2) Nell' un caso e nell' altro si è in grado di poter conoscere esattamente l' ora d' ogni fase dei sismogrammi tracciati sul nerofumo; in quanto che, accanto agli aghi degli stili ve n' è un altro, che è intercalato nello stesso circuito elettrico, relativo all' iscrizione del del tempo sulla zona di carta bianca. Questo ago ausiliario mentre fa dei segni inutilizzati finchè la striscia affumicata è immobile, invece traccia distintamente i minuti, le ore e le mezzo ore per tutta la durata della corsa della medesima. Inoltre, affine d' avere un punto di partenza per il computo delle ore sul sismogramma, ad ogni scatto del meccanismo, cioè al primo istante che la carta affumicata si pone in movimento, una pennina ad inchiostro lascia espressamente un tratto sull' altro bordo della zona di carta bianca, ciò che permette di calcolare l' ora con tutta esattezza.

Questo sistema, che ho chiamato di doppia registrazione, se da un lato ha l'inconveniente di diminuire un po' la sensibilità dello strumento a causa dell'attrito raddoppiato, ma sempre debolissimo, che ne deriva agli stili, d'altra parte presenta il grande vantaggio di fornire con tutta sicurezza e con un solo strumento anche la registrazione particolareggiata dei fenomeni sismici. Infatti la velocità oraria della carta affumicata è calcolata per lo meno di 15 metri e può essere a piacere accresciuta aumentando il peso motore, per essere questo ora indipendente da quello annesso al meccanismo d'orologeria, che fa svolgere la carta bianca con velocità moderata.

Oltracciò, quando lo strumento resta tranquillo per mancanza di scosse, la manutenzione ne è semplicissima ed assai sbrigativa, per il fatto stesso che la registrazione principale si fa ad inchiostro e la carta affumicata resta intatta fin tanto che non avvenga un terremoto. È solo in tale eventualità che l'osservatore deve darsi la pena di fissare il sismogramma ottenuto sul nerofumo e procedere all'affumicatura della striscia di ricambio.

La zona affumicata, nel nuovo strumento del Collegio Romano, ha una lunghezza di circa 3 metri ed una larghezza di 22^{cm}, mentre il cilindro motore è largo 30, ciò che permette di poter contare sopra una distinta registrazione a grande velocità anche per più di un'ora di seguito, senza che i tracciati si confondano troppo fra di loro, ammesso pure che si trovino in parte sovrapposti ([1]). Se poi la durata del terremoto fosse ancor più lunga, l'osservatore accorso presso lo strumento, in seguito ad avviso dell'apposita suoneria, può prolungare la registrazione a grande velocità, rimpiazzando la 1^{a} striscia di carta affumicata con una 2^{a} ed occorrendo anche con una 3^{a}, tenute già pronte per la sostituzione.

La sola obbiezione un po' seria, a mio modo di vedere, che può farsi all'adozione sia del registratore unico a doppia velocità, sia dei due registratori separati annessi ad uno stesso strumento che io sto provando attualmente, è che non si può ottenere la corsa rapida della carta, bianca od affumicata, se non quando il movimento degli stili sia sufficiente per produrre il contatto elettrico che determina appunto lo scatto della grande velocità. Certo che se lo strumento è collocato in un luogo adatto e non è sensibilmente influenzato da perturbazioni esogene, la distanza, che impedisce il contatto elettrico, può essere ridotta ad una frazione piccolissima di millimetro; ed in tal caso si può star sicuri che la corsa rapida della carta affumicata non può ritar-

([1]) Per lo spostamento laterale e graduale della carta affumicata, mi sono attenuto questa volta all'ingegnoso artifizio ideato dal dott. Pacher, quello cioè di tendere in basso la carta mediante un rullo orizzontale con l'asse di rotazione che fa un certo angolo con quello del cilindro motore. Per impedire poi che la carta, quando fosse giunta al limite del suo spostamento laterale, potesse deteriorarsi al bordo col seguitare a scorrere, basta limitare convenientemente la discesa del peso motore, in modo che il movimento della carta cessi quando non vi sia più posto per un'ulteriore registrazione.

dare di troppo al verificarsi d'una scossa, specie se lo strumento abbia una forte moltiplicazione. E siccome l'ora del principio e delle altre fasi tanto dei primissimi quanto degli ultimi tremiti d'una scossa, riconoscibili senza dubbio anche sulla zona di carta a piccola velocità, si può calcolare con precisione, non resterebbe dunque che a lamentare la mancanza di registrazione rapida sia dei tremiti precedenti il movimento un po' più sensibile — quello appunto che deve iniziare lo scorrimento della carta affumicata — sia degli ultimi tremiti che precedono il ritorno del suolo al suo abituale riposo. Ma se si pensi alla difficoltà di poter analizzare, anche se registrati a grande velocità, questi movimenti così insignificanti, mi pare che nel complesso si potrebbe restare soddisfatti di tutti gli elementi forniti proficuamente da uno dei varî sistemi di registrazione sopra descritti.

Il Cancani col proporre di far scorrere rapidamente, giorno e notte, la carta affumicata sotto gli stili dello strumento, avrebbe cercato di colmare anche la lacuna da noi ora accennata. Ma se il problema è in se stesso indubitamente importante ed a prima vista seducente, credo però che sia ancora ben lontano dall' essere risoluto in modo pratico col *registratore veloce-continuo* del Cancani. Anzitutto la velocità ivi adottata (di 6 metri all' ora, corrispondente a 10^{cm} al minuto soltanto) è del tutto insufficiente per un' analisi completa de' moti rapidissimi, e pe' quali forse neppure basterà la velocità più che doppia adottata ne' miei strumenti. In secondo luogo il Cancani considera il solo caso di due stili, mentre l' adozione d' un terzo per la componente verticale non può ormai essere rimandata più a lungo. Di più egli cerca di fare a meno d' un quarto ago, destinato a segnare il tempo, seguitandosi da lui ad adottare l' artifizio di far sollevare a dati intervalli gli stessi stili, per produrre altrettante interruzioni nel tracciato. Ma se questo artifizio è ancor tollerabile allorchè i segni orarî avvengano, sia pure ad ogni quarto d' ora, come ha adottato ora il Cancani nel nuovo strumento, invece d' una volta all' ora, credo che non possa più sostenersi quando si dovesse introdurre, in seguito alle moderne esigenze, l' iscrizione del tempo ad ogni minuto, ciò che potrebbe perturbare troppo lo strumento. D' altronde, colla velocità oraria di 6 metri, i segni dei quarti d' ora si troverebbero sulla carta alla distanza enorme di un metro e mezzo l' uno dall' altro, e si allontanerebbero anche del doppio nel caso che si dovesse, come di giusto, duplicare almeno l' anzidetta velocità. Oltracciò, il margine lasciato all' escursione massima d' ogni stilo mi sembra troppo piccolo (appena 2^{cm}), specie se si tratti d' uno strumento a grande moliplicazione. Infine, e questo è l' insegnamento ancor più grave, lo spostamento laterale della stricia di carta ad ogni intero giro della stessa mi sembra troppo insignificante (1^{mm}), perchè non si debba con ragione temere — specie in occasione d' un terremoto un po' lungo e intenso — che si confondano maledettamente gli uni cogli altri i numerosi tracciati d' ogni

stilo quasi interamente sovrapposti, sopratutto se vicini, e quindi si corra rischio di non trovare più la corrispondenza del tracciato d'uno stilo con quello dell' altro, ciò che impedirebbe l' analisi del sismogramma. S' aggiunga a tutto ciò la noia di dovere immancabilmente mattina e sera cambiare la carta affumicata e fissare i tracciati ottenuti sul nerofumo, in ragione di due al giorno.

Per le considerazioni esposte mi pare dunque che, volendo praticamente risolvere l' arduo problema affrontato con tanto zelo ed intelligenza dal Cancani, bisognerebbe ricorrere non ad una striscia di carta affumicata larga 14^{cm} soltanto, quale è stato da lui adottata, ma ad una striscia per lo meno della larghezza di un metro!

Certo che umanamente parlando tutto è possibile, quando non si badi nè a spesa nè a complicazioni; ma io mi domando se veramente sia proprio indispensabile di voler spingere le cose a tal punto, dal movimento che con l' uno o l' altro dei sistemi di registrazione sopra esposti siamo al caso di poter risolvere ben più semplicemente tutti i problemi più interessanti della sismologia.

Chimica. — *Azione delle ammine e delle ammidi sull' acenaftenchinone* [1]. Nota dei prof. G. Ampola e V. Recchi, presentata dal Socio Paternò.

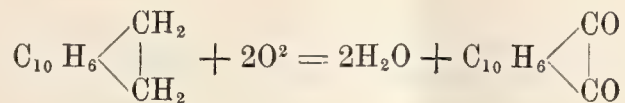
L' acenaftene, sottoposto all' azione del miscuglio cromico, si trasforma per la maggior parte in acido 1-8 naftalico; ma una piccola porzione dà origine nel tempo stesso ad altri prodotti secondarî, i quali si ottengono in maggior copia compiendo l' ossidazione a bassa temperatura.

Graebe e Gfeller [2] nel 1892 volsero i loro studî e le loro ricerche a determinare la natura di questi prodotti, e riuscirono a separare da essi un chinone corrispondente alla formula

$$C_{12}\ H_6\ O_2$$

al quale dettero il nome di *acenaftenchinone.*

La reazione è semplice:

$$C_{10}\,H_6\left\langle\begin{array}{l}CH_2\\ |\\ CH_2\end{array}\right. + 2O^2 = 2H_2O + C_{10}\,H_6\left\langle\begin{array}{l}CO\\ |\\ CO\end{array}\right.$$

Questo corpo pertanto, anzi che la funzione *chinonica*, che è speciale per la serie ciclica, dovrà possedere una doppia funzione chetonica: ed essendo

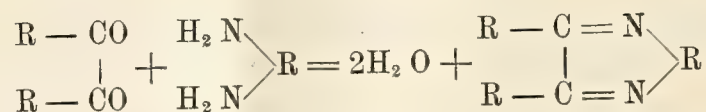
(1) Lavoro eseguito nell' Istituto chimico della R. Università di Roma.

(2) Berich. 25, pag. 653.

i due gruppi chetonici uniti agli atomi di carbonio 1.8, dovrà il suo comportamento essere quello di un vero e proprio *α-dichetone.*

Alcune esperienze di Graebe e Gfeller confermarono ciò; ed infatti per azione della fenilidrazina sull'acenaftenchinone essi ottennero un idrazone ed un osazone.

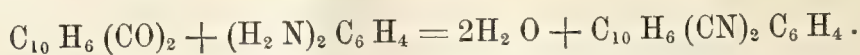
Ma è noto che la reazione più caratteristica, per questa specie di corpi, indicata da Hinnsberg e König come quella che può fornire un particolar metodo di riconoscimento degli α-dichetoni, si ha allorquando essi vengono messi a reagire con le ortodiammine aromatiche. Si formano in tal caso, per condensazione, composti del tipo della chinossalina [1]

$$\begin{matrix} R - CO \\ | \\ R - CO \end{matrix} + \begin{matrix} H_2N \\ H_2N \end{matrix}\!\!>\!R = 2H_2O + \begin{matrix} R - C = N \\ | \\ R - C = N \end{matrix}\!\!>\!R$$

Azione dell'ortofenilendiammina sull'acenaftenchinone.

Si sciolsero pertanto a caldo, nella quantità necessaria di acido acetico glaciale, gr. 5 di acenaftenchinone; vi si aggiunse, in proporzione equimolecolare, cloridrato di ortofenilendiammina, e si pose a bollire in apparecchio a ricadere, per circa tre ore.

Il liquido, dapprima giallo, poi coloratosi intensamente in rosso, lasciò precipitare per aggiunta di acqua, fiocchi bianchi e leggeri di una sostanza che, raccolta e lavata con molta acqua, venne depurata per successive cristallizzazioni dall'acido acetico e dall'alcool.

Si trovò risultare dalla condensazione di una molecola di ortofenilendiammina con una di acenaftenchinone:

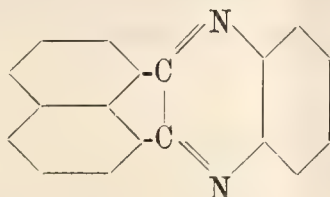
$$C_{10}H_6(CO)_2 + (H_2N)_2C_6H_4 = 2H_2O + C_{10}H_6(CN)_2C_6H_4 .$$

Dall'analisi infatti si ebbero i seguenti risultati:

I. gr. 0,1943 di sostanza, fornirono gr. 0,6048 di CO_2 e gr. 0,0728 di H_2O;
II. gr. 0,1716 di sostanza, fornirono gr. 0,5340 di CO_2 e gr. 0,0650 di H_2O;
III. gr. 0,2179 di sostanza, dettero c. c. 21,7 di azoto, misurati alla temperatura di 22° e alla pressione di mm. 748.

	calcolato p % per $C_{18}H_{10}N_2$	trovato I.	II.	III.
C	85,03	84,88	84,87	—
H	3,94	4,16	4,20	—
N	11,03	—	—	11,09

[1] Berich. 17, pag. 318.

Si è dunque ottenuta l'*acenaftenfenoparadiazina*, od *α-α-naftochinossalina*. La sua costituzione, dedotta dal modo di formazione, è rappresentata dalla formula

```
               //N\  /\
   /‾‾‾‾\    /      \/  \
   \     >-C         |    |
    >---<  |         |    |
   /     >-C\        |    |
   \____/    \\    /\    /
               N     \/
```

È una sostanza perfettamente bianca, se pura, che fonde a 234° ed a temperatura superiore sublima in aghi. È solubile negli ordinarî solventi da cui cristallizza in aghi sottili, spesso riuniti in fogliette splendenti o in piccole sfere; solubilissima poi nel cloroformio, anche a freddo. Gli acidi minerali la sciolgono facilmente, se concentrati, colorandosi l'acido solforico in giallo, l'acido cloridrico in rosso. Per aggiunta di acqua riprecipita inalterata.

Come la formula lascia prevedere questo nuovo composto è una base, ed il comportamento e la composizione de' suoi sali, mostrano che è una base debole e monoacida. L'acido cloridrico infatti e l'acido picrico si sommano ad essa, molecola a molecola; mentre due molecole della base si combinano con una di cloruro platinico, nel cloroplatinato. Tutti questi sali sono poco stabili e facilmente decomposti dall'acqua.

Cloridrato. — Si ottenne sciogliendo l'α-α-naftochinossalina in acido cloridrico concentrato e caldo. Col raffreddamento si depose una sostanza intensamente colorata in giallo, che venne cristallizzata dall'acido cloridrico diluito, asciugata fra carta, e infine seccata nel vuoto, su acido solforico.

Questo sale risulta dall'addizione di una molecola di acido cloridrico ad una di acenaftenfenoparadiazina: infatti

gr. 0,2172 di sostanza diedero all'analisi gr 0,1058 di AgCl;

per cui si ha

	calcolato °/₀ per $C_{18}H_{10}N_2 . HCl$	trovato
Cl	12,22	12,06

L'acqua e i solventi acquosi lo decompongono con grande facilità; anche lasciato all'aria si altera, perdendo a poco a poco il suo acido cloridrico, che si elimina rapidamente col riscaldamento.

Picrato. — Fatta a caldo una soluzione concentrata della base in acido acetico glaciale, vi si aggiunse, in leggero eccesso, acido picrico in soluzione acetica e si fece bollire. Col raffreddamento si separò una sostanza cristallina gialla, che venne purificata per cristallizzazioni ripetute dall'acido acetico e dalla benzina. Si ebbe così il picrato in lunghi aghi, fusibili a 188°.

Risulta dall'addizione di una molecola di acido picrico ad una della base.

All' analisi infatti:

gr. 0,1700 di sostanza dettero c. c. 20,6 di azoto misurati alla temperatura di 12° ed alla pressione di mm. 768: donde

	calcolato % per $C_{18}H_{10}N_2 . C_6H_2(NO_2)_3OH$	trovato
N	14,49	14,54

Si scioglie poco nell' etere, meglio in benzolo, molto in acido acetico glaciale. Trattato con acqua facilmente si scompone.

Cloroplatinato. — Fu preparato sciogliendo la base in acido cloridrico diluito ed aggiungendo poi una soluzione acquosa di cloruro platinico. Si vide tosto formarsi un precipitato giallo, pesante, che fu cristallizzato dall' alcool assoluto.

Questo sale si presenta in cristalli piccolissimi, lucenti, di color giallo ranciato. Fonde a temperatura molto elevata, decomponendosi. È insolubile in benzina, etere e acido acetico. L' acqua, anche a freddo, lo decompone mettendo in libertà la base.

Risulta dall' addizione di una molecola di acido cloroplatinico a due molecole di α-α-naftochinossalina.

Infatti all' analisi:

gr. 0 1812 di sostanza fornirono gr. 0,0384 di platino; per cui

	calcolato % per $(C_{18}H_{10}N_2)_2H_2PtCl_6$	trovato
Pt	21,19	21,19

Le chinossaline possono dare per l' azione del sodio ed alcool prodotti di riduzione di- o tetra-idrogenati.

Così Hinnsberg [1] ebbe dalla difenilchinossalina la diidrodifenilchinossalina e la tetraidrodifenilchinossalina in due forme stereoisomere.

Non essendo riusciti in alcun modo ad ottenere simili prodotti dall' α-α-naftochinossalina, forse per la facilità con cui, ossidandosi, tornavano a dare la base inalterata, abbiamo sottoposta questa all' azione del bromo.

Gr. 5 della base vennero disciolti a freddo nella quantità necessaria di cloroformio, ed alla soluzione si aggiunse a poco a poco del bromo sino a leggiero eccesso, agitando continuamente. Si separò dal liquido una sostanza gialla, pesante, che venne depurata per cristallizzazioni dall' acido acetico glaciale.

Questo derivato si presenta in forme minute e lucenti; è poco solubile in etere e in cloroformio; molto nell' acido acetico bollente. Riscaldato a 100° perde il bromo, e rimane libera la base, fusibile a 234°. L' acqua, i solventi

[1] Berich. 24, pag. 2181.

acquosi, gli alcali, lo decompongono facilmente, distaccando il bromo; anche per l'azione dello zinco e acido acetico si torna ad ottenere la base.

I risultati analitici dimostrarono che a ciascuna molecola di questa si erano sommati due atomi di bromo e che perciò erasi ottenuta la *α-α-naftodibromochinossalina.*

Infatti:

gr. 0,1303 di sostanza fornirono gr. 0,1187 di AgBr: donde

	calcolato °/₀ per $C_{18}H_{10}N_2Br_2$	trovato
Br	38,64	38,80

Azione dell'etilendiammina sull'acenaftenchinone.

Gli *α*-dichetoni, nello stesso modo che con le ortodiammine aromatiche, possono condensarsi con alcune diammine grasse, come l'etilendiammina, per dare composti che non sono più del tipo della chinossalina, ma contengono ancora il nucleo diazinico, e sono da riguardarsi come derivati della diidropirazina.

Si sciolsero pertanto a caldo in acido acetico glaciale gr. 6 di acenaftenchinone e vi si aggiunsero a poco a poco gr. 4 di etilendiammina priva di acqua e si fece bollire a ricadere per circa un'ora. Il liquido, coloratosi in rosso bruno, venne versato in molta acqua e lasciato a sè per una giornata.

Dopo questo tempo, si raccolsero per filtrazione circa due grammi di una sostanza biancastra, d'aspetto cristallino, che fu depurata, sciogliendola in poco alcool caldo, aggiungendo poi acqua egualmente calda, sino a leggero intorbidamento, e quindi lasciando raffreddare. Si ottenne così il nuovo prodotto cristallizzato in aghetti lunghi e sottili, leggermente colorati in giallo.

Fonde a 143° ed a temperatura più elevata sublima; è solubile negli ordinarî solventi, solubilissima poi in alcool, etere, cloroformio, anche a freddo; gli acidi minerali la sciolgono anch'essi bene; ma è insolubile nell'acqua e negli alcali.

L'analisi mostrò trattarsi di un prodotto di condensazione tra una molecola di acenaftenchinone ed una di etilendiammina, secondo l'equazione

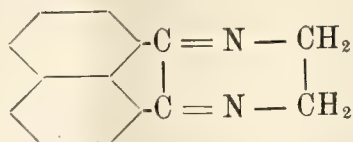
$$C_{10}H_6(CO)_2 + (H_2N)_2C_2H_4 = 2H_2O + C_{10}H_6(CN)_2C_2H_4 .$$

Infatti:

I. gr. 0,1528 di sostanza, dettero gr. 0,4570 di CO_2 e gr. 0,0672 di H_2O;
II. gr. 0,1104 di sostanza, dettero gr. 0,3296 di CO_2 e gr. 0,0470 di H_2O;
III. gr. 0,1644 di sostanza fornirono c. c. 19,5 di azoto misurati alla temperatura di 20° ed alla pressione di mm. 754.

	calcolato °/₀ per $C_{14}H_{10}N_2$	trovato I.	II.	III.
C	81,55	81,56	81,42	—
H	4,86	4,88	4,73	—
N	13,59	—	—	13,47

Si è dunque ottenuta la *diidroacenaftenparadiazina*, a cui, come si deduce dal suo modo di formazione, spetta la formula

$$\begin{array}{l} C_{10}H_6 \begin{array}{l} -C = N - CH_2 \\ \quad | \qquad\quad | \\ -C = N - CH_2 \end{array} \end{array}$$

A somiglianza dell' α-α-naftochinossalina anche questa sostanza ha il comportamento di una base debole e monoacida.

Picrato. — Si forma allorquando si aggiunge ad una soluzione alcolica della base acido picrico sciolto egualmente in alcool, e si fa bollire per qualche minuto. Col raffreddamento il sale si depone in bellissime laminette di color giallo ranciato. Cristallizza assai bene dall' alcool e fonde a 210°.

Risulta dall' addizione di una molecola di trinitrofenolo con una molecola di diidroacenaftenparadiazina.

Infatti:

gr. 0,2026 di sostanza, fornirono c. c. 28,8 di azoto, misurati alla temperatura di 22° ed alla pressione di mm. 754. Quindi:

	calcolato °/₀ per $C_{14}H_{10}N_2 \cdot C_6H_2(NO_2)_3OH$	trovato
N	16,10	16,52

Cloroplatinato. — In una soluzione di diidroacenaftenparadiazina nell' acido cloridrico diluito, si versò una soluzione acquosa di cloruro di platino; il precipitato giallo prontamente formatosi, fu lavato con alcool e cristallizzato poi dall' acido acetico. Si ebbe così il cloroplatinato in piccoli cristalli, gialli, assai poco solubili nell' alcool, e che, scaldati sulla lamina di platino, bruciano prima di fondere. L' acqua decompone questo sale con grande facilità.

Risulta dalla combinazione di due molecole della base con una di acido cloroplatinico.

Infatti:

gr. 0,1804 di sostanza, diedero all' analisi gr. 0,0426 di Pt, per cui si ha:

	calcolato °/₀ per $(C_{14}H_{10}N_2)_2H_2PtCl_6$	trovato
Pt	23,63	23,61

Anche su questa base, fu invano tentata la riduzione per mezzo del sodio ed alcool. Se ne ebbe invece facilmente un bromoderivato, operando come nel caso dell' α-α-naftochinossalina. Esso si depose dalla soluzione cloroformica in forme nettamente cristalline di color giallo.

Due atomi di bromo si sono sommati a ciascuna molecola della base.

All' analisi infatti:
gr. 0,1960 di sostanza, fornirono gr. 0,1996 di AgBr. Quindi:

	calcolato °/₀ per $C_{14}H_{10}N_2Br_2$	trovato
Br	47,71	47,39

Questa *diidrodibromoacenaftenparadiazina* è una composto instabilissimo che non solamente l' acqua, i solventi acquosi e gli alcali decompongono mettendo in libertà la base, ma che perde il bromo anche per il riscaldamento o per la semplice esposizione all' aria.

Se si scioglie nell' etere acetico e si fa bollire, si vedono tosto formarsi in seno al liquido numerosi cristalli gialli che raccolti su filtro, lavati e seccati non si alterano, tenuti a 100° anche lungo tempo, e mostrano un punto di fusione assai elevato. Nelle acque madri si riscontra una notevole quantità di acido bromidrico.

Questa nuova sostanza è solubile in alcool ed in acido acetico diluito. Bollita con acqua non si decompone; trattata a caldo con una soluzione diluita di potassa, perde il bromo e dà la base inalterata.

All' analisi si ebbero i seguenti risultati:

I. gr. 0,2576 di sostanza, fornirono (metodo Carius) gr. 0,1679 di AgBr;
II. gr. 0,2102 di sostanza, dettero (metodo Fohlard) gr. 0,1368 di AgBr.

	calcolato °/₀ per $C_{14}H_9N_2Br$	trovato I.	trovato II.
Br	27,98	27,73	27,68

È dunque un monobromoderivato, il quale merita d' essere studiato ulteriormente.

Azione dell' Urea sull' acenaftenchinone.

Il comportamento dell' acenaftenchinone con le diammine, comprova come abbiamo visto, la sua natura di vero α-dichetone. Restava a vedere quale azione esso spiegasse verso composti contenenti ancora due gruppi ammidici, ma uniti ad un residuo acido; cioè verso le ammidi, tra cui si scelse la diammide carbonica.

Studî analoghi fatti già da Franchimont e Klobbie sul diacetile [1]; poi da Angeli sul benizle [2] e infine da Grimaldi, il quale fece numerose esperienze sia con i chinoni propriamente detti, sia con i dichetoni [3]; avevano

[1] Rec. trav. chim , 7, pag. 251.
[2] Gazz. chim. ital., XIX, pag. 563.
[3] Gazz. chim. ital., XXVII, pag. 228.

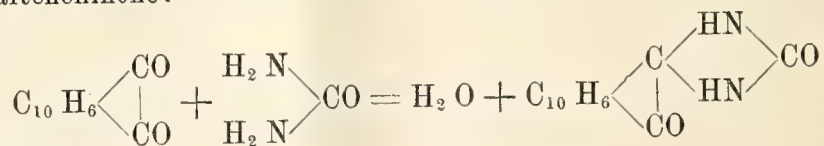
dimostrato come tanto le sostanze a funzione chinonica, quanto quelle a doppia funzione chetonica, possono reagire con l' urea, sostituendo gli atomi d' idrogeno uniti all' azoto e dando luogo alla formazione di composti che da Franchimont vennero designati col nome di *Ureine*.

Però, mentre gli α-dichetoni si combinano con una o con due molecole di urea, per dare rispettivamente le mono e le di- ureine, dai chinoni non si riuscì ad avere che le monoureine; il che è ragionevole attribuire alla diversa posizione dei carbonili.

Le esperienze da noi fatte, si accordano pienamente con queste osservazioni.

Monoureina. — Posti insieme c. c. 100 di alcool e gr. 1 di acenaftenchinone ridotto in fina polvere, si riscaldò sino all' ebollizione e si aggiunsero quindi gr. 5 di urea e gr. 8 di acetato sodico fuso. Continuando a far bollire, il liquido diventò limpido e quasi incoloro; filtrammo rapidamente e lasciammo raffreddare. Si depose tosto in laminette bianche, lucenti, una sostanza che venne depurata con successivi lavaggi, prima con acqua, poi con alcool bollente.

Risulta dalla condensazione di una molecola di úrea con una molecola di acenaftenchinone:

$$C_{10}H_6\left\langle\begin{matrix}CO\\ |\\ CO\end{matrix}\right. + \left.\begin{matrix}H_2N\\ H_2N\end{matrix}\right\rangle CO = H_2O + C_{10}H_6\left\langle\begin{matrix}C\left\langle\begin{matrix}HN\\ HN\end{matrix}\right\rangle CO\\ |\\ CO\end{matrix}\right.$$

Infatti:

I. gr. 0,2784 di sostanza, dettero gr. 0,7080 di CO_2 e gr. 0,1098 di H_2O;
II. gr. 0,1582 di sostanza, dettero gr. 0,3999 di CO_2 e gr. 0,0610 di H_2O;
III. gr. 0,2552 di sostanza, fornirono c. c. 26,8 di azoto misurati alla temperatura di 12° ed alla pressione di mm. 757. Quindi:

	calcolato % per $C_{13}H_8N_2O_2$	trovato I.	trovato II.	trovato III.
C	69,64	69,36	68,89	—
H	3,58	4,34	4,28	—
N	12,50	—	—	12,41

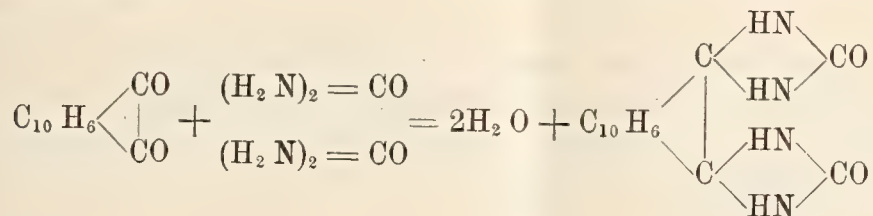
Questo nuovo composto fonde a 210°; è insolubile in tutti i solventi ordinarî, per cui la sua depurazione riesce molto difficile. Bollito con acqua si scinde in urea ed acenaftenchinone. Gli alcali non lo alterano, ma gli acidi minerali ed anche l' acido acetico, lo scompongono facilmente, mettendo in libertà il chinone.

Abbiamo cercato di sostituire gl' idrogeni immidici con residui acetilici o nitrici, ma non si ottenne che il mono o il bi-derivato dell' acenaftenchinone; come pure cercammo di far reagire il gruppo chetonico rimasto, con la fenilidrazina; ma non si potè ottenere che il mono o il bi-idrazone dell' acenaftenchinone stesso.

Diureina. — Gr. 3 di acenaftenchinone e gr. 9 di urea, mescolati insieme, furono scaldati in bagno d'olio a circa 270°. È necessario un forte eccesso d'urea, perchè a temperatura così elevata gran parte di essa si scompone prima di reagire. La massa fuse con abbondante sviluppo di acqua e di ammoniaca; poi, cessato questo sviluppo, si rapprese in una sostanza bruna che fu finamente polverizzata e quindi trattata molte volte con acqua e alcool bollente allo scopo di asportare il chinone rimasto inalterato e l'acido cianurico formatosi per la decomposizione dell'urea.

Il nuovo composto, colorato in rosso bruno, fonde ad elevata temperatura, decomponendosi; è pochissimo solubile in acido acetico, insolubile negli altri solventi. Si scioglie però nell'acido solforico concentrato, colorandolo in rosso, e nell'acido nitrico, colorandolo in giallo; per aggiunta di acqua riprecipita inalterato.

Risulta dalla condensazione di una molecola di acenaftenchinone con due molecole di urea:

$$C_{10}H_6\left<\begin{matrix}CO\\ |\\ CO\end{matrix}\right. + \begin{matrix}(H_2N)_2 = CO\\ (H_2N)_2 = CO\end{matrix} = 2H_2O + C_{10}H_6\left<\begin{matrix}C\left<\begin{matrix}HN\\ HN\end{matrix}\right>CO\\ |\\ C\left<\begin{matrix}HN\\ HN\end{matrix}\right>CO\end{matrix}\right.$$

Infatti:

I. gr. 0,1612 di sostanza, dettero gr. 0,3704 di CO_2 e gr. 0,0526 di H_2O;
II. gr. 0,2123 di sostanza dettero gr. 0,4892 di CO_2 e gr. 0,0739 di H_2O;
III. gr. 0,2210 di sostanza, fornirono c. c. 41,2 di azoto, misurati alla temperatura di 22° ed alla pressione di mm. 762.

	calcolato % per $C_{14}H_{10}N_4O_2$	trovato		
		I.	II.	III.
C	63,15	62,66	62,83	—
H	3,75	3,62	3,67	—
N	21,05	—	—	21,17

Questa sostanza non può naturalmente aver proprietà basiche, ma contiene quattro atomi di idrogeno sostituibili da radicali acidi. Fu sottoposta perciò all'azione dell'acido nitrico e di miscugli di acido nitrico e solforico; ma solamente operando in tubi chiusi, e dopo lungo riscaldamento si riuscì ad ottenere un nitroderivato in cui due atomi d'idrogeno erano stati sostituiti da residui nitrici.

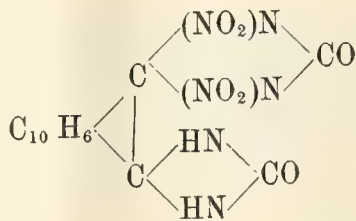
Franchimont e Angeli, nelle ricerche sovraccennate, pervennero ad uguale risultato, ottenendo sempre biderivati per quanto variassero le condizioni dell'esperienza.

La dinitrodiureina fu dunque preparata ponendo gr. uno di chinone e c. c. 50 circa di acido nitrico concentrato (d = 1,52) ed esente di vapori nitrosi, in tubo chiuso che venne riscaldato per otto ore a 100°-110°. Versando il tutto in acqua, dopo lungo tempo, si depositò una polvere cristallina, sottilissima, gialla, che fu depurata sciogliendola parecchie volte in acido acetico e riprecipitando con acqua. A 300° ancora non fonde, riscaldato sulla lamina di platino deflagra vivamente; è assai solubile nell' acido acetico e nell' alcool, ma si rifiuta di cristallizzare.

All' analisi

gr. 0,1222 di sostanza, dettero c. c. 25,2 di azoto misurati alla temperatura di 19° ed alla pressione di mm. 750: cioè

	calcolato °/₀ $C_{14} H_8 N_6 O_6$	trovato
N	23,59	23,38

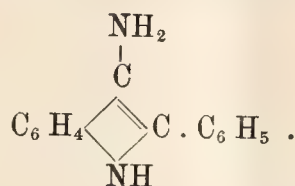
E poichè tanto Franchimont per la dinitrodimetilacetilendiureina, quanto Angeli per la diacetildifenilacetilendiureina, dimostrarono che i due residui acidi sono uniti a due atomi di azoto appartenenti alla stessa molecola di urea, ci sembrò giusto, per ragioni di analogia, attribuire a questa dinitrodiureina la formula seguente:

$$C_{10}H_6 \left\langle \begin{array}{l} C \left\langle \begin{array}{l} (NO_2)N \\ (NO_2)N \end{array} \right\rangle CO \\ | \\ C \left\langle \begin{array}{l} HN \\ HN \end{array} \right\rangle CO \end{array} \right.$$

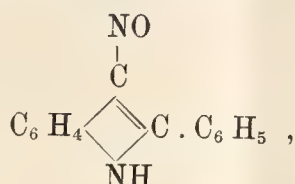
Chimica. — *Sopra alcuni nitrosoindoli.* Nota di A. Angeli e M. Spica, presentata dal Socio G. Ciamician.

È noto che la maggior parte degli indoli reagiscono facilmente con l'acido nitroso, per dare prodotti la cui natura varia a seconda dell' indolo impiegato. Quei derivati dell' indolo i quali contengono radicali alcoolici in posizione β oppure in $\alpha\beta$ sembra diano vere nitrosoammine. Queste sostanze danno la reazione di Liebermann ed i mezzi riducenti le trasformano con facilità negli indoli primitivi.

Gli indoli α-sostituiti invece, per azione dell' acido nitroso, danno origine a prodotti di natura affatto diversa. Così l' α-fenilindolo fornisce una sostanza colorata in giallo, che non dà la reazione di Liebermann e che per

riduzione si trasforma nell' ammina, corrispondente, cui viene attribuita la struttura:

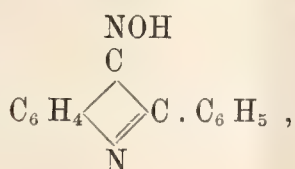
$$C_6H_4\langle C(NH_2) \rangle C \cdot C_6H_5 \quad (\text{ring closed by } NH) .$$

Per tale ragione viene ammesso che al nitroso-α-fenilindolo spetti la costituzione

$$C_6H_4\langle C(NO) \rangle C \cdot C_6H_5 \quad (\text{ring closed by } NH) ,$$

secondo la quale si dovrebbe considerare come un composto contenente l' aggruppamento — C . NO, caratteristico dei veri nitrosoderivati.

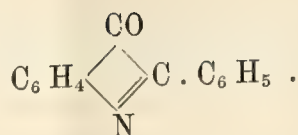
Tale formola di struttura a noi sembra poco verosimile. È noto infatti in seguito alle ricerche di V. Meyer, Piloty e sopratutto di A. von Baeyer che tutti i veri nitrosoderivati sono colorati in verde od in azzurro allo stato solido oppure quando sono fusi od in soluzione. Il nitrosoindolo in parola invece è giallo e dà soluzioni del pari colorato in giallo; si scioglie negli alcali con intensa colorazione aranciata e dà con tutta facilità un derivato acetilico. Inoltre esso non reagisce con l' idrossilammina. Questa sostanza è un ottimo reattivo per i veri nitrosoderivati; essa trasforma i nitrosoderivati aromatici, come ha trovato Bamberger, in derivati diazoici. Ed ancora tre anni or sono uno di noi, assieme al dott. Boeris, aveva osservato che anche le vere nitrosammine, per azione dell' idrossilammina, rigenerano immediatamente le ammine primitive con sviluppo di protossido di azoto.

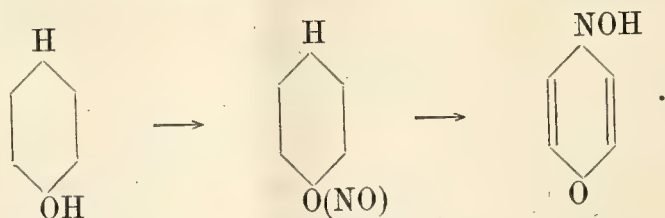
È quindi assai improbabile che il nitrosofenilindolo, che non viene modificato dall' idrossilammina, contenga nella sua molecola il residuo nitrosilico unito ad un atomo di carbonio.

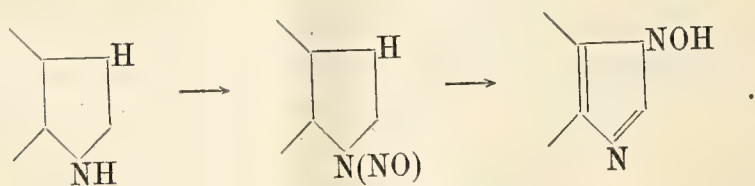
Per tali ragioni noi crediamo che esso possieda una struttura diversa da quella che gli viene attribuita, e che molto probabilmente esso sia da considerarsi come l' ossima

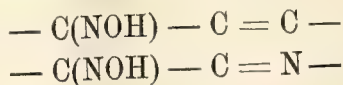
$$C_6H_4\langle C(NOH) \rangle C \cdot C_6H_5 \quad (\text{ring closed by } =N) ,$$

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica farmaceutica della R. Università di Palermo.

corrispondente al chetone

$$C_6H_4 \langle {CO \atop N} \rangle C \, . \, C_6H_5 \; .$$

Tale formola darebbe completamente ragione del suo comportamento e spiegherebbe anche le analogie che questa sostanza presenta con le chinossime, che del pari una volta venivano riguardate come nitrosofenoli. Anche il modo con cui si formano molto probabilmente è analogo: nel caso dei fenoli si formerà dapprima l' etere nitroso, che poi si trasformerà nella chinonossima:

H — OH → H — O(NO) → NOH — O .

Nel caso degli indoli dapprima si formerà la nitrosammina:

H — NH → H — N(NO) → NOH — N .

Nei nitrosofenoli e nei β-nitrosoindoli con tutta probabilità sono contenuti rispettivamente gli aggruppamenti

$$— C(NOH) — C = C —$$
$$— C(NOH) — C = N —$$

che fanno parte di catene, chiuse.

Questa reazione presenta un nuovo esempio delle grandi analogie di comportamento che passano fra i fenoli ed i derivati pirrolici: analogie che per la prima volta vennero poste in rilievo dalle ricerche del Prof. Ciamician e dei suoi allievi.

In una prossima comunicazione descriveremo le esperienze che si riferiscono a questa Nota preliminare.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 marzo 1899.

E. Beltrami Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Sulle protuberanze solari osservate al R. Osservatorio del Collegio Romano durante il 4° trimestre del 1898 e loro distribuzione in latitudine.* Nota del Socio P. Tacchini.

La stagione non fu molto favorevole a questo genere di osservazioni, specialmente nel mese di Novembre. I risultati statistici soliti, sono contenuti nel seguente specchietto:

4° trimestre 1898.

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Medio numero delle protuberanze per giorno	Media altezza per giorno	Estensione media	Media delle massime altezze	Massima altezza osservata
Ottobre . . .	21	4,05	29″,7	1°,1	35″,0	55″
Novembre. .	11	2,00	32,6	1,5	34,7	62
Dicembre . .	17	3,18	31,6	1,4	34,8	48
Trimestre	49	3,29	31,0	1,3	34,9	55

La frequenza delle protuberanze risulta pochissimo diversa da quella trovata per il precedente trimestre, e nel complesso il fenomeno delle protuberanze può considerarsi come stazionario rispetto alla precedente serie. Dobbiamo però avvertire, che le condizioni dell'aria furono quasi sempre poco buone.

Dalle latitudini calcolate per le 162 protuberanze osservate nel trimestre, ho ricavato le seguenti cifre per la frequenza relativa del fenomeno nelle diverse zone solari:

4° trimestre 1898.

Latitudine	Frequenza	
90° + 80°	0,024	
80 + 70	0,024	
70 + 60	0,012	
60 + 50	0,006	
50 + 40	0,041	0,367
40 + 30	0,059	
30 + 20	0,083	
20 + 10	0,065	
10 . 0	0,053	
0 — 10	0,053	
10 — 20	0,189	
20 — 30	0,195	
30 — 40	0,059	
40 — 50	0,071	0,633
50 — 60	0,024	
60 — 70	0,024	
70 — 80	0,012	
80 — 90	0,006	

Le protuberanze solari furono più frequenti nelle zone australi come nel precedente trimestre, ed anche il *maximum* per zona avvenne nell'emisfero australe, cioè nella zona (— 10° — 30°). Le protuberanze figurano in tutte le zone con due massimi nelle zone (± 20° ± 30°).

Astronomia. — *Osservazioni del nuovo pianetino EE 1899 fatte all'equatoriale di $0^m.25$ di apertura del R. Osservatorio del Collegio Romano.* Nota del Corrispondente E. Millosevich.

Dopo l'ultima mia Nota riguardante le osservazioni sul pianetino ED 1899, ad Heidelberga, coll'euriscopio fotografico, Wolf ne rinvenne altri quattro, l'ultimo peraltro deve essere molto probabilmente (224) Oceana; restano adunque tre di nuovi, almeno fino a calcoli sicuri. Di questi ho potuto osservare prima del plenilunio il pianetino EE, che ritrovai, anche dopo il lume lunare, senza aiuto di alcuna effemeride.

1899 Febb. 17	9^h45^m 8^s RCR.	α app.:	$9^h52^m45^s.40$	(9.410_n);	δ app.:	$+15°16'39''.9$ (0.621)
» » 18	9 34 15 »	» :	9 51 48 71	(9.426_n);	» :	+15 24 47 7 (0.628)
» » 19	11 4 13 »	» :	9 50 48 14	(8.978_n);	» :	+15 33 26 2 (0.594)
» » 28	9 11 36 »	» :	9 42 41 73	(9.354_n);	» :	+16 42 4 1 (0.598)
» Marzo 2	9 29 11 »	» :	9 41 0 53	(9.245_n);	» :	+16 56 5 9 (0.585)

Colgo questa occasione per togliere di mezzo l' idea erronea, ma abbastanza diffusa, che possano essere classificati come nuovi, pianetini già trovati e con orbite difettose. Le costanti del piano, nel quale si muove un astro, risultano, salvo casi eccezionali, con sufficiente precisione anche da un'orbita circolare sulla base di due osservazioni, e coll'intervallo di 6 o 7 dì. Ordunque, o mancano i mezzi del tutto per fare un'orbita circolare, e allora la scoperta è come non avvenuta, e l'astro non ha classificazione di sorta; oppure vi è almeno un'orbita circolare, e questa basta per far rivolgere l'attenzione ad una eventuale identità. Se poi d' un astro si posseggono elementi ellittici, pur assai difettosi, e che perciò sia smarrito, allorquando occasionalmente lo si ritrovi, l'accertamento dell' identità diventa cosa ben più facile per altri caratteri orbitali (moto medio — eccentricità — orientamento dell'asse primario) che i due astri debbono avere in comune. Così ad es: il pianetino, che è smarrito da più lungo tempo, è (99) Dike. Sono 30 anni che è perduto; tuttavia si sa che la sua orbita era molto eccentrica e notabilmente inclinata (14°), che la longitudine del nodo era circa 42°, il moto medio circa 760″ e l'orientamento dell' asse primario (longitudine del perielio) circa 240°: ne abbiamo di troppo per accertare l' identità, quando occasionalmente lo si ritrovasse.

Matematica. — *Sopra le superficie a curvatura costante positiva.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Per le superficie a curvatura costante negativa (pseudosferiche) si conoscono, come è ben noto, metodi di trasformazione che, partendo da una superficie nota di questa classe, permettono di dedurne infinite nuove superficie, colla medesima curvatura, dipendenti da un numero, che si può far crescere ad arbitrio, di costanti arbitrarie (1). Ma i ripetuti tentativi dei geometri per costruire un' analoga teoria per le superficie a curvatura costante positiva erano rimasti fin qui senza successo. E le superficie note di questa classe si riducevano alle superficie di rotazione, alle elicoidali e a quelle con un sistema di linee di curvature piane o sferiche. Ora, continuando le ricerche della mia Nota precedente (2), sono stato finalmente condotto a conseguire la desiderata trasformazione, stabilendo il teorema:

Da ogni superficie Σ a curvatura costante positiva nota, integrando un' ordinaria equazione differenziale del 2° ordine, si deducono ∞^3 nuove superficie Σ' colla medesima curvatura; *da ciascuna di queste si deducono,*

(1) V. Darboux, *Leçons III,* Chap. XII e le mie *Lezioni di geometria differenziale,* Cap. XVII.

(2) Questi Rendiconti, seduta del 23 febbraio.

nel medesimo modo, ∞^3 nuove superficie della medesima classe e così via illimitatamente.

La circostanza che: *siffatte trasformazioni conservano le linee di curvatura ed i sistemi coniugati*, affatto analogamente come le note trasformazioni complementari e di Bäcklund delle superficie pseudosferiche accresce l'importanza del risultato conseguito. Ciò fa prevedere infatti che la trasformazione stessa, oltre che alle superficie a curvatura costante positiva isolate, potrà anche molto probabilmente applicarsi ai sistemi tripli ortogonali contenenti una serie di tali superficie, sistemi che erano rimasti fin qui inaccessibili alle trasformazioni.

2. Nella presente Nota preliminare mi limiterò ad enunciare i teoremi fondamentali, dai quali l'accennata trasformazione dipende, lasciando loro quella forma provvisoria che mi si è presentata in questi primi calcoli. Ma penso naturalmente che gli studî successivi dovranno dare al risultato una forma geometrica definitiva più semplice.

Sia dunque Σ una superficie a curvatura costante positiva K, e facciamo per semplicità $K = +1$. L'elemento lineare di Σ, riferito alle linee di curvatura u, v prende la nota forma [1]:

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2 ,$$

dove θ è una soluzione dell'equazione a derivate parziali del secondo ordine

$$(a) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0 .$$

Sopra la normale a Σ in ogni suo punto M si porti un segmento

$$T = MM' ,$$

che, considerato come funzione di u, v, soddisfi al seguente sistema simultaneo di equazioni a derivate parziali, l'una del 1°, l'altra del 2° ordine, sistema che in forza della (a) è *illimitatamente integrabile* [2]:

$$(A)\begin{cases} \dfrac{1}{(\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)^2}\left(\dfrac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \dfrac{1}{(\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)^2}\left(\dfrac{\partial T}{\partial v}\right)^2 = cT^2 - (c+1) \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial u\partial v} = \left(\dfrac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta} + \dfrac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\right)\dfrac{\partial T}{\partial u}\dfrac{\partial T}{\partial v} + \\ \qquad + \dfrac{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial T}{\partial v} + \dfrac{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial T}{\partial u} . \end{cases}$$

(1) V. *Lezioni*, pag. 446.

(2) Questo sistema di equazioni cui deve soddisfare il segmento T fu da me ritrovato applicando le formole della Nota precedente e il teorema nuovamente conseguito che sulla superficie Σ normale ai raggi e sulla riflettente S si corrispondono i sistemi coniugati.

Nella prima formula (A) c indica una costante arbitraria che per altro, quando si assuma negativa, si supporrà (per restare a costruzioni geometriche reali) in valore assoluto > 1. L'integrale generale T del sistema (A) contiene, oltre c, due nuove costanti arbitrarie c', c''; scriviamo

$$T = T(u, v; c, c', c'').$$

Fissiamo ad arbitrio i valori delle tre costanti c, c', c'', sicchè il segmento

$$(b) \qquad MM' = T(u, v; c, c', c'')$$

avrà in ogni punto M di Σ un valore determinato. Ciò premesso, e supposto che non sia nè $\frac{\partial T}{\partial u} = 0$ nè $\frac{\partial T}{\partial v} = 0$, ecco i due teoremi fondamentali per la nostra trasformazione:

1° Sopra la normale in ogni punto M *della superficie* Σ *a curvatura costante positiva* $K = +1$ *si porti il segmento* MM' *definito dalla* (b); *il luogo degli estremi* M' *è una superficie* S *applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione se* $c < 0$ (*cioè* $T^2 < 1$), *e invece sull'iperboloide di rotazione a due falde quando* $c > 0$ (*ovvero* $T^2 > 1$); *il semiasse maggiore nel primo caso e il semiasse trasverso nel secondo avendo una lunghezza* $= 1$.

2° Se i raggi MM' *si riflettono sulla superficie* S *e sopra ogni raggio riflesso si stacca, a partire da* M' *un segmento* $M'N = MM'$, *il luogo del punto* N *è una nuova superficie* Σ' *colla medesima curvatura* $K = +1$, *le cui normali sono i raggi stessi riflessi.*

E chiaro così come, per ogni terna di valori attribuiti alle tre costanti c, c', c'', si ottiene dalla Σ una nuova superficie Σ' applicabile sulla sfera. L'integrazione del sistema (A) che, pel noto teorema di Mayer, si riduce all'integrazione di un'equazione differenziale ordinaria del 2° ordine fa dunque nascere da Σ, conformemente a quanto si è asserito al n. 1, una *tripla infinità* di nuove superficie colla medesima curvatura. Per ciascuna delle nuove superficie ottenute si potrà manifestamente ripetere la medesima operazione e così via illimitatamente, dove è da osservarsi inoltre che delle nuove equazioni differenziali di 2° ordine da integrarsi è già nota una soluzione particolare, quella che corrisponde alla superficie riflettente.

È poi evidente che: *Il metodo stesso fa conoscere infinite deformate per flessione dell'ellissoide allungato e dell'iperboloide a due falde di rotazione.*

Osserverò ancora che teoremi perfettamente analoghi sussistono per le superficie pseudosferiche, dove, secondo quanto ho stabilito nella precedente Nota, varia soltanto la superficie riflettente, che può essere applicabile sopra tre distinti tipi di superficie di rotazione.

Resta per altro da esaminare se queste trasformazioni delle superficie pseudosferiche hanno relazione con quelle già prima note e quali.

3. Per dimostrare, almeno in un esempio, un' effettiva applicazione dei nuovi metodi, parto della semplice soluzione $\theta = 0$ della equazione fondamentale (a). Allora il sistema (A) diventa:

$$
(\mathrm{B}) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathrm{T}^2}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v}\right)^2 = c\mathrm{T}^2 - (c+1) \\
&\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{\mathrm{T}} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v}.
\end{aligned}
\right.
$$

Dalla seconda integrata si ha

$$\mathrm{T} = \mathrm{UV},$$

essendo U , V rispettivamente funzioni di u , v. Sostituendo questo valore nella prima, si ha

$$\frac{\mathrm{U}'^2}{\mathrm{U}^2} + \mathrm{U}^2(\mathrm{V}'^2 - c\mathrm{V}^2) + (c+1) = 0;$$

questa si scinde nelle due

$$
(\mathrm{C}) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{V}'^2 - c\mathrm{V}^2 = b \\
&\frac{\mathrm{U}'^2}{\mathrm{U}^2} + b\mathrm{U}^2 + c + 1 = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

dove b è una nuova costante. Si osservi che $\mathrm{T} = \mathrm{UV}$ non si altera moltiplicando U per un fattore costante e dividendo V pel medesimo fattore, onde si vede che, senza alterare la generalità, si può moltiplicare b per un fattore quadrato qualsiasi. Così il numero delle costanti arbitrarie, che entrano nell' integrale generale T del sistema (B), è effettivamente di 3, conformemente alle osservazioni generali. Di più, nel caso particolare che stiamo ora esaminando, avviene che le due nuove costanti c' , c'' , additive in u , v rispettivamente, non hanno alcuna influenza sulla forma della superficie, il cangiare dei loro valori equivalendo soltanto a movimenti della superficie. Per integrare il sistema (C) si distingua secondo che c è negativa o positiva. Nel primo caso pongasi

$$(\alpha) \qquad c = -\frac{1}{a^2}\,(a < 1), \quad b = \frac{1}{a^2}$$

e nel secondo

$$(\beta) \qquad c = \frac{1}{a^2} \quad b = -\frac{1}{a^2}$$

e si troverà rispettivamente [1]

[1] Per quanto si è detto al num. precedente, si escludono i casi in cui U o V siano costanti.

$$(\alpha^*)\qquad U=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\cosh\left(\dfrac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)},\quad V=\operatorname{sen}\left(\frac{v}{u}\right)$$

$$(\beta^*)\qquad U=\frac{\sqrt{a^2+1}}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{u\sqrt{a^2-1}}{a}\right)},\quad V=\cosh\left(\frac{v}{u}\right).$$

Partendo dal corrispondente valore di $T=UV$ e cangiando semplicemente i parametri u, v si ottengono come superficie riflettenti le due date dalle formole seguenti:

$$(\alpha')\quad \bar{x}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\cosh u}\cos\left(\frac{au}{\sqrt{1-a^2}}\right)\operatorname{sen}v,\ \bar{y}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\cosh u}\operatorname{sen}\left(\frac{au}{\sqrt{1-a^2}}\right)\operatorname{sen}v,\ \bar{z}=av$$

$$(\beta')\quad \bar{x}=\frac{\sqrt{a^2+1}}{\operatorname{sen}u}\cos\left(\frac{au}{\sqrt{1+a^2}}\right)\cosh v,\ \bar{y}=\frac{\sqrt{a^2+1}}{\operatorname{sen}u}\operatorname{sen}\left(\frac{au}{\sqrt{a^2+1}}\right)\cosh v,\ \bar{z}=av.$$

La prima di esse è applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione di semiasse maggiore $=1$ e di semiasse minore $=a$; la seconda sull'iperboloide di rotazione a due falde di semiasse trasverso $=1$ e di semiasse coniugato $=a$ [1].

Per le superficie a curvatura costante positiva $=+1$, normali ai raggi riflessi, si trovano poi nel primo caso le formole seguenti.

$$\begin{cases} x'=\dfrac{2a\sqrt{1-a^2}\operatorname{sen}v}{\cosh^2u-(1-a^2)\operatorname{sen}^2v}\left\{a\cosh u\cos\left(\dfrac{au}{\sqrt{1-a^2}}\right)-\sqrt{1-a^2}\operatorname{senh}u\operatorname{sen}\left(\dfrac{au}{\sqrt{1-a^2}}\right)\right\}\\ y'=\dfrac{2a\sqrt{1-a^2}\operatorname{sen}v}{\cosh^2u-(1-a^2)\operatorname{sen}^2v}\left\{a\cosh u\cos\left(\dfrac{au}{\sqrt{1-a^2}}\right)-\sqrt{1-a^2}\operatorname{senh}u\cos\left(\dfrac{au}{\sqrt{1-a^2}}\right)\right\}\\ z'=av-\dfrac{2a(1-a^2)\operatorname{sen}v\cos v}{\cosh^2u-(1-a^2)\operatorname{sen}^2v}, \end{cases}$$

e nel secondo caso le altre

$$\begin{cases} x'=\dfrac{2a\sqrt{a^2+1}\cosh v}{(a^2+1)\cosh^2v-\operatorname{sen}^2u}\left\{a\operatorname{sen}u\cos\left(\dfrac{au}{\sqrt{a^2+1}}\right)-\sqrt{a^2+1}\cos u\operatorname{sen}\left(\dfrac{au}{\sqrt{a^2+1}}\right)\right\}\\ y'=\dfrac{2a\sqrt{a^2+1}\cosh v}{(a^2+1)\cosh^2v-\operatorname{sen}^2u}\left\{a\operatorname{sen}u\operatorname{sen}\left(\dfrac{au}{\sqrt{a^2+1}}\right)-\sqrt{a^2+1}\cos u\cos\left(\dfrac{au}{\sqrt{a^2+1}}\right)\right\}\\ z'=av-\dfrac{2a(a^2+1)\operatorname{senh}v\cosh v}{(a^2+1)\cosh^2v-\operatorname{sen}^2v}. \end{cases}$$

[1] In coordinate cilindriche r, θ, z le equazioni di queste due superficie hanno la forma semplice

$$r\cosh\left(\frac{\theta\sqrt{1-a^2}}{a}\right)=\sqrt{1-a^2}\operatorname{sen}\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$r\operatorname{sen}\left(\frac{\theta\sqrt{a^2+1}}{a}\right)=\sqrt{a^2+1}\operatorname{senh}\left(\frac{z}{a}\right).$$

Ambedue le volte le superficie corrispondenti, applicabili sulla sfera di raggio $=1$, hanno le linee di curvatura $u=\text{cost}^{\text{te}}$ situate su piani per l'asse z e perciò le linee di curvatura dell'altro sistema sono sopra sfere col centro sul medesimo asse, ortogonali alla superficie. Esse appartengono alla classe di superficie di Enneper e precisamente a quel caso limite la cui esistenza, sfuggita ad Enneper, fu avvertita da Kuen [1]. Aggiungiamo l'osservazione che se nelle ultime formole si suppone la costante $\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ commensurabile: *Le linee di curvatura sferiche delle corrispondenti superficie a curvatura costante* $k=+1$ *sono curve algebriche razionali.*

Matematica. — *Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date.* Nota del Corrispondente S. Pincherle.

Il recente teorema pubblicato dal sig. Hadamard nel T. XXII degli Acta Mathematica e che ha così vivamente destata l'attenzione degli analisti, ha suggerito al sig. Hurwitz [1] una osservazione assai interessante. Il sig. Hadamard dimostrava che date due funzioni

$$f(x)=\sum p_n x^n\,,\quad f_1(x)=\sum q_n x^n\,,$$

la funzione definita dalla serie

$$\gamma(x)=\sum a_n b_n x^n$$

ha singolarità nei soli punti i cui affissi sono il prodotto dell'affisso di una singolarità di $f(x)$ per quello di una singolarità di $f_1(x)$ [2]; invece il sig. Hurwitz considera due funzioni $\alpha(x)$, $\varphi(x)$ definite dalle serie

$$\alpha(x)=\sum\frac{a_n}{x^{n+1}}\,,\quad \varphi(x)=\sum\frac{k_n}{x^{n+1}}$$

e dimostra che la serie

$$(1)\quad \psi(x)=\sum\left(a_n k_0+n a_{n-1}k_1+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a_{n-2}k_2+\cdots+a_0k_n\right)\frac{1}{x^{n+1}}$$

rappresenta una funzione avente singolarità nei soli punti i cui affissi sono la somma dell'affisso di una singolarità di $\alpha(x)$ con quello di una singolarità di $\varphi(x)$. Egli limita però la sua dimostrazione al caso che le singolarità di $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, fuori del punto $x=0$, siano poli del primo ordine.

(1) Sitzungsberichte der Akademie zu München, 1884, Heft II.

(2) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 6 février 1899.

(3) Ed inoltre, se $\gamma(x)$ non è uniforme, eventualmente anche nel punto $x=0$, come ha fatto osservare il sig. Borel (Bulletin de la Soc. Math. de France, T. XXVI, 1898.)

Ora, nello stesso modo che $\gamma(x)$ si ottiene da $f(x)$ ed $f_1(x)$ mediante una speciale operazione distributiva [1], così anche la funzione $\psi(x)$ è ottenuta da $\alpha(x)$, $\varphi(x)$ mediante un'operazione distributiva, dalla cui considerazione, senza che occorra ricorrere ad integrali curvilinei, è possibile di ottenere la dimostrazione del teorema del sig. Hurwitz, in un caso più generale di quello trattato dall'autore stesso nella citata Nota.

1. Sia $\alpha(x)$ una funzione uniforme, regolare nell'intorno di $x=\infty$ e nulla in questo punto, le cui singolarità siano rappresentate genericamente con u; sia

$$\alpha(x)=\sum \frac{a_n}{x^{n+1}}$$

nell'intorno di $x=\infty$. Costruisco la serie:

$$A(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \frac{\varphi^n(x)}{n!}, \tag{2}$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione analitica arbitraria e $\varphi^{(n)}(x)$ è la sua derivata n^{sima}. La serie (2) rappresenta un'operazione funzionale distributiva, e dalla sua forma si scorge subito che essa è *commutabile colla derivazione.*

2. Prendiamo come funzione $\varphi(x)$ una funzione uniforme, regolare nell'intorno di $x=\infty$, nulla in questo punto; siano v le sue singolarità; nell'intorno di $x=\infty$ si abbia

$$\varphi(x)=\sum \frac{k_n}{x^{n+1}}.$$

Si vede allora immediatamente che per valori di x abbastanza grandi in modulo, si ha

$$A(\varphi)=\psi(x)=\sum\left(a_n k_0+n a_{n-1} k_1+\frac{n(n-1)}{1.2} a_{n-2} k_2+\cdots+a_0 k_n\right)\frac{1}{x^{n+1}};$$

l'operazione (2) ci dà dunque, per tali valori di x, la funzione considerata dal sig. Hurwitz.

3. Ma, poichè l'operazione A è commutabile colla derivazione, essa sarà pure commutabile coll'operazione funzionale

$$\theta^z=D^0+zD+\frac{z^2}{1.2}D^2+\cdots$$

che ha per effetto di mutare x in $x+z$. Si avrà dunque

$$\theta^z A(\varphi)=\psi(x+z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \frac{\varphi^{(n)}(x+z)}{n!}$$

[1] Borel, loc. cit. Su questa operazione, v. una mia Nota nei Rendiconti della R. Accademia delle scienze di Bologna (adunanza del 19 febbraio 1899).

e sviluppando le derivate di $\varphi(x)$, si ottiene, per valori abbastanza grandi in modulo della variabile x:

$$\theta^z A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(z) \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} \tag{3}$$

dove si è posto

$$\alpha_n(z) = \alpha_0 z^n - n\alpha_1 z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \alpha_2 z^{n-2} - \cdots + (-1)^n \alpha_n.$$

Per $z = 0$, la (3) ricade nella (1).

Dalla (3) si ha poi, applicandola θ^{-z} e notando che $\theta^z A \theta^{-z} = A$:

$$A(\varphi) = \sum \alpha_n(z) \frac{\varphi^{(n)}(x-z)}{n!}. \tag{4}$$

4. La formula (4) dà una espressione dell'operazione (A), che avrà generalmente validità in un campo più esteso di quello della (2), potendosi in essa disporre dell'arbitraria z. Essa coincide colla (2) e colla (1) per valori di x abbastanza grandi, e quindi dà la continuazione analitica di $\psi(x)$.

5. Si tratta ora di trovare le condizioni di convergenza del secondo membro della (4); qui tornerà opportuno di fare uso della notazione, che ho spesso adoperata,

$$g_n \sim t^n,$$

per esprimere che la serie $\sum g_n x^n$ ammette come cerchio di convergenza quello di raggio t.

Se nella (4) poniamo, in luogo di $\varphi(x)$, la funzione $\frac{1}{x}$, si ottiene

$$A\left(\frac{1}{x}\right) = \sum (-1)^n \alpha_n(z) \frac{1}{(x-z)^{n+1}},$$

la quale, in forza della (1), non è altro che $\alpha(x)$. Ne risulta che, detto u_i il punto singolare di $\alpha(x)$ più lontano da z, si ha

$$\alpha_n(z) \sim |z - u_i|^n. \tag{5}$$

Inoltre, per le note condizioni di validità dello sviluppo di Taylor per le funzioni analitiche, si ha, essendo v_j quello dei punti v più prossimo ad $x - z$:

$$\frac{\varphi^{(n)}(x-z)}{n!} \sim \frac{1}{|x - z - v_j|^n}. \tag{6}$$

Dalle (5) e (6) si deduce per il secondo membro della (4) la condizione di convergenza assoluta ed uniforme espressa da

$$\left| \frac{z - u_i}{x - z - v_j} \right| < \varepsilon, \tag{7}$$

essendo ε un numero positivo e minore di uno. Da questa condizione si traggono varie conseguenze.

6. Supponiamo dapprima che $\alpha(x)$ abbia la sola singolarità isolata per $x = u$. Fatto allora $z = u$, la condizione (7) si riduce ad

$$|x - (u + v_j)| > 0$$

e la $A(\varphi)$ assume l'espressione

$$A(\varphi) = \sum \alpha_n(u) \frac{\varphi^{(n)}(x-u)}{n!} = \psi(x) . \tag{8}$$

Questa espressione dimostra che le sole singolarità di $\psi(x)$ si hanno per $x = u + v_j$ essendo v_j un punto singolare qualunque di $\varphi(x)$. Inoltre, poichè $\alpha_n(u) \sim 0$, essa dà anche la *natura* di queste singolarità. In particolare, se $\alpha(x)$ ha per $x = u$ un polo di ordine k^{mo}

$$\alpha(x) = \frac{b_1}{x-u} + \frac{b_2}{(x-u)^2} + \cdots + \frac{b_k}{(x-u)^k},$$

viene per $\psi(x)$ l'espressione:

$$\psi(x) = b_1 \varphi(x-u) + b_2 \varphi'(x-u) + \cdots + \frac{b_k}{k-1\,!} \varphi^{(k-1)}(x-u).$$

7. Supponiamo poi che $\alpha(x)$ abbia m singolarità isolate nei punti $u_1, u_2 \ldots u_m$. Si può porre allora

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) , \quad \alpha_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{in} \frac{1}{x^{n+1}} ,$$

dove $\alpha_i(x)$ è singolare come $\alpha(x)$ nel punto $x = u_i$, e regolare in ogni altro punto del piano. Posto

$$\alpha_{in}(z) = a_{i0} z^n - n a_{i1} z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_{i2} z^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_{in} ,$$

viene, poichè A è distributiva anche rispetto ad $\alpha(x)$:

$$A(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{in}(u_i) \frac{\varphi^{(n)}(x-u_i)}{n!} \tag{9}$$

che, per essere $\alpha_{in}(u_i) \sim 0$, è singolare nei soli punti $u_i + v_j$. La formula (9) dà inoltre la *natura* delle singolarità in questi punti.

8. In generale, fissato z, la curva limite del campo di convergenza dello sviluppo (4) rispetto ad x è dato da

$$|z - u_i| = |x - z - v_j| .$$

Questo limite è una circonferenza di centro $z + v_j$ e di raggio $|z - u_i|$. Essa passa dunque per il punto $x = u_i + v_j$. Variando z di pochissimo, il

nuovo limite di convergenza sarà dato da una seconda circonferenza passante per il medesimo punto. Ma siccome i limiti di convergenza sono caratterizzati in generale dall'esistenza, su di essi, di qualche singolarità della funzione $A(\varphi)$ che la serie rappresenta, così si scorge come i punti singolari siano appunto quelli della forma $u_i + v_j$.

9. È facile indicare la via per un'ampia generalizzazione. Abbiasi l'operazione distributiva $A(\varphi)$, che, applicata ad una funzione φ, dà l'espressione, valida in un'area T, di una seconda funzione ψ. Sia A permutabile colle operazioni distributive di un gruppo ad un parametro, S_z. Sarà allora

$$\psi = S_z A S_z^{-1},$$

e qui si potrà disporre del parametro z in modo che questa nuova espressione di ψ ne dia la continuazione analitica oltre all'area T. Inoltre, le condizioni di validità di quest'espressione potranno fare conoscere le singolarità di ψ, dipendentemente da quelle di φ. È questo il metodo applicato nella presente Nota per l'operazione di Hurwitz; il gruppo permutabile con A è qui θ^z la cui operazione infinitesima è D. Per l'operazione di Hadamard, il gruppo permutabile S_z è invece costituito dalla operazione che ha per effetto di sostituire xz ad x in una funzione arbitraria, e l'operazione infinitesima di questo gruppo è xD.

Chimica. — *Sulla costituzione dell'acido canforico* [1]. Nota 9ª del Corrispondente L. Balbiano.

Nella Nota intitolata nello stesso modo della presente ed inserita nei Rendiconti di quest'Accademia [2], venivo alla conclusione « che si spiegano razionalmente, senza ricorrere ad ipotetiche trasposizioni molecolari, i prodotti di smembramento dell'acido canforico, da me ottenuti nell'ossidazione a temperatura ordinaria col permanganato potassico in soluzione alcalina, solo quando si adotti per quest'acido la formula di costituzione proposta dal Bredt ». Il prodotto principale di questa ossidazione è l'acido $C_8H_{12}O_5$ di cui dimostrai la costituzione in modo sicuro, perchè, eliminate con fatti le possibilità che il quinto atomo di ossigeno fosse contenuto nella molecola sotto forma chetonica, lattonica ed ossidrilica, non rimase che la forma di ossido alchilico comprovata dal comportamento dell'acido colla p-bromofenilidrazina. Per riduzione coll'acido jodidrico ottenni dall'acido $C_8H_{12}O_5$ l'acido α-$\beta\beta$-trimetilglutarico, del quale dedussi la costituzione dal formarsi all'ossidazione acido dimetilsuccinico assimetrico e dal passaggio dell'acido $C_8H_{12}O_5$ all'acido trimetilsuccinico mediante una serie di trasformazioni semplici. Le

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica farmaceutica della R. Università di Roma.

(2) Rend. Acc. Linc., vol. VI, 2° sem., pag. 2.

deduzioni analitiche da me fatte sul concatenamento degli 8 atomi di carbonio dell'acido $C_8H_{12}O_5$, venivano confermate pienamente alcune settimane fa colla sintesi dell'acido α-$\beta\beta$-trimetilglutarico fatta dal Perkin junior (1).

Dopo la pubblicazione della mia Nota citata, i signori L. Bouveault (2) e W H. Perkin jun. (3) proposero due altre formole per l'acido canforico, basandosi pure in parte sui fatti da me scoperti nello smembramento di quest' acido ed interpretandoli in modo diverso, producendo così una modificazione più o meno radicale della formola di Bredt. Mi sia permesso in questa Nota di avvalorare le mie deduzioni, fatte in accordo colla formola del Bredt, rendendo conto di due fatti che gettano nuova luce sul meccanismo dell' ossidazione dell' acido canforico.

Fin dal 1882 Tauber (4) notava che nell' ossidazione dell' acido canforico col permanganato di potassio a caldo non si trovava fra i prodotti di ossidazione l'acido ossalico, e scriveva precisamente così: « Von oxalsauren lassen sich merkwürdiger Weise nicht einmal spuren nachweisen ». Il Bamberger (5) che tentò quest' ossidazione, pure a caldo, scrive, che nel filtrato dall' ossido di manganese non si trova altro che acido canforico inalterato, quindi secondo lui quel po' di acido canforico ossidato si è convertito in anidride carbonica. Alla stessa conclusione venne il Bruhl (6); egli scrive che nell' ossidazione a caldo non era stato possibile rintracciare altro composto eccetto che acido canforico inalterato. E pare anche che adoperando altri ossidanti, l'acido ossalico non si trovi fra i prodotti di ossidazione dell'acido canforico, perchè il Koenigs (7), avendo adoperato come ossidante il misto cromico, ottenne, oltre ad acido canforonico, acetico ed anidride carbonica, l'acido dimetilsuccinico e non parla affatto di produzione contemporanea di acido ossalico.

Il mio modo di ossidazione dell' acido canforico differenzia adunque essenzialmente nei risultati; si forma acido ossalico ed acido $C_8H_{12}O_5$ e tutti e due in quantità corrispondenti all' equazione

$$C_{10}H_{16}O_4 + 6O = C_2H_2O_4 + C_8H_{12}O_5 + H_2O .$$

Già nel 1893, al principio di questa serie di studî, determinavo le quantità rispettive di acido ossalico e di acido $C_8H_{12}O_5$ che si formano

(1) Journ. Chem. Soc. (1899, pag. 61).

(2) Bul. Soc. chim., Paris, T. 17, ser. III, pag. 990.

(3) Proc. 1896, pag. 191.

(4) *Inaug, Diss. Ueber die Einwirkung von Kaliumpermanganat auf Japancamphen.* Breslau 1882.

(5) Berl. Ber. T. 23, pag. 217.

(6) Berl. Ber. T. 24, pag. 3406.

(7) Berl. Ber. T. 26, p. 2337.

nell' ossidazione e da esperienze instituite allora deducevo, che sottoponendo all' ossidazione gr. 587 di acido canforico se ne riottennero gr. 273 inalterato e dai 314 gr. ossidati si ebbero gr. 37 di acido ossalico e gr. 78 di ac. $C_8H_{12}O_5$. Ora questi due numeri stanno appunto nel rapporto dei pesi molecolari dei due acidi, il che dimostra che per ogni molecola di ac. $C_8H_{12}O_5$ formatosi, nasce contemporaneamente una molecola di acido ossalico, cioè si verifica esattamente l' equazione soprascritta.

Per l' importanza del fatto ho ripetuto quest' estate l' esperienza ed ho ottenuto il seguente risultato:

Acido canforico sottoposto all' ossidazione . . .	gr. 50
Acido canforico realmente ossidato.	» 20
Ossalato di calcio C_2O_4Ca, H_2O ottenuto . . .	» 2,24
Sale di calcio $C_8H_{10}O_5Ca, 2H_2O$ ottenuto . . .	» 3,627

Si verificò la purezza dei due sali di calcio colla determinazione dell' acqua di cristallizzazione.

Gr. 2,24 di ossalato di calcio secco a 100° perdettero a 210° gr. 0,2765 di acqua, ossia in 100 p.

	Trovato	Calcolato per C_2O_4Ca, H_2O
H^2O	12,34	12,32

Gr. 3,627 di sale $C_8H_{10}O_5Ca, 2H_2O$ perdettero a 160° gr. 0,510 di acqua

	Trovato	Calcolato
H^2O %	14,06	13,74

Ora a gr. 3,627 di sale di calcio $C_8H_{10}O_5Ca, 2H_2O$ corrispondono teoricamente gr. 2,02 di C_2O_4Ca, H_2O, mentre il trovato è gr. 2,24.

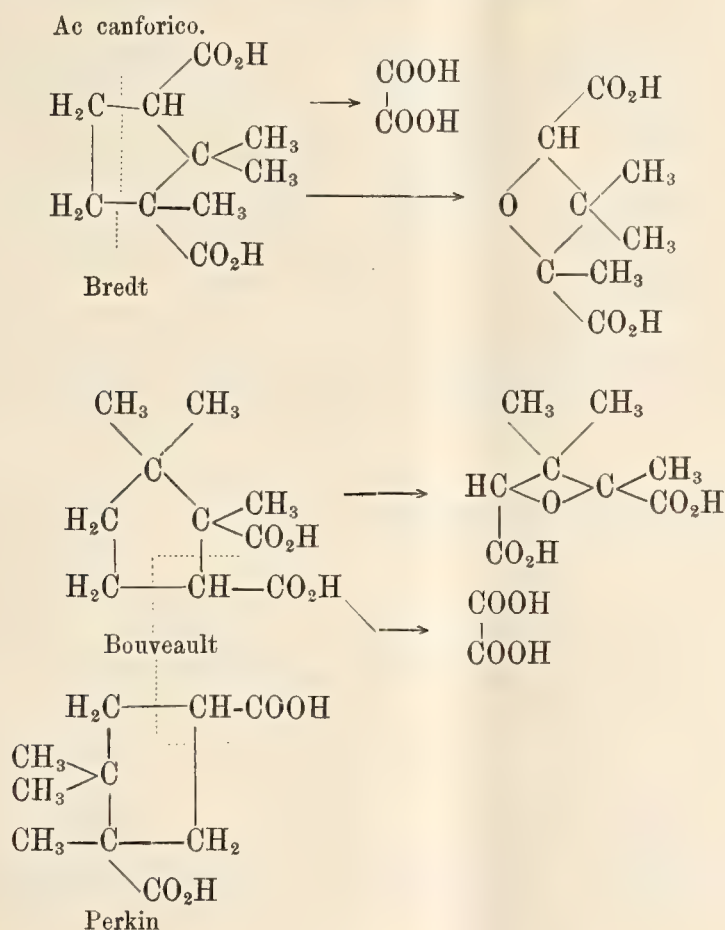
Il dosamento dei due sali si fa nel modo seguente. Le acque alcaline provenienti dalla filtrazione e dal lavaggio dell' ossido di manganese si concentrano a piccolo volume; si decompongono con acido cloridrico in leggero eccesso e si lasciano in riposo per separare la maggior parte dell' acido canforico inalterato, che si deposita cristallizzato. Il filtrato acquoso viene estratto tre volte con 5 volumi di etere. La parte acquosa si satura con ammoniaca, filtrata se è il caso, indi di nuovo acidificata con acido acetico e precipitato l' ossalato con soluzione al 30 % di cloruro di calcio. A questo ossalato si aggiunge la piccola quantità che è passata in soluzione nell' etere. Perciò il residuo sciropposo acido rimasto alla distillazione dell' etere viene neutralizzato esattamente con idrato potassico, indi addizionato di alcune goccie di soluzione al 30 % di cloruro di calcio, ed il piccolo precipitato formatosi si raccoglie sopra un filtro e si lava tre a quattro volte con poca acqua calda, indi si scioglie in acido cloridrico e la soluzione si neutralizza con ammoniaca, poi si acidifica con acido acetico e si precipita con cloruro di

calcio. La soluzione primitiva colle acque di lavaggio si addiziona di un leggero eccesso di cloruro di calcio e si riscalda; dopo 24 ore si raccoglie cristallizzato il sale $C_8H_{10}O_5Ca$, $2H_2O$, che si depura per cristallizzazione dall'acqua bollente oppure ridisciogliendolo in acido acetico e saturando di nuovo colla quantità richiesta di carbonato sodico. Questo sale è tanto poco solubile nell'acqua fredda e l'acido libero viene estratto in modo così completo dalla soluzione acquosa coll'etere, che le perdite sono insignificanti.

La formazione contemporanea equimolecolare di acido ossalico e di ac. $C_8H_{12}O_5$ si spiega facilmente ammettendo la formola di costituzione dell'acido canforico data dal Bredt, e fino ad un certo punto anche con quella proposta dal Bouveault, ma non è spiegabile con quella suggerita nel 1896 [1] ed adottata esclusivamente in un lavoro recente dal Perkin junior [2] come appare evidente dai seguenti schemi:

```
Ac canforico.
          /CO2H
H2C—CH               →  COOH
 |    \  /CH3           |
 |     C<               COOH         /CO2H
 |    /  \CH3                      CH
H2C—C—CH3            ————→        /  \   /CH3
     \CO2H                        O    C<
Bredt                              \  /  \CH3
                                    C—CH3
                                     \CO2H

   CH3  CH3                        CH3  CH3
     \  /                            \  /
      C                               C      /CH3
    /   \   /CH3      ———→       HC<   >C<
 H2C     C<                        | O      \CO2H
  |      |  \CO2H                 CO2H
 H2C————CH—CO2H                   COOH
                  \———→            |
 Bouveault                        COOH

 H2C————CH-COOH
  |      |
CH3>C    |
CH3 |    |
CH3—C————CH2
     \CO2H
 Perkin
```

I punti di apertura del nucleo pentametilenico dello schema del Perkin, per produrre acido ossalico, sono quelli segnati ed allora non si spiega la formazione contemporanea dell'acido $C_8H_{12}O_5$.

(1) Proc. 1896, pag. 191.
(2) Chem. Soc. Trans. 1898, pag. 796.

Il punto debole dell' argomentazione del Bouveault sta nell' affermare, senza avere prove sperimentali, che la formazione dell' acido $C_8H_{12}O_5$ debba essere preceduta da quella dell' acido α-$\beta\beta$-trimetilglutarico, il quale ossidandosi genererebbe il primo.

Ho voluto provare se il supposto del Bouveault potesse essere confermato dall' esperienza, non avendo mai trovato l' acido trimetilglutarico fra i prodotti di ossidazione dell' acido canforico.

Gr. 6,3 di acido trimetilglutarico vennero saturati esattamente con carbonato sodico, la soluzione diluita a 630 cm^3, addizionata di gr. 8 di permanganato potassico (quantità corrispondente a 2 atomi di ossigeno) e resa alcalina con 5 cm^3 di soluzione d' idrato potassico al 50 $^0/_0$. La miscela si mise a reagire alla temperatura dell' ambiente il 20 luglio; il 20 ottobre il liquido era colorato come in principio e si notava solo un leggerissimo deposito di ossidi di manganese. Si riscaldò la massa per 5 ore a bagno maria in piena ebollizione ed il liquido rimase fortemente colorato. Si scolorò con anidride solforosa, si concentrò e, dopo averlo acidificato con acido solforico, si estrasse ripetutamente con etere. L' acido estratto si rapprese in una massa cristallina e pesava gr. 6. Si neutralizzò con idrato sodico e si aggiunse alla soluzione un leggero eccesso di soluzione di cloruro di calcio al 30 $^0/_0$. Col riscaldamento si depositò la maggior parte del sale di calcio cristallino, che dette all' analisi il seguente risultato:

Gr. 0,3869 di sale secco all' aria perdettero a 160° gr. 0,069 di acqua e lasciarono alla calcinazione gr. 0,0847 di CaO.

In 100 p.

	Trovato	Calc. per $C_8H_{12}O_4Ca$, $2^1/_2\, H_2O$
H_2O	17,83	17,50
Ca	19,03	18,86

La concentrazione delle acque madri mi dette un' altra piccola quantità di sale che all' analisi dette:

H_2O $^0/_0$ 14,9 Ca $^0/_0$ 19,7

Questa porzione di sale conteneva con molta probabilità un po' di dimetilsuccinato di calcio, la cui composizione centesimale calcolata per la formola $C_6H_8O_4Ca$, H_2O sarebbe:

H_2O $^0/_0$ 8,9 Ca $^0/_0$ 21,73

L' acido estratto dalla prima porzione di sale di calcio cristallizza dall' acqua in piccoli prismetti aggruppati, fonde a 88-89° ed ha tutti i caratteri dell' acido α-$\beta\beta$-trimetilglutarico.

La supposizione del Bouveault non ha quindi nessuna base sperimentale.

Nella Nota succitata scriveva « che uno degli argomenti di base per adottare per l'acido canforico la formola di Bredt, era l'inattività ottica dell'acido $C_8 H_{12} O_5$, inattività dovuta alla formazione contemporanea dei due antipodi, effettuandosi l'azione dell'ossigeno su tutti e due gli atomi di carbonio assimetrici dell'acido canforico e rimanendo tali atomi nella molecola del nuovo composto. Infatti l'esperienza ci insegna che quando entra in reazione uno solo dei carboni assimetrici dell'acido canforico, il prodotto che si genera ha ancora potere rotatorio. Cito ad esempio la formazione dell'acido canforonico, che secondo le misure di Aschan [1] ha per potere rotatorio specifico $[\alpha]_J = -26°,9$.

Era quindi importante per il mio asserto la dimostrazione sperimentale che l'acido $C_8 H_{12} O_5$ è un racemo.

Ho tentato dapprima di ottenere un antipodo collo sviluppo del *Penicillium glaucum*, ma inutilmente, perchè questa muffa non si sviluppa bene, tanto in soluzioni al 4 o 5 %, come in soluzioni al 2-3 ‰. Ho cercato perciò di sdoppiarlo coi sali degli alcaloidi, e sono riuscito ad avere un acido destrogiro ed un'altro sinistrogiro, benchè non completamente libero del destrogiro, mediante il sale di chinina.

Gr. 34,8 di acido $C_8 H_{12} O_5$ si sciolsero in 25 cm^3 di acqua calda e la soluzione si saturò con 70 gr. di chinina sciolta in 225 gr. di alcool a 99 % ed il tutto, per avere una soluzione completa a caldo, si addizionò di 50 cm^3 di acqua. Col raffreddamento si ottenne una massa cristallina bianca formata da piccoli prismetti aggruppati. La quantità di cristalli depositatisi pesava, seccata nella stufa ad acqua, gr. 66. Fonde decomponendosi a 202-204°.

Questi cristalli si ricristallizzarono 8 volte dall'alcool a 80 % bollente fino ad averne gr. 45. Da gr. 34,8 di acido si devono ottenere gr. 95 di sale di chinina. Il punto di fusione dell'ultima porzione si era un po' elevato; fondeva a 205-206° con decomposizione.

L'analisi dette il seguente risultato:

	Trovato	Calc. per $C_8H_{12}O_5$, $C_{20}H_{24}N_2O_2$
C	65,66	65,62
H_2	6,95	7,03
N	5,26	5,44

Si decompose il sale di chinina con un leggero eccesso di idrato potassico e dalla soluzione del sale potassico, filtrata dalla chinina, decomposta con acido cloridrico in leggero eccesso, si ebbe per estrazione con etere l'acido $C_8 H_{12} O_5$ libero.

[1] Berl. Ber. T. 28, pag. 16.

L' analisi di quest' acido dette il seguente risultato :

	Trovato	Calcolato per $C_8H_{12}O_5$
C	50,78	51,06
H	6,36	6,38

Quest' acido è destrogiro. Infatti la soluzione acquosa al 13,116 °/₀ in tubo lungo 50 cm. devia a destra di 3°,6 e quindi

$$[\alpha]_D = + 5°,48'.$$

Le prime acque madri alcooliche si distillarono a metà volume, e dopo un riposo di due settimane alla temperatura dell' ambiente non si depositò più sostanza cristallina. Si decompose la soluzione con idrato potassico in leggero eccesso, si eliminò l' alcool a bagno maria ed il residuo si lavò con acqua. La soluzione acquosa concentrata e decomposta con acido cloridrico in eccesso ed estratta con etere, dette l' acido $C_8 H_{12} O_5$ libero, che essendo un po' colorato, si depurò convertendolo nel sale di calcio e rimettendolo in libertà da questo coll' acido cloridrico. Non si riuscì ad averlo perfettamente scolorito; la soluzione era leggermente colorata in giallognolo.

L' analisi di quest' acido dette il seguente risultato:

	Trovato	Calcolato per $C_8H_{12}O_5$
C	50,80	51,06
H	6,34	6,38

Quest' acido è sinistrogiro. Infatti la soluzione acquosa all' 11,9334 °/₀ in tubo lungo 50 cm. devia a sinistra di 2° e quindi

$$[\alpha]_D = - 3°,35 .$$

La quantità scarsa del materiale, molto costoso e di difficile preparazione, m' impedì di operare un' ulteriore depurazione per avere l' antipodo sinistrogiro deviante dello stesso angolo del destrogiro.

Il punto di fusione dei due acidi è pressapoco lo stesso. La determinazione fatta comparativamente con termometro di Auschutz, dette :

per l' acido destrogiro . . . . 119°
per l' acido sinistrogiro . . . . 117-119°.

L' acido destrogiro cristallizza più facilmente dell' acido sinistrogiro, poichè quest' ultimo si conserva sciropposo per parecchi giorni ed alla fine si rappiglia in massa cristallina.

Dalle esperienze descritte risulta evidente che la formola di costituzione dell' acido canforico proposta dal Bredt è la sola che spieghi i fatti suesposti,

cioè la formazione contemporanea di quantità equimolecolari di acido ossalico e di ac. $C_8 H_{12} O_5$, e nello stesso tempo stabilisce che l'inattività ottica dell'acido $C_8 H_{12} O_5$ è dovuta alla formazione contemporanea dei due antipodi.

Matematica. — *Sulle congruenze di curve.* — Nota di T. LEVI-CIVITA, presentata dal Socio BELTRAMI.

Data nello spazio ordinario una congruenza [C] di curve c, fissiamo ad arbitrio un punto P (nell'intorno del quale la congruenza si comporti in modo regolare) e diciamo t_P la tangente, π_P il piano normale a c nel punto P.

Le tangenti t alle curve c, spiccate dai punti di π_P, costituiscono una congruenza rettilinea [T_P], ed è ben chiaro che la natura di essa dipende esclusivamente dalla natura della congruenza fondamentale [C].

In particolare gli elementi metrici di prim'ordine (ascisse dei punti limiti, distanza focale, angolo dei piani focali, ecc.), che competono al raggio t_P, in quanto appartiene a [T_P], si possono esprimere per mezzo dei coseni direttori della congruenza [C], relativi al punto P, e loro derivate prime.

L'impiego dei simboli di Ricci permette di attribuire a queste espressioni una forma assai semplice, da cui discendono alcune facili conseguenze.

Si ha in primo luogo che una congruenza [C] è o no normale assieme a [T_P], o più esattamente, che, in un generico punto P, la condizione di normalità per la congruenza [C] equivale alla condizione di normalità della congruenza rettilinea [T_P], e si può quindi enunciare dicendo che devono essere perpendicolari i piani focali, relativi al raggio t_P.

Ma più notevole è il caso, in cui sopra t_P coincidono i punti limiti.

Con naturale estensione dell'appellativo, usato per le congruenze rettilinee, diremo *isotrópe* le congruenze [C], per cui si presenta questa circostanza. Esse godono di due proprietà interessanti, che non credo siano state osservate, nemmeno per le congruenze rettilinee.

La prima proprietà si deduce immediatamente dalla definizione di isotropia, in base a un teorema del prof. Ricci, e consiste in ciò che ogni congruenza isotrópa [C] si può in infiniti modi risguardare come risultante dalle intersezioni di due famiglie ortogonali di superficie. In altri termini, la equazione lineare ed omogenea del prim'ordine, che ha per caratteristiche le curve c, possiede infinite coppie di integrali fra loro ortogonali.

La seconda proprietà è che le rette cicliche, passanti per i vari punti P, e appartenenti ai rispettivi piani π_P, costituiscono due congruenze coniugate (anzichè due complessi, come avverrebbe in generale). Ciò è quanto dire che *ogni congruenza isotrópa* (reale) *è ortogonale a due congruenze rettilinee coniugate, costituite da rette cicliche, e reciprocamente.*

Di quà segue tosto la costruzione di tutte le congruenze isotrópe, e in pari tempo la espressione generale pei coefficienti A, B (supposti reali) delle equazioni $\frac{\partial u}{\partial z} = A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y}$, che ammettono infinite coppie di integrali fra loro ortogonali.

1. Alla cogruenza data [C] associamone due altre [1] e [2], che costituiscano con essa una terna ortogonale. Per individuarla, ci varremo dei simboli ben noti del prof. Ricci ([1]). Si designerà la [C] con [3] e in generale con $\lambda_{h/r}$, $(r = 1, 2, 3)$ il sistema coordinato covariante della congruenza $[h]$, $(h = 1, 2, 3)$.

Lo spazio si intenderà riferito ad un sistema di coordinate curvilinee x_1, x_2, x_3, che ci riserviamo di far coincidere, quando giovi, colle ordinarie coordinate cartesiane ortogonali. Il supporle tali a priori non recherebbe alcuna maggiore semplificazione.

Sieno x_1, x_2, x_3 le coordinate di P, $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, $x_3 + dx_3$ quelle di un generico punto Q, vicino a P in π_P.

Detto ds il segmento elementare PQ, $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi$ gli angoli che esso forma colle direzioni positive delle linee 1, 2, passanti per P, $\lambda_{3/r} + \mu_r ds$ i valori delle $\lambda_{3/r}$ in Q, avremo, colle notazioni del calcolo differenziale assoluto:

$$\left.\begin{aligned} dx_r &= ds(\cos\varphi\lambda_1^{(r)} + \operatorname{sen}\varphi\lambda_2^{(r)}) = ds\sum_1^2{}_h \cos\varphi_h\,\lambda_h^{(r)}\,, \\ \mu_r &= \sum_1^3{}_q \lambda_{3/rq}\frac{dx_q}{ds} = \sum_1^3{}_q \lambda_{3/rq}\sum_1^2{}_h \cos\varphi_h\,\lambda_h^{(q)}\,. \end{aligned}\right\} \quad (r = 1, 2, 3)$$

(Per convincersene, basta notare che queste formule hanno carattere invariantivo e sussistono evidentemente in coordinate cartesiane ortogonali).

Introducendo gli invarianti γ, definiti dalla formula generale:

$$\gamma_{ljk} = \sum_1^3{}_{rs} \lambda_{l/rs}\,\lambda_j^{(r)}\,\lambda_k^{(s)}\,, \quad (l, j, k = 1, 2, 3)\,,$$

si ha:

$$\sum_1^3{}_q \lambda_{3/rq}\,\lambda_h^{(q)} = \sum_1^3{}_i \gamma_{3ih}\,\lambda_{i/r}\,,$$

e quindi, ricordando che $\gamma_{33h} = 0$, l'espressione delle μ_r diviene:

$$\mu_r = \sum_1^2{}_{ih} \lambda_{i/r}\,\gamma_{3ih}\cos\varphi_h\,, \quad (r = 1, 2, 3)\,, \tag{1}$$

([1]) Cfr. principalmente: *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*, nelle Memorie di questa Accademia, 1896.

donde:

$$\mu^{(r)} = \sum_{1}^{2}{}_{ih} \lambda_i^{(r)} \gamma_{3ih} \cos\varphi_h ,$$

$$(2) \quad \frac{1}{\varrho^2} = \sum_{1}^{3}{}_r \mu_r \mu^{(r)} = \sum_{1}^{2}{}_{ihjk} \gamma_{3ih} \gamma_{3jk} \cos\varphi_h \cos\varphi_k \sum_{1}^{3}{}_r \lambda_{i/r} \lambda_j^{(r)} =$$

$$\sum_{1}^{2}{}_{ihk} \gamma_{3ih}\gamma_{3.k} \cos\varphi_h \cos\varphi_k = (\gamma_{311}^2 + \gamma_{321}^2)\cos^2\varphi + 2(\gamma_{311}\gamma_{312} + \gamma_{321}\gamma_{322})\cos\varphi\,\mathrm{sen}\varphi + (\gamma_{312}^2 + \gamma_{322}^2)\,\mathrm{sen}^2\varphi .$$

Abbiamo designato $\sum_{1}^{3}{}_r \mu_r\mu^{(r)}$ con $\frac{1}{\varrho^2}$, supponendo implicitamente $\sum_{1}^{3}{}_r\mu_r\mu^{(r)}$ diverso da zero. L'ipotesi opposta equivale a $\mu_r = 0$, $(r = 1, 2, 3)$. La congruenza $[T_P]$ si comporta allora, rispetto a t_P, come se fosse costituita da rette parallele; e non c'è nulla da aggiungere. Ecco perchè si può escludere a priori che $\sum_{1}^{3}{}_r \mu_r \mu^{(r)}$ si annulli.

In coordinate cartesiane, le $\lambda_{3/r}$ (o $\lambda_3^{(r)}$) sono i coseni direttori di t_P e le $\lambda_{3/r} + \mu_r ds$ (o $\lambda_3^{(r)} + \mu^{(r)} ds$) quelli di t_Q (la direzione positiva sopra le t corrispondendo a quella delle curve c). Diciamo ancora ν_r (o $\nu^{(r)}$) i coseni direttori della minima distanza dp fra t_P e t_Q; ψ l'angolo fra la direzione positiva di dp e quella della linea 1, relativa al punto P; α l'ascissa del piede di dp sopra t_P, contata a partire da P.

Colla solita convenzione di risguardare equivalenti gli indici, congrui fra loro rispetto al modulo 3, e notando che $\sum_{1}^{3}{}_r \lambda_{3/r} \mu^{(r)} = 0$, $\sqrt{a} = 1$ (a è il discriminante della forma fondamentale) potremo scrivere:

$$(3) \qquad \nu^{(r)} = \varrho \frac{\lambda_{3/r+1}\, \mu_{r+2} - \lambda_{3/r+2}\, \mu_{r+1}}{\sqrt{a}} , \quad (r = 1, 2, 3),$$

e [1]

$$(4) \qquad dp\nu^{(r)} = ds \{ \cos\varphi\, \lambda_1^{(r)} + \mathrm{sen}\,\varphi\, \lambda_2^{(r)} + \alpha\mu^{(r)} \} , \quad (r = 1, 2, 3),$$

le quali formule seguitano a sussistere in coordinate generali, purchè si risguardino anche le $\nu^{(r)}$ come elementi di un sistema contravariante.

Con facile trasformazione si trova:

$$(3') \quad \nu^{(r)} = \varrho\cos\varphi \{\gamma_{311}\lambda_2^{(r)} - \gamma_{321}\lambda_1^{(r)}\} + \varrho\,\mathrm{sen}\varphi \{\gamma_{312}\lambda_1^{(r)} - \gamma_{322}\lambda_2^{(r)}\} , \quad (r=1,2,3),$$

e da queste, moltiplicando successivamente per $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$ e sommando ciascuna volta rispetto ad r, ove si tenga conto che $\sum_{1}^{3}{}_r \nu^{(r)} \lambda_{1/r} = \cos\psi$, $\sum_{1}^{3}{}_r \nu^{(r)} \lambda_{2/r} = \mathrm{sen}\,\psi$:

$$(5) \qquad \begin{cases} \cos\psi = -\varrho \{ \gamma_{321} \cos\varphi + \gamma_{322}\, \mathrm{sen}\,\varphi \} \\ \mathrm{sen}\,\psi = \varrho \{ \gamma_{311} \cos\varphi + \gamma_{312}\, \mathrm{sen}\,\varphi \} . \end{cases}$$

[1] Cfr. per es. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, pag. 247.

Poniamo:

$$\Delta = \gamma_{311}\,\gamma_{322} - \gamma_{312}\,\gamma_{321} \tag{6}$$

ed osserviamo che Δ^2 è il discriminante di

$$\frac{1}{\varrho^2} = (\gamma^2_{311}+\gamma^2_{321})\cos^2\varphi + 2(\gamma_{311}\gamma_{312}+\gamma_{321}\gamma_{322})\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi + (\gamma^2_{312}+\gamma^2_{322})\,\mathrm{sen}^2\varphi$$

e non può quindi annullarsi. Ne viene che le (5) sono certamente risolubili rispetto a $\varrho\cos\varphi$, $\varrho\,\mathrm{sen}\,\varphi$ e la effettiva risoluzione porge:

$$(5') \quad \begin{cases} \varrho\cos\varphi = \dfrac{1}{\Delta}\{\gamma_{312}\cos\psi + \gamma_{322}\,\mathrm{sen}\,\psi\} \\[2ex] \varrho\,\mathrm{sen}\,\varphi = -\dfrac{1}{\Delta}\{\gamma_{311}\cos\psi + \gamma_{321}\,\mathrm{sen}\,\psi\}\,. \end{cases}$$

In causa delle (3), $\sum_1^3{}_r\, \nu^{(r)}\,\mu_r = 0$, e perciò, se si moltiplicano le (4) per μ_r e si somma, avendo riguardo alle (1), (2) e (5), risulta:

$$\alpha = \varrho\,\mathrm{sen}(\varphi - \psi)\,. \tag{7}$$

A mezzo delle (5′), si può esprimere tutto per ψ e si ha, fra l'anomalìa ψ della minima distanza e la ascissa α del suo piede, la relazione:

$$\alpha = -\frac{1}{\Delta}\{\gamma_{311}\cos^2\psi + (\gamma_{312}+\gamma_{321})\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\psi + \gamma_{322}\,\mathrm{sen}^2\psi\}\,,$$

cui, posto:

$$(8) \quad \begin{cases} \gamma_{311} - \gamma_{322} = \delta\cos\vartheta \\ \gamma_{312} + \gamma_{321} = \delta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,, \end{cases}$$

si attribuisce la forma:

$$\alpha = -\frac{\gamma_{311}+\gamma_{322}}{2\Delta} - \frac{\delta}{2\Delta}\cos(2\psi+\vartheta)\,. \tag{9}$$

Di quà apparisce che i valori di α rimangono necessariamente compresi fra:

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{\gamma_{311}+\gamma_{322}}{2\Delta} - \dfrac{\delta}{2\Delta} \\[2ex] \alpha_2 = -\dfrac{\gamma_{311}+\gamma_{322}}{2\Delta} + \dfrac{\delta}{2\Delta}\,, \end{cases}$$

talchè α_1 e α_2 sono le ascisse dei punti limiti. I corrispondenti valori ψ_1 e ψ_2 di ψ (anomalìe dei piani principali) sono determinati, per δ diverso da zero, dalle equazioni:

$$2\psi_1 + \vartheta = \pi\,,$$
$$2\psi_2 + \vartheta = 0\,,$$

e differiscono quindi tra loro di un angolo retto.

Se si suppone che le linee 1 e 2 abbiano in ogni punto P le direzioni dei piani principali, ϑ è nullo e le (8) divengono:

$$(8') \qquad \begin{cases} \gamma_{311} - \gamma_{322} = \delta \\ \gamma_{312} + \gamma_{321} = 0\,, \end{cases}$$

ossia [1] *le dette linee costituiscono il sistema canonico ortogonale rispetto alla congruenza* [3], *e δ è la differenza fra le due radici della equazione caratteristica della congruenza.*

Se t_Q incontra t_P, dovrà essere evidentemente (avuto riguardo al modo, con cui rimane fissata dalle (3) la direzione positiva sopra la normale) $\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$, e, per individuare ψ, si hanno dalle (5), le equazioni:

$$\cos\psi = \varrho \{ -\gamma_{322}\cos\psi + \gamma_{321}\,\mathrm{sen}\,\psi \}$$
$$\mathrm{sen}\,\psi = \varrho \{ \gamma_{312}\cos\psi - \gamma_{311}\,\mathrm{sen}\,\psi \}\,,$$

ovvero, eliminando ϱ, la:

$$(11) \qquad \gamma_{321}\,\mathrm{tg}^2\psi + (\gamma_{311} - \gamma_{322})\,\mathrm{tg}\,\psi - \gamma_{312} = 0.$$

Se invece si elimina ψ, si ottiene:

$$(12) \qquad \Delta\varrho^2 + (\gamma_{311} + \gamma_{322})\varrho + 1 = 0\,,$$

la quale equazione, risultando dalla (7) $\alpha = \varrho$, ha per radici le ascisse ϱ_1, ϱ_2 dei fuochi.

Dalle (10) e (12) si trae:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{\gamma_{311} + \gamma_{322}}{\Delta}\,,$$

cioè i punti limiti e i fuochi hanno il medesimo punto di mezzo, ecc.

2. La condizione necessaria e sufficiente affinchè la nostra congruenza [3] sia normale, è data, come si sa, da $\gamma_{312} - \gamma_{321} = 0$, la quale, a tenore delle (11), (12) e (10), esprime che i piani focali sono ortogonali fra loro, od anche che i fuochi cadono nei punti limiti.

Se $\delta = 0$, i punti limiti coincidono e (semprechè ciò avvenga per ogni punto P del campo, che si considera) la congruenza [3] è a dirsi isotròpa.

La condizione di isotropia equivale a:

$$(8'') \qquad \begin{cases} \gamma_{311} - \gamma_{322} = 0 \\ \gamma_{312} + \gamma_{321} = 0\,, \end{cases}$$

donde risulta [2] che la equazione caratteristica di [3] ha le radici eguali e

[1] Ricci, Mem. cit, pag. 31.

[2] Ricci, ibidem, e pag. 44.

quindi che, ad ogni integrale della equazione $\sum_1^3{}_r \lambda_3^{(r)} \frac{\partial u}{\partial x_r} = 0$, ne corrisponde un secondo ortogonale.

3. Affinchè una generica congruenza:

$$(13) \qquad \frac{dx_1}{X^{(1)}} = \frac{dx_2}{X^{(2)}} = \frac{dx_3}{X^{(3)}}$$

consti di linee rette, è necessario e basta che le $\sum_1^3{}_s X_{rs} X^{(s)}$ riescano proporzionali alle X_r, si abbia cioè, designando M un moltiplicatore arbitrario [1]:

$$(14) \qquad \sum_1^3{}_s X_{rs} X^{(s)} = MX_r, \quad (r = 1, 2, 3).$$

Ciò posto, io dico che, se [3] è una congruenza isotropa, e si suppone:

$$(15) \qquad X_r = \lambda_{1/r} \pm i\lambda_{2/r}, \quad (i = \sqrt{-1}, r = 1, 2, 3),$$

le (14) sono soddisfatte.

Si ha infatti:

$$(16) \qquad \sum_1^3{}_s X_{rs} X^{(s)} = \sum_1^3{}_s (\lambda_{1/rs} \pm i\lambda_{2/rs})(\lambda_1^{(s)} \pm i\lambda_2^{(s)}) =$$

$$\sum_1^3{}_{hk}(\gamma_{1hk} \pm i\gamma_{2hk})\lambda_{h/r} \sum_1^3{}_s (\lambda_1^{(s)} \pm i\lambda_2^{(s)})\lambda_{k/s} = \sum_1^3{}_h \{(\gamma_{1h1} - \gamma_{2h2}) \pm i(\gamma_{2h1} + \gamma_{1h2})\} \lambda_{h/r},$$

e, siccome, in virtù delle (8″), il coefficiente di $\lambda_{3/r}$ si annulla, così segue tosto:

$$\sum_1^3{}_r X_{rs} X^{(s)} = (\gamma_{122} + i\gamma_{211}) X_r, \quad (r = 1, 2, 3),$$

giusta l'asserto.

Se dunque nelle (13) si intendono attribuiti alle X i valori (15), si hanno due congruenze rettilinee immaginarie coniugate ed è ben chiaro che, per ogni punto P, i raggi corrispondenti delle due congruenze sono le rette cicliche situate in π_P.

Reciprocamente, data ad arbitrio una coppia di congruenze coniugate, costituite da rette cicliche, la congruenza [3], che rimane univocamente determinata, è isotrópa. Infatti l'annullarsi del coefficiente di $\lambda_{3/r}$ nelle (16) porta per necessità le (8″).

4. Possiamo valerci della proprietà, testè dimostrata, per costruire tutte le congruenze isotrópe.

[1] La verifica è ovvia, se si tratta di coordinate cartesiane ortogonali. Il carattere invariantivo delle (14) ne assicura d'altra parte la validità, qualunque sia il sistema di riferimento.

Le coordinate x_1, x_2, x_3 essendo cartesiane ortogonali, si faccia:

$$\xi = x_1 + ix_2, \quad \eta = x_1 - ix_2, \quad \zeta = x_3,$$
$$\Xi = \frac{X^{(1)} + iX^{(2)}}{X^{(3)}}, \quad H = \frac{X^{(1)} - iX^{(2)}}{X^{(3)}}$$

(il che è sempre lecito, perchè una almeno delle X è diversa da zero). Le (13) divengono:

$$\frac{d\xi}{\Xi} = \frac{d\eta}{H} = d\zeta \tag{13'}$$

e si vede subito che la congruenza sarà costituita da rette cicliche, purchè:

$$H = -\frac{1}{\Xi}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \xi}\Xi - \frac{\partial \Xi}{\partial \eta}\frac{1}{\Xi} + \frac{\partial \Xi}{\partial \zeta} = 0. \tag{18}$$

L' integrale generale di quest' ultima equazione è dato da:

$$f\left(\Xi, \; \xi - \Xi\zeta, \; \eta + \frac{\zeta}{\Xi}\right) = 0,$$

ossia, ripassando alle variabili x_1, x_2, x_3, da:

$$f\left(\Xi, \; x_1 + ix_2 - \Xi x_3, \; x_1 - ix_2 + \frac{x_3}{\Xi}\right) = 0, \tag{18'}$$

dove f è simbolo di funzione arbitraria.

Noto Ξ, si ha H dalla (17) e, ponendo:

$$\Xi + H = \sigma_1 + i\tau_1, \quad \Xi - H = -\tau_2 + i\sigma_2 \tag{19}$$

(con σ e τ funzioni reali) le congruenze di rette cicliche restano individuate da:

$$\frac{dx_1}{\sigma_1 + i\tau_1} = \frac{dx_2}{\sigma_2 + i\tau_2} = dx_3. \tag{20}$$

Lo scambio di i in $-i$ determina le congruenze coniugate:

$$\frac{dx_1}{\sigma_1 - i\tau_1} = \frac{dx_2}{\sigma_2 - i\tau_2} = dx_3 \tag{21}$$

e le isotrópe devono risultare ortogonali alle (20), (21). Assumendole per es. sotto la forma:

$$\frac{dx_1}{A} = \frac{dx_2}{B} = -dx_3,$$

saranno A , B soluzioni del sistema:

$$A(\sigma_1 \pm i\tau_1) + B(\sigma_2 \pm i\tau_2) = 1 ,$$

da cui:

$$(22) \qquad A = \frac{\tau_2}{\sigma_1\tau_2 - \sigma_2\tau_1} , \quad B = \frac{-\tau_1}{\sigma_1\tau_2 - \sigma_2\tau_1} .$$

Ne viene, scrivendo x , y , z per x_1 , x_2 , x_3:

Le equazioni $\frac{\partial u}{\partial z} = A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y}$ *a coppie di integrali ortogonali sono tutte e soltanto quelle, in cui* A , B *hanno i valori* (22), *che si ricavano, per mezzo delle* (17) , (19) *da ogni soluzione* Ξ *della* (18').

Matematica. — *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie negli spazî a curvatura costante.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio Luigi Bianchi.

L' argomento della presente Nota mi è stato proposto dal mio maestro prof. Luigi Bianchi, ritenendo egli che per le deformazioni infinitesime delle superficie flessibili e inestendibili negli spazî a curvatura costante dovesse valere un teorema del tutto analogo a quello che collega, nello spazio ordinario, lo studio di siffatte deformazioni alla teoria delle cosidette congruenze W [1]. Questa supposizione si troverà appunto confermata nelle pagine seguenti, dove deduco inoltre dal teorema fondamentale alcune conseguenze, che mi sembrano degne di nota.

L' elemento lineare di uno spazio ellittico è:

$$(1) \qquad ds^2 = R^2(dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

quando sia

$$(2) \qquad 1 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 .$$

Siano le (x), soddisfacenti alla (2), funzioni di due variabili u , v definenti una superficie S; sia S' una superficie infinitamente vicina applicabile sulla S e sia $(x_i + \varepsilon \overline{x_i})$ il punto della S' che corrisponde al punto generico (x_i) della S. Affinchè le $(x + \varepsilon \overline{x})$, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, soddisfacciano alla (2), deve essere

$$(3) \qquad \sum x_i \overline{x_i} = 0$$

e la condizione di applicabilità diventa:

$$(4) \qquad \sum dx_i d\overline{x_i} = 0 .$$

[1] Bianchi, *Geometria differenziale* (cap. XII, pag. 300).

Senza procedere oltre nella risoluzione del sistema (3), (4) vediamone il significato geometrico: la (3) ci dice che i punti (x_i), $(\overline{x}_i)$ sono coniugati rispetto all' assoluto; la (4) che i piani

$$(\alpha) \qquad dx_0 X_0 + \cdots + dx_3 X_3 = 0$$

e

$$(\beta) \qquad d\overline{x}_0 X_0 + \cdots d\overline{x}_3 X_1 = 0$$

(dove con X_i indichiamo le coordinate correnti) sono normali; ora il piano (α) è il piano normale all' elemento della superficie S unente i punti x_i e $(x_i + dx_i)$ nel punto (x_i) perchè per la (2) si ha

$$\sum x_i \, dx_i = 0 .$$

Il piano (β) è pure normale alla retta unente il punto (x_i) al punto $(\overline{x}_i + d\overline{x}_i)$, ma non passa per il punto $(\overline{x}_i)$ a meno che non sia $\sum \overline{x}_i^2 = \text{cost.}$ o ciò che non toglie per nulla la generalità, che non sia

$$(5) \qquad \sum \overline{x}_i^2 = 1 .$$

Ciò che dimostra una analogia e insieme una differenza da quanto avviene nello spazio euclideo. Di più se la (5) è soddisfatta, si può dare una altra interpretazione finita. Posto

$$x_i = X_i + \overline{X}_i \qquad \overline{x}_i = X_i - \overline{X}_i$$

abbiamo

$$(6) \qquad \begin{cases} \sum X_i^2 = \sum \overline{X}_i^2 = \text{cost.} \\ \sum X_i \overline{X}_i = 0 \\ \sum dX_i^2 = \sum d\overline{X}_i^2 , \end{cases}$$

cosicchè la superficie luogo del punto (X_i) e quella luogo del punto $(\overline{X}_i)$ sono *applicabili* e *punti corrispondenti sono coniugati rispetto all' assoluto*; viceversa da una tale coppia di superficie si deduce una deformazione della specie considerata e (diremo con modo improprio) due superficie che si corrispondono con ortogonalità d' elementi,

L' esistenza di tali deformazioni non può essere messa in dubbio; basta infatti porre

$$\overline{x}_0 = -x_1 ; \quad \overline{x}_1 = x_0 ; \quad \overline{x}_2 = -x_3 ; \quad \overline{x}_3 = x_2$$

perchè le (3), (4), (5) sieno soddisfatte. Vedremo poi un' altra curiosa proprietà di siffatte deformazioni.

Procediamo ora a dimostrare la proprietà fondamentale della teoria, cioè che *il problema delle deformazioni infinitesime delle superficie nello spazio euclideo e quello negli spazî a curvatura costante sono problemi affatto equivalenti.*

Faremo vedere come, interpretando (ciò che è evidentemente lecito) i rapporti $\frac{x_0}{x_3}$, $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ come coordinate cartesiane ortogonali nello spazio euclideo, la superficie T di questo spazio, corrispondente alla S, ammette una deformazione infinitesima, in cui le componenti dello spostamento secondo i tre assi sono proporzionali a $\overline{x}_0$, $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ col fattore di proporzionalità $\lambda = \frac{1}{x_3}$ a meno di un fattore costante. E sviluppando infatti

$$d(\lambda\overline{x}_0)\, d\left(\frac{x_0}{x_3}\right) + d(\lambda\overline{x}_1)\, d\left(\frac{x_1}{x_3}\right) + d(\lambda\overline{x}_2)\, d\left(\frac{x_2}{x_3}\right)$$

ricordando le (2), (3), (4) si riconosce che a meno di un fattore finito esso è uguale a

$$(d \log \lambda + d \log x_3) \sum \overline{x}_i\, dx_i$$

e si annulla quindi se λ è inversamente proporzionale a x_3, ciò che prova il nostro asserto.

E si noti che, dette x, y, z, le coordinate cartesiane succitate, avremo

$$x_0 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}},\; x_1 = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}},\; x_2 = \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}},$$
$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$$

insieme alle:

$$\overline{x}_0 = \frac{\overline{x}}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}},\; \overline{x}_1 = \frac{\overline{y}}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}},\; \overline{x}_2 = \frac{\overline{z}}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}},$$
$$\overline{x}_3 = \frac{-(x\overline{x} + y\overline{y} + z\overline{z})}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Da queste formule si deduce pure immediatamente che da una deformazione infinitesima della T si ricava una deformazione infinitesima della S.

Si osservi ora che nella rappresentazione ora considerata dello spazio non euclideo, l'ordine dei contatti e quindi anche le asintotiche delle superficie si conservano; e siccome $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ sono proporzionali a $\overline{x}_0$, $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, si vede che nei due spazî si corrispondono le rette perpendicolari alla direzione degli spostamenti di due punti corrispondenti di S e T, poste nei rispettivi piani tangenti; donde risulta il teorema:

Se noi per ogni punto della S *tiriamo la geodetica normale alla direzione dello spostamento, otteniamo una congruenza* W; *viceversa ogni tale congruenza si può ottenere in questa maniera.*

La seconda falda focale Σ di questa congruenza W è l'inviluppo dei piani polari dei punti di $\overline{S}$ rispetto all'assoluto; quindi:

Le superficie $\overline{S}$ *e* Σ *sono duali,* ciò che non avviene per lo spazio euclideo. Di più poichè per la S e la Σ i problemi delle deformazioni infinitesime sono affatto equivalenti, perchè tali sono i problemi analoghi per le loro immagini nello spazio euclideo, e poichè una reciprocità muta una congruenza W in un'altra W, si ha che:

Il problema delle deformazioni infinitesime per la S *e quello per la* $\overline{S}$ *sono in uno spazio a curvatura positiva costante affatto equivalenti.*

Si ha poi, come è chiaro:

La seconda falda focale $\overline{\Sigma}$ *della congruenza* W *generata da quella deformazione infinitesima della* $\overline{S}$ *che corrisponde alla considerata deformazione della* S, *è la reciproca di* S *rispetto l'assoluto.*

Poichè il problema delle deformazioni infinitesime della superficie luogo del punto $(\overline{x}_i)$ in uno spazio a curvatura costante è equivalente al problema analogo per la superficie dello spazio euclideo, luogo del punto:

$$\left(x = \frac{\overline{x}_0}{\overline{x}_3}, \; y = \frac{\overline{x}_1}{\overline{x}_3}, \; z = \frac{\overline{x}_2}{\overline{x}_3}\right)$$

si ha che:

Date due superficie dello spazio euclideo T, $\overline{\mathrm{T}}$, *corrispondenti per ortogonalità d'elementi e detto* (x, y, z) *un punto generico della* T *e* $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ *il punto corrispondente della* $\overline{\mathrm{T}}$, *il problema delle deformazioni infinitesime della* T *e quello della superficie luogo del punto*:

$$\left(x = \frac{\overline{x}}{x\overline{x} + y\overline{y} + z\overline{z}}, \; y = \frac{\overline{y}}{x\overline{x} + y\overline{y} + z\overline{z}}, \; z = \frac{\overline{z}}{x\overline{x} + y\overline{y} + z\overline{z}}\right)$$

sono equivalenti.

Osservazione 1ª. Il teorema, che per superficie collineari i problemi delle deformazioni infinitesime sono affatto equivalenti è ora messo in nuova luce dal fatto che ai movimenti degli spazî a curvatura costante corrispondono collineazioni dello spazio euclideo.

Osservazione 2ª. Molti dei teoremi su notati si generalizzano, ricordando che, a meno di quadrature, il problema delle deformazioni infinitesime a meno di infinitesimi del second'ordine e quello a meno d'infinitesimi dell'ordine n^{esimo} sono equivalenti.

Osservazione 3ª. Poichè la $\overline{S}$ è la duale della Σ e poichè quando la (5) è verificata la S e la $\overline{S}$ si corrispondono (diremo così, sebbene non correttamente) con ortogonalità di elementi, si ha la seguente curiosa proprietà delle deformazioni infinitesime per cui la (5) è verificata:

Le rette polari rispetto all'assoluto di due elementi s, σ *corrispondenti della* S *e della* Σ, *incontrano il piano tangente a* S(Σ) *relativo al*

punto iniziale di s (di σ) in due punti allineati col punto iniziale di σ(di s).

Questa proprietà sussiste anche per le immagini della S e della Σ nello spazio euclideo; una superficie luogo del punto (x, y, z) ammette siffatte deformazioni; basta porre infatti, secondo l'esempio già citato per gli spazî a curvatura costante positiva

$$\bar{x} = -y, \bar{y} = x, \bar{z} = -1.$$

Osservazione 4ª. Ad analoghe conclusioni si perviene nel caso degli spazî iperbolici, come è ben naturale.

Matematica. — *Osservazioni sopra alcune equazioni differenziali lineari.* Nota di G. Fano, presentata dal Socio Cremona.

Matematica. — *Contributo alla determinazione dei gruppi continui in uno spazio ad n dimensioni.* Nota del dott. P. Medolaghi, presentata dal Socio Cerruti.

Le precedenti due Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla dipendenza tra il fenomeno di Zeemann e le altre modificazioni che la luce subisce dai vapori metallici in un campo magnetico.* Nota del dott. Orso Mario Corbino, presentata dal Socio Blaserna.

In una Nota recentemente pubblicata dal prof. Macaluso e da me, abbiamo fatto vedere che i fenomeni di polarizzazione rotatoria magnetica anomala da noi osservati potevano dedursi, con tutte le particolarità che li accompagnano, dal fenomeno di Zeemann, ammettendo che, nel caso di luce incidente circolare, la curva che rappresenta gli indici di rifrazione per le diverse lunghezze d'onda si sposti, per azione del campo, senza deformazione, di una lunghezza eguale allo spostamento della curva che rappresenta gli assorbimenti.

Mi propongo anzitutto di esaminare a che si riduce questa ipotesi che ci è stata necessaria per giungere alla formola

$$(1) \qquad \varrho = -\frac{2\pi \mathrm{A} l}{\lambda}\frac{dn}{d\lambda}\mathrm{H}$$

ove ϱ indica la rotazione del piano di polarizzazione nel senso della corrente magnetizzante, l lo spessore attraversato del mezzo, n l' indice di rifrazione di questo per la luce che nel vuoto ha la lunghezza d'onda λ, H l' intensità del campo, e infine A una costante che misura l' effetto Zeemann per la riga considerata.

È facile vedere che la ipotesi suddetta è equivalente a quest' altra: che *le stesse costanti specifiche del mezzo da cui dipende l' assorbimento, determinino anche l' indice di rifrazione nei diversi posti dello spettro.*

Pensiamo infatti alla curva che rappresenta gli assorbimenti k in funzione del numero n di vibrazioni della luce incidente. L' assorbimento dipenderà, oltre che da n, da alcuni parametri caratteristici del mezzo $p_1\, p_2 \dots p_m$, il numero dei quali lascerò, per maggior generalità, indeterminato.

Ammettiamo che dei medesimi parametri sia funzione l' indice di rifrazione i, cosicchè si possa scrivere

$$k = \varphi(n\, p_1\, p_2 \dots p_m) \tag{2}$$
$$i = \psi(n\, p_1\, p_2 \dots p_m) \tag{3}$$

Si faccia subire al mezzo una particolare modificazione (per esempio l' azione di un campo magnetico) sul meccanismo della quale non è necessario precisar nulla; ed essa sia tale che la curva rappresentante gli assorbimenti di un raggio circolare sia identica a quella di prima, solo che sia spostata di una certa quantità δ nel senso delle n, per esempio, crescenti; cosicchè si abbia indicando con $p'_1\, p'_2\, p'_3 \dots p'_m$ i parametri del mezzo modificato

$$k = \varphi(n\,, p_1\, p_2 \dots p_m) = \varphi(n - \delta\,, p'_1\, p'_2 \dots p'_m)\,.$$

Anche la curva rappresentante gli indici si sposterà di una quantità eguale, *senza deformarsi.*

E infatti deriviamo successivamente la (2) m volte rispetto ad n, avremo

$$\begin{aligned} k' &= \varphi'_n\ (n\, p_1\, p_2 \dots p_m) \\ k'' &= \varphi''_n\ (n\, p_1\, p_2 \dots p_m) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ k^{(m)} &= \varphi^{(m)}_n\ (n\, p_1\, p_2 \dots p_m) \end{aligned}$$

Se combiniamo queste m equazioni con le (2) e (3) potremo eliminare i parametri $p_1\, p_2 \dots p_m$ e la variabile n; otterremo così una equazione contenente i, k e le sue m derivate successive rispetto ad n, in modo che, risolvendola rispetto a i, si avrà

$$i = \mathrm{F}[k\,, k'\,, k''\,, \dots k^{(m)}]\,.$$

Questa relazione generalissima lega, in modo unico, per tutti i mezzi e per tutti i posti dello spettro, l' indice di rifrazione all' assorbimento e alle derivate successive di questo. Intanto la modificazione del mezzo primitivo

è tale che, dopo di essa, la curva che dà le k si è soltanto spostata; e quindi ponendo $n - \delta$ al posto di n le k, k', k'', ecc., assumono gli stessi valori di prima. Risulta perciò evidente dall'ultima relazione che lo stesso avverrà per l'indice i.

Qualunque siano adunque le modificazioni che il magnetismo produce nel mezzo, le esperienze citate si possono semplicemente dedurre dal fenomeno Zeemann ammettendo che la curva di assorbimento per un raggio circolare sia all'infuori dello spostamento, identica a quella di prima; e che tanto l'indice di rifrazione che l'assorbimento di un mezzo dipendano dalle stesse costanti di questo, anzi, più rigorosamente, che tra le costanti che determinano l'assorbimento ci siano comprese tutte quelle che determinano l'indice di rifrazione.

2. La discussione della formola (1) può dare altri interessanti risultati, tenendo conto delle ipotesi che formano la base della teoria della dispersione anomala di Helmholtz. È noto [1] che in questa teoria si deducono per gli spostamenti delle particelle luminose delle espressioni le quali rivelano che il movimento corrisponde a quello di un'onda progressivamente smorzata. Perchè le espressioni ottenute soddisfino alle equazioni differenziali del moto luminoso, si debbono verificare alcune condizioni tra le costanti del mezzo. Si deduce così che, se la luce incidente ha un numero n di vibrazioni poco diverso da quello ν di massimo assorbimento, in modo che si possa scrivere

$$n = \nu + \frac{\varepsilon}{2}$$

essendo ε una quantità assai piccola, si deve avere

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{K}\left[\mu - \frac{P^2}{\nu^3}\frac{\mu\varepsilon}{\mu^2\varepsilon^2 + R^2}\right]$$

ove c rappresenta la velocità di propagazione della luce nel mezzo, K la costante di elasticità dell'etere, μ la densità delle particelle materiali che piglian parte al moto luminoso, P la costante di proporzionalità dell'azione reciproca tra le particelle di etere e quelle materiali allo spostamento relativo, R il coefficiente del termine esprimente l'attrito risentito dalle particelle materiali. Si ha infine per il numero di vibrazioni cui corrisponde il massimo assorbimento

$$\nu = \frac{H + P}{\mu}$$

rappresentando H il coefficente del termine esprimente la forza che tende a riportare le particelle luminose alla loro posizione di riposo.

(1) Kirchhoff, Mathematische Optik, Leipzig, 1891, pag. 172.

Ponendo nella precedente, per brevità,

$$\sqrt{\frac{\mu}{k}}=\frac{1}{c_0}$$

estraendo la radice quadrata e tenendo presenti gli ordini di grandezza, in base alle ipotesi di Helmholtz, delle diverse quantità che vi compariscono, si ricava

$$(3)\qquad \frac{1}{c}=\frac{1}{c_0}\left[1-\frac{1}{2}\frac{P^2}{\nu^3}\frac{\mu\varepsilon}{\mu^2\varepsilon^2+R^2}\right].$$

Ora se V_0 indica la velocità della luce nel vuoto e n l'indice di rifrazione si ha

$$n=\frac{V_0}{c}$$

da cui

$$\frac{dn}{d\lambda}=V_0\frac{d\frac{1}{c}}{d\lambda}=V_0\frac{d\frac{1}{c}}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\lambda}$$

d'altra parte

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda}=-2\frac{V_0}{\lambda^2}$$

quindi

$$\frac{dn}{d\lambda}=-2\frac{V_0^2}{\lambda^2}\frac{d\frac{1}{c}}{d\varepsilon}$$

Si ricava intanto dalla (3)

$$\frac{d\frac{1}{c}}{d\varepsilon}=-\frac{1}{2}\frac{P^2}{\nu^3 c_0}\frac{R^2-\mu^2\varepsilon^2}{(R^2+\mu^2\varepsilon^2)^2}.$$

Sostituendo nella (1) si ha finalmente per la rotazione

$$\varrho=-A\frac{2\pi}{V_0}\frac{P^2 l}{c_0}\frac{R^2-\mu^2\varepsilon^2}{(R^2+\mu^2\varepsilon^2)^2}H.$$

Si ritrova così il risultato sperimentale che il fenomeno è perfettamente simmetrico attorno alla banda, poichè ε comparisce con esponente pari e quindi dai due lati della banda, e a egual distanza da questa, cioè per due valori di ε eguali e di segno contrario, si avranno rotazioni eguali.

3. Considerazioni di simil genere si possono fare per venire alla spiegazione della doppia rifrazione dei vapori assorbenti normalmente alle linee di forza, scoperta dal Voigt.

Anche qui si può prender le mosse del fenomeno di Zeemann; esso ci apprende che se sulla fiamma si fa cadere un fascio di luce polarizzata per-

pendicolarmente alle linee di forza, si ha una riga di assorbimento identica alla primitiva; invece si hanno due righe di assorbimento spostate simmetricamente dai due lati della primitiva, se la luce è polarizzata nel senso delle linee di forza. Si ha allora

$$V = \psi(n) \tag{4}$$

la curva che rappresenta, a campo non eccitato, la velocità di propagazione della luce nel mezzo in funzione del numero di vibrazioni. Per la luce polarizzata normalmente alle linee di forza avremo, quando si chiude la corrente, la stessa curva di assorbimento e quindi, per la ipotesi sopra enunciata, la stessa curva per gli indici; cosicchè indicando con V_1 la velocità della luce in questo caso, sarà

$$V_1 = \psi(n) .$$

Invece, per la luce polarizzata nel senso delle linee di forza si modificheranno tanto la curva degli assorbimenti che quella delle velocità V_2; poniamo

$$V_2 = \varphi(n) .$$

Quest' ultima curva avrà una forma dipendente dallo spostamento δ delle righe dovuto all' effetto Zeemann, cioè si potrà scrivere

$$V_2 = \varphi(n , \delta) .$$

Sviluppiamo quest' ultima funzione in serie di Maclaurin rispetto a δ; avremo

$$V_2 = \varphi(n , 0) + \delta \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \delta} \right]_{\delta=0} + \frac{1}{2} \delta^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta^2} \right]_{\delta=0} + \cdots . \tag{5}$$

Intanto questa funzione, per $\delta = 0$, cioè quando il campo è nullo, deve essere identica alla (4), cosicchè si deve avere

$$\varphi(n , 0) = \psi(n) .$$

Ne viene che $\varphi\ (n , \delta)$ dovrà essere della forma

$$\varphi(n , \delta) = \psi(n) + \delta \varphi_1(n , \delta)$$

e che la (5) diventa

$$V_2 = \psi(n) + \delta \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \delta} \right]_{\delta=0} + \frac{1}{2} \partial^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta^2} \right]_{\delta=0} + \cdots .$$

Si vede così che i due raggi polarizzati ortogonalmente si propagheranno con velocità diverse V_1, V_2. Cosicchè se la luce incidente non è polarizzata in uno di questi due azimut principali (parallelamente o normalmente alle linee di forza), si manifesteranno fenomeni di doppia rifrazione. Anche questi sono quindi conseguenza necessaria del fenomeno di Zeemann.

Fisica. — *Sulla teoria del contatto.* Nota II di QUIRINO MAJORANA, presentata dal Socio BLASERNA.

In una Nota che è stata pubblicata nel precedente Rendiconto, ho fatto vedere che ampliando il principio di Volta, si arriva alla conclusione che basta il semplice avvicinamento, o allontanamento di due pezzi metallici eterogenei, per ottenere cariche elettriche libere. Come applicazione di questo principio mi propongo di descrivere due apparecchi, i quali possono fornire, quando vengano posti in rotazione, correnti elettriche continue. Queste correnti, del resto debolissime, sono dovute appunto alla formazione e alla neutralizzazione di quelle cariche.

Un tamburo di legno o di ebanite T, girevole, è rivestito sulle sue pareti cilindriche da due lamine isolate metalliche, l'una di zinco e l'altra di rame (fig. 1). Ciascuna di queste lamine abbraccia il tamburo per poco meno di 180°. Le due lamine di un commutatore, girevole e solidale col tamburo, sono unite ciascuna con uno dei due metalli. Due spazzole appoggiano sopra tal collettore come è indicato in figura. Il tamburo T è racchiuso da due

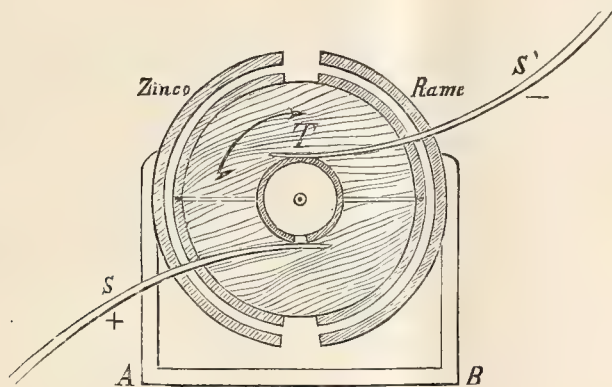



FIG. 1.

armature cilindriche, concentriche ad esso, e fisse sul sostegno; queste armature sono in comunicazione metallica mediante la staffa AB.

Pongasi il tamburo in rotazione secondo la freccia, e consideriamo ciò che avviene durante il primo mezzo giro. Lo zinco del tamburo si avvicina al rame fisso e, per quel che si è visto, viene a caricarsi negativamente; il rame invece si avvicina allo zinco fisso, esso dunque si carica positivamente. Per conseguenza, un filo che riunisce le due spazzole S ed S′, viene ad esser traversato da una corrente diretta da S in S′. Dopo il primo mezzo giro il

giuoco si inverte, giacchè lo zinco del tamburo si allontana di nuovo dal rame fisso, mentre il rame si allontana dallo zinco fisso. Ma anche la posizione del collettore è cambiata, e per conseguenza la spazzola S è sempre positiva, e la S′ negativa.

Al girare del tamburo si può dunque raccogliere una corrente continua, sempre diretta nello stesso senso.

Sarebbe difficile calcolare a priori qual sia l'intensità di questa corrente; ciò dipendentemente dal fatto che non sarebbe facile determinare le capacità delle varie parti dell'apparecchio. Ma se le armature mobili e le fisse sono molto vicine, vale a dire se il diametro del tamburo differisce di pochissimo da quello interno delle armature fisse, si può fare il calcolo con buona approssimazione.

Consideriamo l'apparecchio nella posizione segnata in figura. Le cariche elettriche distribuite nel sistema, hanno allora un piccolo valore, giacchè le differenze di potenziale tra i pezzi metallici affacciati sono nulle; ma facciamo compire un mezzo giro al tamburo, se indichiamo con C la capacità di uno dei due condensatori che costituiscono l'apparecchio, sarà $C(Zn/Cu)$ la quantità di elettricità che dal rame del tamburo è andata nello zinco dello stesso, supponendo le spazzole S ed S′ riunite da un filo. Con ciò ho ammesso che la capacità di ciascuna delle armature, indipendentemente dalla presenza delle altre, sia trascurabile. Al secondo mezzo giro questa quantità di elettricità ritorna indietro, e così di seguito.

Ora giacchè ho supposto che le armature di ciascuno dei due condensatori sieno vicinissime, indicando con e la loro mutua distanza e con S la superficie, potrà ammettersi che la capacità elettrica sia

$$C = \frac{S}{4\pi e} \text{ cm., supposti S ed } e \text{ espressi in cm.}$$

Che espressa in farad è

$$\frac{S}{4\pi e} \frac{1}{9 \, . \, 10^{11}} \, .$$

Moltiplicando questa capacità per la differenza di potenziale Zn/Cu, si avrà la quantità di elettricità che fluisce per ogni mezzo giro attraverso le spazzole, e se n è il numero dei giri al secondo del tamburo, sarà

$$I = \frac{Sn}{2\pi e} (Zn/Cu) \frac{1}{9 \, . \, 10^{11}} \text{ amp.}$$

l'intensità della corrente che si ottiene.

Una corrente esattamente della stessa intensità, ma che è bruscamente alternante, si ottiene attraverso la congiuntura AB delle due armature fisse.

Ed è essenziale che questa congiuntura esista; in caso diverso lo scambio di elettricità tra le due armature mobili, avverrebbe in una misusa molto minore.

Nel nostro caso sperimentale la superficie S di una delle lamine è di 86 cmq.; la distanza tra le armature mobili e le fisse è di circa 1 mm. Se l'apparecchio fa 20 giri per minuto secondo, ponendo la forza elettromotrice di contatto tra zinco e rame eguale a 0,8 volt. si ha

$$I = \frac{86 \,.\, 20 \,.\, 0{,}8}{2\pi \,.\, 0{,}1 \,.\, 9 \,.\, 10^{11}} = \text{amp. } 2{,}42 \,.\, 10^{-9}\,.$$

È dunque un' intensità estremamente piccola.

Ma un galvanometro sensibilissimo, ad alta resistenza, e bene astatizzato, accusa una deviazione di 4 o 5 millimetri su di una scala alla distanza di 2 metri. Questa deviazione cambia di segno col cambiare del senso di rotazione del tamburo; e, determinata la sensibilità dell' istrumento, si riconosce facilmente che la grandezza di tale deviazione è quella che compete ad intensità così deboli come l' indicata. Inoltre, come è naturale, la deviazione è proporzionale alla velocità di rotazione e sparisce del tutto allontanando le armature fisse.

L'apparecchio descritto ha qualche analogia col duplicatore di Belli o col *replenisher* di W. Thomson. Ma ne differisce anzitutto per il fatto che esso è destinato a fornire una corrente elettrica, anzichè delle cariche statiche; lo studio delle intensità di queste correnti, ci dà un mezzo per la determinazione della forza elettromotrice di contatto dei due metalli adoperati. Differisce ancora dal replenisher per la costituzione dell'armatura girevole; nel caso attuale è costituita da metalli eterogenei; e l' intensità della corrente che si otterrebbe, se essa fosse costituita da un sol metallo, sarebbe soltanto la metà. Rivestendo infatti detta armatura di stagnola, il galvanometro accusa una deviazione solo di 2 o 3 millimetri.

Sarebbe difficile, se non del tutto impossibile, osservare la corrente che circola nelle armature fisse attraverso il sostegno AB della figura. Occorrerebbe all' uopo un elettrodinamometro di straordinaria sensibilità.

Nella determinazione dell' intensità della corrente che può fornire l'apparecchio descritto, non ho tenuto conto della resistenza del galvanometro; anzi ho detto che è bene che questo sia ad alta resistenza. Ciò perchè restano così aumentati il numero di ampèr-giri, e realmente non è a temere che questa resistenza, anche supposta di un migliaio di ohm, possa ancor diminuire l' intensità della corrente che si studia.

Ma al fine di render più agevole l'osservazione di correnti elettriche generate da movimenti relativi di pezzi metalli eterogenei, ho voluto procedere alla costruzione di altro apparecchio, che è solo un'ampliazione del precedente (fig. 2).

In questo la corrente elettrica vien raccolta nelle armature fisse e successivamente raddrizzata da un commutatore portato dall' asse girante delle mobili.

Queste sono costituite da una serie di dieci dischi, ciascuno dei quali è per metà di zinco e per metà di rame; nella posizione segnata in figura

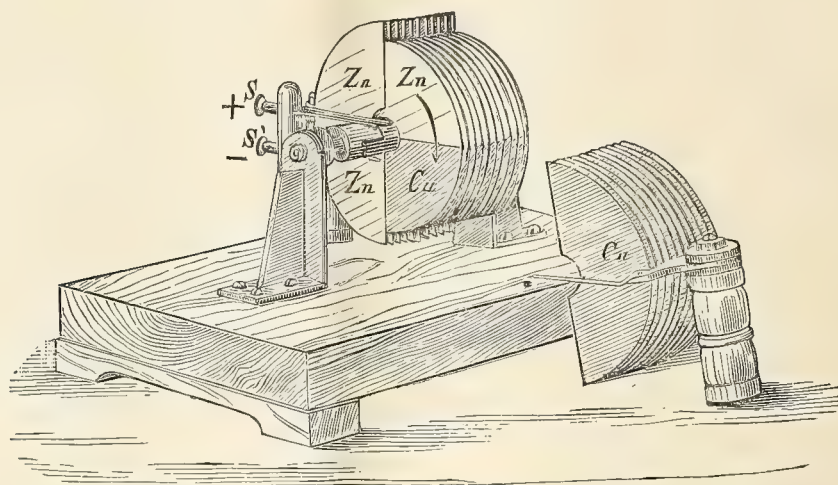



Fig. 2.

tutti gli zinchi sono in alto e i *rami* in basso. Le armature fisse sono portate da due colonnine isolanti, e costituiscono pettini formati ciascuno da undici mezzi dischi di zinco o di rame comunicanti tra loro. Questi due pettini, quando sono entrambi messi in posto, lasciano liberamente girare la serie di dischi mobili senza che avvenga alcun contatto.

I pettini portano una spazzola ciascuno, che appoggia sopra un anello metallico dell' asse girevole, montato su ebanite. I due anelli comunicano alla lor volta, ciascuno con una lamina di un commutatore, il cui piano di divisione delle lamine, contiene anche le linee di saldatura dei due metalli che costituiscono le armature girevoli. Con ciò i due serrafili S ed S′ raccolgono rispettivamente, quando il tamburo gira secondo la freccia, delle cariche positive e negative.

La maggiore intensità della corrente fornita da questo apparecchio non tiene ad altro che alla maggior superficie totale delle lamine.

Le armature mobili hanno complessivamente una superficie di 1327 cmq. di rame, ed altrettanti di zinco. La distanza che intercede tra un' armatura mobile, ed una fissa, è di 2,5 mm.

Sicchè supponendo che l' apparecchio faccia 20 giri al secondo e sia sempre 0,8 la f. e. m. di contatto tra zinco e rame, sarà

$$I = \frac{1327 \,.\, 20 \,.\, 0{,}8}{2\pi \,.\, 0{,}25 \,.\, 9 \,.\, 10^{11}} = 1{,}5 \,.\, 10^{-8}$$

E infatti la deviazione data dal galvanometro è notevolmente più grande che nel primo caso (6 o 7 volte).

Sono necessarie alcune osservazioni relative al buon andamento delle precedenti esperienze. Occorre anzitutto che sieno buone le condizioni superficiali dei varî pezzi metallici. Con ciò intendo che sia lo zinco pulito di fresco e possibilmente speculare o brunito. Se il rame non è in tali condizioni, ciò non nuoce all' esperienza, anzi, si ottengono deviazioni maggiori con pezzi di rame ossidati scaldandoli con una fiamma a gas (W. Thomson).

L' isolamento, ove occorre, deve esser fatto con ebanite. Pezzi di legno anche essiccati al forno, se adoperati nella costruzione di simili apparecchi dànno cattivo risultato, benchè lascino ancora osservare i fenomeni. È essenziale che la puleggia che serve ad imprimere movimento al tamburo sia di legno o meglio metallica; pulegge di ebanite, elettrizzandosi per lo strofinio della fune di trasmissione, mascherano talvolta completamente il fenomeno.

Usando tali cautele, non sono a temersi altre cause perturbatrici; azioni termoelettriche, od elettromagnetiche non possono intervenire, giacchè permanentemente il circuito del galvanometro resta aperto.

Gli apparecchi descritti, oltre a permettere la misura della f. e. m. di contatto di due metalli eterogenei, si prestano bene alla semplice dimostrazione della esistenza di tal forza, o per lo meno della esistenza di una differenza di potenziale tra i due metalli. Occorre solo disporre di un galvanometro di grande sensibilità. Consideriamo il primo di questi due apparecchi. L' espressione che ci dà l' intensità della corrente fornita, ha a denominatore il valore della distanza che intercede fra le armature fisse e le mobili. Volendo dunque aumentare quella intensità, basta diminuire quella distanza. Disgraziatamente non si può andare al di là di un certo limite, per ragioni meccaniche. Se tale distanza fosse ad esempio di $\frac{1}{100}$ di mm., quell' intensità sarebbe 100 volte maggiore.

In ogni caso la corrente ottenuta è una trasformazione del lavoro occorso per vincere le azioni mutue delle cariche elettriche esistenti sulle varie parti dell' istrumento.

Fisica. — *Sullo smorzamento delle vibrazioni in un risonatore acustico.* Nota del dott. A. POCHETTINO, presentata dal Socio BLASERNA.

Scopo della presente Nota è quello di esporre alcuni risultati ottenuti, determinando il comportamento del coefficiente di smorzamento e del decremento logaritmico delle vibrazioni in un risonatore acustico in alcuni casi particolari, e precisamente:

I. Quando si varî la forma dell' apertura del risonatore, lasciandone invariata l' area;

II. Quando si munisca detta apertura di orli di varia grandezza; giacchè in teoria pel calcolo di alcuni coefficienti e più precisamente di quella costante c, chiamata conducibilità acustica dell' apertura, si suole ammettere essere l' apertura del risonatore munita di un orlo piano infinitamente esteso, il che in pratica non si verifica mai;

III. Quando si varî la distanza fra risonatore ed eccitatore.

Il metodo ch' io ho adoperato per determinare questo smorzamento è quello del Leiberg (1), che non è in fondo che una modificazione di quello usato dal Bjerknes per determinare lo smorzamento nei risonatori elettrici, e si basa sulla considerazione delle vibrazioni eccitate in un risonatore da una sorgente sonora giacente fuori di esso. Ecco in poche parole in che consiste questo ragionamento.

Consideriamo un risonatore di volume variabile eccitato da una sorgente esterna capace di compiere vibrazioni sinusoidali della forma F cos bt d' intensità costante (per es. la cassetta di risonanza di un diapason elettromagnetico convenientemente eccitato); l' equazione del movimento della massa d' aria contenuta nel risonatore, attraverso l' apertura del medesimo sarà: (2)

$$\frac{1}{c}\frac{d^2X}{dt^2}+K\frac{dX}{dt}+\frac{a^2}{v}X=F\cos bt\,, \tag{1}$$

dove $c=2r$ se l' apertura del risonatore è circolare e di raggio r, e $c=2\sqrt{\alpha\,.\,\beta}\left(1+\frac{e^4}{64}+\cdots\right)$ se l'apertura è ellittica di assi $\alpha\ \beta$ e di eccentricità e, X è la massa d' aria uscente dal risonatore in un dato istante, a è la velocità di propagazione del suono nell' aria, v, è il volume del risonatore nell' istante che si considera, K è il coefficiente di smorzamento.

L' integrale generale della (1) ci rappresenta il movimento della massa d' aria nel risonatore come la sovrapposizione di due movimenti, il primo

(1) Bull. de la Soc. phys. chim. russe 1896.

(2) Rayleigh, *Théorie des Schalles*, § 311.

corrispondente al tono proprio del risonatore, il secondo corrispondente al tono eccitato in esso dalla sorgente esterna. Le vibrazioni di questo tono corrispondono a un' equazione della forma:

$$X = \frac{F\cos(bt+\alpha)}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{v}-\frac{b^2}{c}\right)^2+b^2k^2}},$$

dove:

$$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{bk}{\frac{a^2}{v}-\frac{b^2}{c}}.$$

Facciamo ora variare il periodo di vibrazione del risonatore, mutandone per esempio le dimensioni e lasciando fisso tutto il resto, e invece della massa X d' aria uscente dal risonatore consideriamo la corrispondente variazione nella pressione esercitata sul fondo del risonatore; variazione periodica che sarà della forma $P\cos(bt+\alpha)$.

Se ora noi chiamiamo p p_0 le pressioni esercitantisi sul fondo rispettivamente quando il risonatore è in quiete e quando il risonatore è in moto avremo:

$$p_0 - p = P\cos(bt+\alpha),$$

donde ricavando P e tenendo presente che:

$$p - p_0 = -\frac{a^2X}{v},$$

avremo:

$$P = \frac{a^2F}{\sqrt{\left(a^2-\frac{b^2v}{c}\right)^2+b^2k^2v^2}}.$$

Riguardando ora P come funzione della sola v, giacchè le altre quantità sono costanti, avremo come massimo di P:

$$P_M{}^2 = \frac{F^2\frac{a^2}{c}}{k^2v_0},$$

se con v_0 indicheremo il volume del risonatore cui corrisponde P_M. Allora avremo:

$$\frac{P^2}{P_M{}^2} = \frac{\frac{k^2c^2}{b^2}}{\left(1-\frac{v}{v_0}\right)^2+\frac{k^2c^2}{b^2}}$$

donde:

$$k^2 = \frac{\frac{b^2}{c^2}\left(1 - \frac{v}{v_0}\right)^2}{\left(\frac{P_M}{P}\right)^2 - 1}. \tag{2}$$

Avuta dalla (2) la K ossia il coefficiente di smorzamento si ottiene da questo il decremento logaritmico delle vibrazioni γ mediante note formole.

Per usare la (2) alla determinazione di K, la questione è ridotta alla determinazione dei rapporti $\frac{P_M}{P}$ e $\frac{v}{v_0}$. Il risonatore da me studiato è un risonatore cilindrico Kônig dell' Ufficio del Corista internazionale, capace di dare a mezzo tiraggio il la_3. Lungo una generatrice del pezzo mobile venne incisa una graduazione in millimetri, mediante cui si faceva senz' altro la determinazione del rapporto $\frac{v}{v_0}$.

Per la determinazione del rapporto $\frac{P_M}{P}$ si usavano le indicazioni di un manometro a specchio, analogo a quello del Wien, incollato sul fondo del risonatore. Dallo specchietto di questo manometro veniva riflessa su una scala micrometrica nell' oculare di un cannocchiale l' immagine di un punto luminoso. Quando il risonatore era in quiete, sulla scala micrometrica si vedeva un punto luminoso che, quando il risonatore invece agiva, si mutava in una striscia di lunghezza proporzionale alla quantità P.

Il diapason, la cui cassetta di risonanza funzionava da sorgente esterna, era un la_3 elettromagnetico pure appartenente all' Ufficio del Corista internazionale, e veniva eccitato da un accumulatore mediante un circuito munito dell' interruttore acustico di Helmholtz, consistente in un altro diapason elettromagnetico rigorosamente identico al primo inserito nel circuito di questo.

L'uso del diapason interruttore e l' inserimento sulla scintilla d' interruzione di un opportuno condensatore, vennero impiegati affine di ottenere che l' intensità del tono della sorgente esterna fosse sensibilmente costante.

Le osservazioni si conducevano così:

Si dava al risonatore il tiraggio minimo e si osservava corrispondentemente la lunghezza della striscia luminosa prodotta dal vibrare dello specchietto del manometro, quindi si facevano variare le dimensioni del risonatore, finchè passato il massimo di risonanza si ritornava a una lunghezza della striscia luminosa eguale a quella iniziale. Per calcolare poi il coefficiente di smorzamento si portavano sull' asse delle ascisse i volumi del risonatore o meglio le sue successive lunghezze, e sulle ordinate le lunghezze della striscia luminosa di cui parlammo, lunghezze che sono proporzionali alle ampiezze delle vibrazioni corrispondentemente eccitate nel risonatore. Unendo i

punti così ottenuti, si aveva una curva cosidetta di risonanza sulla quale si calcolava il coefficiente di smorzamento nel seguente modo:

Si notava il volume v_0 del risonatore cui corrispondeva l'ordinata massima P_M, e quindi si calcolavano sulla curva i due volumi v_1 e v_2 del risonatore corrispondentemente ai quali la quantità P assumeva il valore di $\frac{1}{2} P_M$; avevamo così due valori del coefficiente K, la cui media ci dava il valore cercato.

Riassumo qui nella seguente tabella i risultati ottenuti:

I. Adoperando il risonatore con foro circolare di $r = 23$ mm. successivamente senza orlo, con un orlo del diametro di 20 cm. (N. 1), con un orlo del diametro di 40 cm. (N. 2), e finalmente con un orlo del diametro di 80 cm. (N. 3);

II. Portando il risonatore successivamente alle distanze di 50, 93, 150 mm. dall'eccitatore;

III. Munendo il risonatore di un foro ellittico di assi $66\frac{1}{2} \times 32\frac{1}{2}$ mm.;

IV. Munendo il risonatore di un secondo foro ellittico di assi $50{,}4 \times 42$ mm.:

Foro circolare $r = 23$ mm.

Distanza fra risonatore ed eccitatore	Senza orlo	Con orlo n. 1	Con orlo n. 2	Con orlo n. 3
50 mm.	K = 2,72	2,58	2,29	1,53
93 "	" 1,69	1,55	1,46	1,37
150 "	" 1,61	1,35	1,27	1,20

Foro ellittico $66\frac{1}{2} \times 32\frac{1}{2}$

93 mm.	K = 1,84	1,51	1,47	1,25

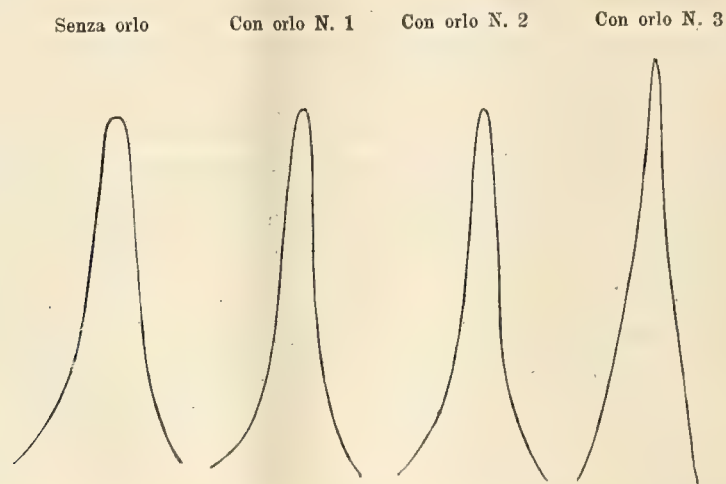
Foro ellittico $50{,}4 \times 42$

93 mm.	K = 1,85	1,51	1,47	1,21

Dunque potremo concludere:

I. Crescendo il diametro dell'orlo, il coefficiente di smorzamento diminuisce, ossia in primo luogo il risonatore è più che mai capace di rinforzare un tono identico al proprio ed è meno sensibile pei toni che, pur essendo prossimi al medesimo, ne differissero un poco; in secondo luogo le vibrazioni nel risonatore (se una volta eccitata la sorgente esterna tacesse) durerebbero più a lungo. Corrispondentemente all'accrescimento del diametro dell'orlo, le curve di risonanza che si possono ottenere nel modo detto più sopra, presentano una singolarità che si può rilevare dal seguente disegno.

Esse si costipano, s'innalzano cioè e si restringono.

II. Anche col crescere la distanza fra eccitatore e risonatore, il coefficiente di smorzamento diminuisce e quindi si hanno le stesse conseguenze come al numero I;

III. I coefficienti di smorzamento sono sensibilmente eguali per i due fori ellittici e in genere poco differenti dai corrispondenti pel foro circolare; anzi cogli orli N_1 e N_2 si può ritenere vi sia l'eguaglianza;

IV. Anche in questo risonatore, come già notò il Leiberg per i suoi, dalla piccolezza del coefficiente di smorzamento delle vibrazioni, si rileva come l'intervallo fra tono proprio e tono del massimo di risonanza sia poco differente da $\frac{885}{886}$ limite, secondo Helmholtz, della percettibilità.

Nota. — Mi sia permesso aggiungere poche parole intorno a un fatto degno di nota. Se si fa una serie di misure prima allungando il risonatore fino a una risonanza eguale all'iniziale e poi accorciandolo successivamente, si osserva che le lunghezze della striscia luminosa corrispondenti a uno stesso volume non sono eguali se ottenute prima allungando e poi accorciando il risonatore di modo che le due curve corrispondenti non si sovrappongono, ma si trovano spostate lateralmente una rispetto all' altra. Il ripetersi di questo fatto in tutte le misure, induce a credere si tratti di un fenomeno di elasticità susseguente della membrana e mi costrinse a prendere sempre la media dei due valori corrispondenti.

Fisica. — *Sull' aumento temporaneo e permanente dell' elasticità del marmo portato ad alte temperature.* Nota del dott. P. Gamba, presentata dal Socio Blaserna.

Ho avuta occasione in una mia Nota [1] di far osservare come il marmo sottoposto a temperature piuttosto elevate acquisti temporaneamente una maggiore flessibilità. Espongo ora qui di seguito i risultati di alcune esperienze fatte sopra lastrine che, cimentate da prima alla temperatura dell' ambiente, poi tenute per qualche tempo ad una temperatura elevata e raffreddate len-

[1] V. Nuovo Cimento, febbraio 1899.

tamente, venivano cimentate di nuovo alla stessa temperatura che la prima volta. Anche in questo caso i cicli descritti su ciascuna lastrina avevano gli stessi limiti prima e dopo e, come si è già visto, si riavevano le stesse deformazioni sempre, qualora fossero identiche le condizioni in cui le singole lastrine si trovavano. Per la prima volta le lastrine cimentate alla temperatura di 12° C. (temp. dell' ambiente) venivano collocate dentro una piccola stufa di rame ed ivi tenute per 3 ore alla temperatura di 100° C. Poi lentamente raffreddate, il giorno seguente tornavano ad essere cimentate come la prima volta, e si poteva subito notare un sensibile aumento nella flessibilità del corpo in esame; e cioè agli stessi pesi flettori venivano a corrispondere la 2ª volta deformazioni più grandi; come pure aumentavano le deformazioni residue. Però attesi alcuni giorni e tornando a cimentare le lastrine, si ritrovavano su esse le stesse deformazioni che la 1ª volta; cioè, dopo un certo tempo, veniva a scomparire gradatamente quello stato particolare causato dalla temperatura elevata.

Riporto nella tabella seguente i valori delle deformazioni medie per ciascun ciclo per ogni lastrina prima della cottura e dopo. Nella penultima colonna pongo le percentuali dell' aumento delle deformazioni, tenuto conto però del solo 1° ciclo, per le ragioni che ho già avuto occasione di esporre nella mia Nota precedente.

TABELLA I.

	Numero dei cicli	Temp. 12° C.	Temp. 100°	Rapporto	Dopo 15 giorni temp. 12°
Lastrina N. 1	1° ciclo	7,666	8,750	0,141	7,666
	2° »	7,437	8,562	—	7,437
» » 2	1° »	12,500	14.300	0,144	12,500
	2° »	12,427	14,000	—	12,427
» » 3	1° »	4,916	5,583	0,136	4,916
	2° »	4,593	5,400	—	4,593
» » 4	1° »	11,000	12,550	0,141	11,000
	2° »	10,437	12,400	—	10,437

Rapporto medio: 0,1406.

Si nota subito che l' aumento percentuale è all' incirca costante, e le piccole variazioni si possono attribuire alle piccole disuguaglianze dello spessore delle lastrine. Non ho riportato, nè lo farò in seguito, i quadri che rappresentano le singole deformazioni rapporto a ciascun peso flettore, non presentando anomalie di sorta; solo è facile comprendere che alle maggiori deformazioni di ciascuna lastrina corrisponde sempre una maggiore deformazione residua, e quindi, qualora i cicli dovessero rappresentarsi graficamente, essi si troverebbero a maggiore distanza fra loro e spesso non s' incrocerebbero più.

Accertatomi delle maggiori deformazioni delle lastrine cotte, ho voluto osservare se questo fatto si ripeteva portando il corpo a temperatura più elevata. E perciò, poste altre lastrine già preparate, cimentate e ricondotte allo stato iniziale in un altro forno, venivano tenute per circa quattro ore alla temperatura di 200° C., poi raffreddate lentamente. Eseguendo su esse nuovamente dei cicli, si avevano, come si vede dalla tabella seguente, *deformazioni grandissime* rispetto alle precedenti, e cioè si notava un forte aumento nella flessibilità del marmo.

TABELLA II.

	Numero dei cicli	Temp. 12°	Temp. 200°	Rapp.	Dopo 15 giorni	Dopo 30 giorni
Lastrina N. 5	1° ciclo	7,500	29,499	3,930	27,750	26,374
	2° »	7,437	—	—	—	—
» » 6	1° »	7,791	25,500	3,270	24,249	23,100
	2° »	7,656	—	—	—	—
» » 7	1° »	4,500	13,998	3,110	12,498	11,749
	2° »	4,437	—	—	—	—
» » 2 (1)	1° »	12,500	30,450	2,430	30,000	27,750
	2° »	12,427	—	—	—	—

Rapporto medio: 3,4366.

In questo caso non è stato neppure possibile, causa i grandi spostamenti dell'immagine della scala, eseguire i secondi cicli; ed è da notare come una delle lastrine già precedentemente tenuta alla temperatura di 100° C., presenti, rispetto alle altre mai riscaldate, una deformazione media assai più piccola. Inoltre, riportate le lastrine allo stato iniziale e ridescritte su esse dei cicli della stessa ampiezza, come la 1ª volta, anche dopo un tempo maggiore non si riavevano più le stesse deformazioni di prima della cottura. Ma si può notare una continua diminuzione nei valori medî di esse, per quanto non si possa asserire che le lastrine ritornino alla loro costituzione primitiva, giacchè si sa che il solo ripetersi delle operazioni su esse ne altera sensibilmente la flessibilità. Però questa flessibilità coll'uso delle lastrine abbiamo visto che aumenta sempre fino ad un certo limite, nel quale poi si mantiene costantemente; ora invece ci troviamo, malgrado ciò, ad una continua diminuzione; possiamo quindi credere che non venendo alterate in nessun modo le condizioni fisiche del corpo in esame, esso riacquisti dopo un tempo più o meno lungo le proprietà sue, che aveva prima della cottura.

Portato poi il corpo a temperatura ancora più elevata, a 300°, si vede dalla tabella che segue *un aumento ancora maggiore* nella sua flessibilità. Anche in questo caso dobbiamo limitarci a riportare soltanto il 1° ciclo per

(1) Già riscaldata a 100° e ritornata nelle condizioni primitive (v. Tab. I).

ogni lastrina, non essendo stato possibile nelle nuove condizioni di esse descrivere i seguenti.

Di più non abbiamo oltrepassato questo limite di cottura, in quanto che si sa che circa i 350° comincia la decomposizione del marmo [1] e quindi andando più oltre col riscaldamento, ci saremmo trovati di fronte ad una variazione chimica del corpo.

TABELLA III.

	Numero dei cicli	Temp. 12°	Temp. 300°	Rapporto	Dopo 7 giorni	Dopo 15 giorni	Dopo 30 giorni
Lastr. N. 8	1° ciclo	4,250	19,500	4,541	20,499	22,749	22,999
" " 9	1° "	3,666	15,249	4,157	15,624	16,000	16,248
" " 10	1° "	11,166	51.750	4,634	—	52,249	52,750
" " 1[1]	1° "	7,666	31,625	4,125	32,748	33,749	33,999

Rapporto medio: 4,4440.

Da questa tabella si scorge subito che l' alterazione subita dalla lastrina rimane costante, e l' aumento che si nota nelle osservazioni successive fatte a lunghi intervalli di tempo può senz'altro attribuirsi al fatto già precedentemente accennato, che cioè provenga dall' uso ripetuto delle singole lastrine; tanto più poi possiamo ritenere costante l' aumento della flessibilità, che gli aumenti successivi vanno decrescendo e si può credere facilmente che, giunta ad un nuovo stato normale, cui già si è accennato, la lastrina non subirà ulteriori modificazioni, purchè non si alterino le condizioni fisiche del corpo in esame.

I risultati su esposti indicano un aumento graduale nella flessibilità delle lastrine coll' aumentare della temperatura, alla quale sono state esposte per una durata all' incirca costante in tutti e tre i casi. Ora si potrebbe domandare, se l' esposizione ad una data temperatura per il tempo relativamente breve, cui sono state tenute le lastrine, è sufficiente a modificare permanentemente ed al massimo grado le proprietà elastiche del corpo; oppure variando il tempo di esposizione alla stessa temperatura, varia pure il suo comportamento elastico. Dalla tabella seguente vedremo che esiste appunto questa variazione nel senso che le deformazioni aumentano colla durata della cottura, e che, quantunque questa sia stata fatta a soli 100°, pure gli effetti sono più duraturi, giacchè le lastrine non ritornano neppure nello stesso limite di tempo alle condizioni primitive.

[1] V. Comptes rendus, vol. 64, pag. 603; M. H. Debray, *Recherches sur la dissociation.*

[2] Già riscaldata a 100° e ritornata alle condizioni primitive (v. Tab. I).

TABELLA IV.

Alla temp. di 100° C.	N. delle lastrine	Rapporto	Rapporto medio
Riscaldate per 3 h.	Lastrina N. 1	14,140	0,14051
	» » 2	14,400	
	» » 3	13,608	
Riscaldate per 5 h.	» » 11	56,400	0,4967
	» » 12	40,545	
	» » 14	52,075	
Riscaldate per 8 h.	» » 16	102,84	1,0897
	» » 17	118,60	
	» » 18	105,49	

Dando uno sguardo alle Tabelle II e III, si nota subito che le lastrine già una volta riscaldate presentano rispetto alle altre un minore aumento nella flessibilità. La tabella seguente confermerà quanto sopra; le lastrine tenute prima a 100° per cinque ore sono state poi portate a 250° per circa quattro ore e si vedrà che, quantunque la cottura a 100° avesse sensibilmente aumentata la loro flessibilità, pure esposte ai 250° avevano acquistato all' incirca soltanto quell' aumento, che altre lastrine, non mai cotte, avevano preso a 200° (v. Tab. II).

TABELLA V.

N. delle lastrine	Temp. 12°	Temp. 100°	Temp. 250°	Rapporto
Lastrina N. 14	4,000	6,083	16,875	3,2187
» » 15	6,083	9,166	27,000	3,4550
» » 19	10,166	16,000	40,999	3,1331

Rapporto medio: 3,2689.

Dai risultati su esposti non si può stabilire un criterio esatto sull' aumento della flessibilità del marmo coll' aumento della temperatura e della durata della cottura. Ad ogni modo resta assodato che quesso fatto esiste, e che la variazione delle proprietà elastiche di questo corpo è dipendente dalla temperatura e dal tempo di esposizione ad essa temperatura; che l' elasticità del corpo aumenta, in quanto che agli stessi pesi flettori corrispondono deformazioni maggiori, se il corpo è stato cotto, e quindi si avrebbe una diminuzione nel suo modulo di elasticità, al contrario di ciò che è stato trovato per i metalli (1) nei quali, anche se ricotti, il modulo di elasticità è stato trovato pressochè uguale. Ma un fatto simile a quello su esposto è stato esaminato dal Winckelmann sul vetro (2), che portato da prima a temperature vicine al suo punto di fusione e poi raffreddato, ha dato forti aumenti sul

(1) V. Rend. Accad. dei Lincei, M. Cantone, vol. II, 2° sem., pag. 302.

(2) Wiedemann's Annalen, T. LXIII, n. 13, 1897, pag. 117.

coefficiente di elasticità; però in questo caso dopo un tempo più o meno lungo, esso è tornato gradualmente allo stato primitivo, come il marmo esposto per poche ore ad una temperatura non molto vicina al suo punto di decomposizione.

È notevole intanto osservare l'enorme aumento nelle deformazioni delle lastrine tenute per un certo tempo ad un'alta temperatura, che giunge fino a quadruplicarsi per una breve esposizione a 300°; aumento che impedisce l'ulteriore studio dei cicli susseguenti e che renderebbe impossibile la determinazione del coefficiente di elasticità del corpo in esame, *date pure le grandi deformazioni residue corrispondenti al carico zero dopo compiuto il 1° ciclo.* Inoltre, la modificazione subita dal marmo dopo una cottura a temperatura piuttosto elevata è tale, che *una lastrina può agevolmente piegarsi a mano in modo evidente* e produce la sensazione di una lastra snodata; e la deformazione così prodotta rimane quasi intieramente, tanto che si potrebbe, aiutandola con deformazioni lente e successive incurvarla e farla rimanere in questa posizione.

Fisica. — *Ancora sull' inclinazione magnetica durante il periodo di fabbricazione dei vasi fittili greci* (1). Nota del dott. G. Folgheraiter, presentata dal Socio Blaserna.

Resta ora da risolvere la questione, se all'epoca e nel luogo di fabbricazione dei vasi greci esaminati l'inclinazione magnetica era boreale, come attualmente, o australe. Nella parte del mio studio finora esposta, tale questione non è stata toccata perchè, come fu già detto, non vi è alcun mezzo per stabilire, se oggetti sprovvisti di decorazioni attorno alla bocca, e con anse basse siano stati collocati durante la cottura diritti o capovolti. Io ho studiato anche vasi ad ansa elevata come gli oinochoai attici a figure nere su fondo rosso del Museo archeologico di Firenze, le brocche ed olpi corinzie dello stesso Museo e di quello di Siracusa. Questi vasi, a cagione delle parti salienti al di sopra del piano della bocca, non possono essere stati collocati nella fornace che diritti, e quindi dalla prevalenza alla loro base della polarità nord su quella sud o viceversa si può decidere, se l'inclinazione del campo terrestre, che li ha magnetizzati, era nord o sud.

Ma qui, se da una parte si ha una certa garanzia sulla posizione di cottura di questi oggetti, dall'altra si ha lo svantaggio, che essi non possono essere studiati che alla periferia della base. Ora se si dà uno sguardo ad una qualsiasi delle tabelle riportate nelle parti antecedenti di questo lavoro, si riscontra sempre una discordanza tra i valori delle intensità magnetiche alla periferia della base e quelli della bocca. Talvolta la discordanza si può spiegare colla differenza di diametro delle due periferie, e di fatto in generale

(1) Vedi pag. 176 di questo volume.

si ha un' intensità maggiore, ove il diametro è minore, come lo mostra la tabella data per gli orciuoli di Pompei; ma non si possono conciliare tra loro i risultati avuti p. es. dai due vasi a figure rosse 1301 e 1289 (vedi tabella a pag. 177 di questo volume), che hanno press' a poco forma e dimensioni eguali, mentre l' intensità magnetica del primo è molto grande alla base e relativamente piccola alla bocca, e l' intensità magnetica del secondo si trova proprio nelle condizioni opposte.

Ma il peggio si è, che anche il rapporto K : K′ dedotto dall' intensità magnetica alla base è diverso, e talvolta anche notevolmente, da quello che si ricava dal magnetismo della bocca: ad esempio, se si prendono per il calcolo le intensità magnetiche della base dell' anfora n. 1284 nella stessa tabella, si ottiene come inclinazione dell' asse magnetico 21°50′; se si calcolano invece le intensità magnetiche della sua bocca, si ottiene 5°19′.

Ho già altra volta richiamato l' attenzione su questa anomalia [1], perchè essa si è prodotta anche nei cilindri cotti nel forno dell' Istituto fisico di Roma, ma ho pure in quell' occasione mostrato, che se per il calcolo dell' inclinazione dell' asse magnetico si prendono le medie dei valori della base e della bocca, l' effetto di tali irregolarità viene in generale eliminato. A mio credere esse sono dovute principalmente alle due seguenti cause:

Può darsi, che la suscettività magnetica non sia stata uniforme in tutta l' estensione dei vasi, e ciò potrebbe aver avuto luogo sia per la non perfetta simmetria nella distribuzione della materia attorno all' asse geometrico, sia per la diversa azione chimica (ossidante o riducente) della fiamma sui sali di ferro contenuti nell' argilla, e per conseguenza per la diversa quantità di sostanza magnetica prodotta nei varî punti della massa, sia in fine per la diversa temperatura alla quale sono state portate le diverse parti di uno stesso oggetto a seconda del cammino percorso dalla fiamma nell' interno della fornace.

La seconda causa sta nella disposizione adottata nel metodo di misura: l' ago dell' intensimetro viene a trovarsi sempre all' estremità più bassa di un diametro verticale della base o della bocca dei vasi. Per conseguenza si aggiunge sempre al magnetismo proprio del vaso il magnetismo temporaneo, di polarità nord, indotto dal campo magnetico terrestre. Alla periferia, che ha in prevalenza il magnetismo nord, si misura quindi un' azione maggiore, alla periferia opposta un' azione minore della vera, e per questa ragione non possono mai i valori dati dalla base essere eguali a quelli dati dalla bocca. Se però per il calcolo di K e K′ si prende la media delle intensità magnetiche fornite dalle due superficie, l' azione del magnetismo indotto dalla Terra viene eliminata.

Ma nel nostro caso speciale, nel quale si esaminano appunto oggetti ad ansa elevata o con decorazioni attorno alla bocca, non si può studiare che la distribuzione del magnetismo alla loro base, e quindi questa causa di errore

[1] Vedi questi Rendiconti, serie 5ª, vol. V, 2° sem. 1896, pag. 205.

si fa più o meno sentire a seconda del loro coefficiente d'induzione, e non si deve quindi attribuire molta importanza ai valori numerici dell'inclinazione dell'asse magnetico ottenuti. Per questo motivo le ricerche su tali vasi hanno unicamente lo scopo di dedurre, quale delle due polarità magnetiche prevalga alla base, sicuri che se la polarità prevalente è sud, questa dovrebbe essere ancora maggiore, se si potesse togliere l'effetto dovuto al magnetismo temporaneo indotto dalla Terra durante la misura, mentre si troverebbe un valore minore, se la polarità magnetica prevalente è nord.

Nella tabella seguente riporto i risultati avuti dall'esame dei 14 oinochoai greci a figure nere su fondo rosso esistenti nel Museo archeologico di Firenze, classificati secondo l'epoca alla quale vengono attribuiti.

Tabella V.

Numero	Epoca a. Cr.	Diametro della base	Altezza	Base		Inclinazione magnetica
				K + K′	K — K′	
Acquisto Pacini . . .	650-600	mm. 70	mm. 190	— 1°48′,7	+ 1° 4′5	— 9° 9′
n° 2096	»	» 90	» 265	— 1 49 8	+ 1 33 4	— 3 22
» 2097	»	» 90	» 265	+ 1 26 5	— 0 48 3	+ 11 37
» 2116	550	» 80	» 212	— 1 29 3	+ 0 59 6	— 7 46
» 2115	»	» 95	» 218	+ 1 26 7	— 1 11 8	+ 4 2
» 2114	»	» 80	» 212	+ 1 15 5	— 0 59 3	+ 4 41
Corneto Tarquinia . .	»	» 80	» 202	+ 0 37 5	— 0 26 7	+ 6 32
n° 2117	»	» 70	» 190	+ 0 46 7	— 0 32 1	+ 6 41
» 2100	»	» 85	» 200	+ 0 44 9	— 0 1 7	+ 33 28
» 1891	550-450	» 80	» 205	+ 2 8 4	— 1 11 9	+ 11 11
» 2095	»	» 80	» 225	+ 2 43 8	— 0 39 8	+ 22 36
» 2111	»	» 95	» 220	+ 1 23 6	— 0 4 4	+ 33 56
» 2112	»	» 95	» 220	+ 1 7 6	+ 0 5 9	+ 41 48
» 1895	550-400	» 80	» 225	+ 0 48 1	— 0 6 4	+ 27 38

Si scorge, che negli oinochoai attribuiti ai due ultimi periodi la polarità magnetica prevalente alla base è decisamente nord [1]; in quelli attribuiti all'epoca media 550 anni a. Cr. le due polarità sono poco diverse tra loro, sebbene ancora la positiva prevalga; solo nell'oinochoe 2116 prevale la polarità sud, ma questo vaso secondo il giudizio di competenti archeologi può bene appartenere anche ai primordi del secolo VI. Nel periodo più antico abbiamo due vasi, alla cui base prevale la polarità sud, ed un vaso, il n° 2097 (di stile ionico e forse di fabbrica ionica) in cui prevale la polarità nord; ma questo vaso può secondo competente giudizio scendere anche al secolo VI inoltrato.

[1] Giacchè non è possibile conoscere, quale sia la distribuzione del magnetismo alla bocca di questi vasi, per calcolare l'inclinazione magnetica ho usato l'equazione 3) (vedi questo volume pag. 73), nella quale ho supposto, che A′ e B′ siano = 0. Questo modo di calcolare, quantunque non corrisponda alla realtà delle cose, non influisce punto sopra il segno della polarità prevalente alla base, ma può solo modificare un po' i valori dell'ultima colonna, ai quali del resto non posso dare, come già dissi, alcun peso.

Risulterebbe da ciò, che verso il 650 a. Cr. l' equatore magnetico passava al nord dell'Attica, che al principio del VI secolo attraversava questa regione, mentre più tardi verso il 550, si trovava al sud di essa.

Prendiamo ora in esame i vasi di Corinto.

Anche di questa celebre città esistono nei nostri Musei parecchi vasi, che si attribuiscono generalmente ai secoli VII e VI a. Cr.; io esaminai tutti quelli, che sono ora raccolti nei Musei archeologici di Firenze, Siracusa ed Arezzo.

Nel Museo di Firenze ho trovato:

due brocche a figure di animali, colla bocca a foglia d' edera, a base molto larga e manico a nastro elevato;:

tre oinochoai a figure di animali in parte restaurati;

due anfore [1], una con guerrieri, l' altra con figure di animali;

un cratere;

Nel Museo di Siracusa ho trovato:

cinque grosse brocche protocorinzie, tre delle quali a disegni geometrici, la quarta a fregi bruni con animali e la quinta con fregi bruno-rossastri ed animali sulle spalle;

una grande olpe di squisitissima conservazione con bocca svasata e manico munito di rotelle.

Del Museo di Arezzo ho esaminato una grande olpe.

Se si eccettuano le due anfore di Firenze, tutti questi oggetti che portano alla bocca delle appendici elevate, od hanno l' ansa molto elevata, sono stati cotti con grandissima probabilità colla loro base in basso, ed anche questi ci possono quindi dare un indizio, se l' inclinazione del campo terrestre, che li ha magnetizzati, era boreale od australe.

Ecco i risultati avuti:

TABELLA VI.

Museo	Oggetto	Diametro della base	Altezza	Intensità		Inclinazione magnetica
				K + K′	K — K′	
Firenze . .	Oinochoe n° 1748	mm. 120	mm. 375	— 1° 52′,4	+ 0° 58′,9	— 14° 25′
» . .	» » 1749	» 115	» 335	— 1 12 9	+ 0 41 2	— 12 40
Arezzo . .	Olpe » 59	» 95	» 290	— 0 42 6	+ 0 32 8	— 5 31
Siracusa . .	» sepolcro 184	» 105	» 330	— 0 50 5	+ 0 42 8	— 3 59
Firenze . .	Cratere n° 1825	» 112,5	» 243	— 0 37 8	+ 0 37 6	— 0 9
Siracusa . .	Brocca seplocro 1302	» 130	» 142	+ 1 7 3	— 0 53 7	+ 5 24
Firenze . .	» n° 758	» 140	» 170	+ 0 25 3	— 0 21 2	+ 7 12
Siracusa . .	» sepolcro 108	» 190	» 180	+ 1 14 8	— 0 52 5	+ 9 11
Firenze . .	Oinochoe n° 1896	» 87	» 200	+ 1 2 2	— 0 39 3	+ 9 12
Siracusa . .	Brocca sepolcro 204	» 200	» 140	+ 0 20 4	— 0 13 9	+ 10 4
» . .	» » 373	» 125	» 110	+ 0 36 6	— 0 20 8	+ 12 55
Firenze . .	» n° 1759	» 130	» 130	+ 0 25 3	— 0 8 1	+ 23 36
Siracusa . .	» sepolcro 344	» 200	» 135	+ 0 24 3	— 0 8 0	+ 25 16

[1] Nella vetrina III dove sono collocati i vasi protocorinzi e corinzi si trova una terza anfora, perfettamente conservata (portante il n. 1831) che rassomiglia ai vasi di Corinto, e che si crede provenga da Tebe. L' inclinazione del suo asse magnetico fu trovata = 62°39′.

Le due anfore di Firenze (una delle quali, il n° 1814, ha il diametro della base di mm. 110, quello della bocca di mm. 135 e l'altezza di mm. 342, e l'altra, il n° 1833 ha le stesse quantità rispettivamente eguali a mm. 88, 112 e 248) hanno dato come valore dell' inclinazione magnetica 4° 18′ e 0° 14′. Si ha una conferma, che l'inclinazione magnetica all'epoca della loro fabbricazione era assai prossima a zero, ma per la mancanza di appendici elevate sopra la bocca nulla si può decidere, se essa era boreale od australe.

Come si vede, anche i vasi di Corinto conducono alla conclusione, che nel VII secolo av. Cr. l'inclinazione magnetica era nella Grecia australe; ma essa passando per lo zero era divenuta boreale ancor prima, che cessasse la fabbricazione di tali vasi.

Per quanto tempo l'inclinazione magnetica sia rimasta australe, e quale valore abbia raggiunto, non è possibile conoscere almeno per ora. Io temo però che manchi il materiale necessario per risolvere l'importante questione, a meno che non si arrivi a trovare un carattere, che ci permetta di stabilire con sicurezza, se durante la cottura siano stati collocati diritti o rovesciati i vasi, che hanno perfettamente libera sia la periferia della base sia quella della bocca [1].

Ed ora ritorniamo alle anfore attiche a figure nere. I vasi più antichi sono stati fatti assai probabilmente, quando l'inclinazione magnetica era in Grecia australe: ma quali sieno e quanti delle diverse serie da me esaminate non si può stabilire dalle misure magnetiche. Secondo la classificazione per epoche dei vasi esistenti nel Museo di Firenze dovrebbero essere soltanto quelli attribuiti al periodo 650-600 anni a. Cr., e si verrebbe in tal modo ad ammettere indirettamente, che l'inclinazione magnetica sia giunta perfino a —20°. Ma potrebbe darsi, che qualcuna di quelle anfore appartenga

[1] Sarebbe certo di grande giovamento per questo studio la scoperta di fornaci antiche, purchè venga stabilita l'epoca in cui esse hanno cessato di funzionare, e siano costruite di materiale magnetico dotato di grande forza coercitiva come le argille e molte roccie vulcaniche. Nelle mie escursioni visitai la fornace, che trovasi descritta nei cenni topografici dati dal Cavallari sulla città di Megara Hyblaea: « All'estremità occidentale del lato nord dell'antica città durante gli scavi del 1889 venne alla luce una grande fornace cilindrica del diametro di circa m. 5, addossata agli avanzi dell'antica muraglia di cinta, la quale dai frammenti dei laterizi in essa impiegati fa supporre di essere di un'epoca molto posteriore (alla distruzione della città) ». Vedi *Monumenti antichi* pubblicati per cura della R. Acc. dei Lincei, vol. I, 1890, pag. 728. Questa fornace è costruita con grossi blocchi di pietra bianca, assai comune nella provincia di Siracusa, rivestiti nella parte interna con un leggiero strato di cemento formato da laterizi sminuzzati. Staccai un pezzetto di pietra e la esaminai all'intensimetro. Ebbi una piccola deviazione, mentre eguale qualità di pietra raccolta a caso nei pressi della fornace non manifestò alcun segno di magnetizzazione: però anche questa dopo essere stata riscaldata ad elevata temperatura divenne debolmente magnetica. Questa è una prova, che realmente la fornace di Megara Hyblaea ha servito per cuocere. Non feci alcuna misura al posto allo scopo di conoscere la distribuzione del magnetismo, prima di tutto per l'incertezza che regna sull'epoca della sua costruzione e su quella in cui ha cessato di servire, ed in secondo luogo perchè non si ha un'idea sulla forza coercitiva di quella pietra calcareo-silicea.

ad epoca molto posteriore, e che viceversa qualche altro vaso attribuito ad epoche più recenti sia del periodo più antico. Anche per i vasi a figure nere esistenti nei Musei di Napoli e Siracusa evvi l'incertezza, se siano stati fabbricati, quando l'inclinazione era australe o boreale, e si comprende quindi, quanto sia inopportuno calcolare il valore numerico di quest'elemento magnetico per i singoli periodi, in cui viene suddiviso tutto il tempo, nel quale è durata la fabbricazione di quei vasi.

Quello che viene assodato da queste mie ricerche, e da quelle già esposte nella Nota antecedente si è:

1° Che nel periodo in cui s'incominciarono a fabbricare i vasi di Corinto e quelli attici a figure nere su fondo rosso, l' inclinazione magnetica in Grecia era australe (VII secolo a. Cr.).

2° Che poco tempo dopo, forse al principio del VI secolo (quando durava ancora la fabbricazione dei vasi corinzi), l'inclinazione magnetica era assai prossima a zero, e divenne poi boreale.

3° Che alla fine del periodo di fabbricazione dei vasi attici (400 anni a. Cr.) l'inclinazione magnetica boreale era vicina a 20°.

Sarebbe ora interessante il determinare l'inclinazione magnetica per una o più epoche frapposte tra il V e I secolo a. Cr. per conoscere la legge, secondo la quale essa ha variato in questo intervallo di tempo. A questo scopo mancano i vasi greci, che secondo gli archeologi hanno cessato col finire del V secolo a. Cr. Ma l'arte ceramica trasportata dalla Grecia all' Italia centrale e meridionale ha qui fiorito dal principio del IV fino alla fine del II secolo, e ne sono una prova i vasi campani, d'Apulia, etrusco-campani ed etruschi. Molti di questi vasi sono ammirabili per la perfezione delle forme, per le decorazioni e per la pittura quanto i vasi greci stessi.

Io potei esaminare le collezioni molto ricche dei Musei archeologici di Firenze e Napoli e del Museo di Villa Giulia a Roma [1]; ma le mie ri-

[1] Nel Museo di Napoli trovansi molte anfore di Apulia a figure rosse su fondo nero, parte delle quali vengono attribuite al secolo 450-450 a. Cr. e parte al secolo 350-250 a. Cr. Esse sono in generale molto grandi: salvo rare eccezioni hanno un'altezza, che varia tra 300 e 375 mm., con un diametro alla base tra 110 e 150 mm. e col diametro alla bocca tra 140 e 190 mm.

L' inclinazione magnetica dedotta dalla distribuzione del magnetismo nei singoli vasi risulterebbe:

Anfora	Epoca a. Cr.	Inclinazione magnetica	Anfora	Epoca a. Cr.	Inclinazione magnetica
n° 1526	450-350	0° 9′	n° 1567	350-250	12° 3′
1539	»	0 28	1621	»	12 15
1541	»	0 47	1536	»	13 59
1565	»	2 47	1622	»	16 36
1535	»	3 37	1616	»	17 0
1576	»	16 20	1620	»	19 9
1527	»	32 40	1625	»	39 37
1540	»	52 4	1623	»	48 50
1617	350-250	1 15	1624	»	53 25
1615	»	11 0	1579	»	58 7

cerche non portano alcuna luce sulla questione, che mi sono proposto di risolvere. La discussione dei risultati avuti non condurrebbe che ad una critica archeologica, giacchè o certi gruppi di vasi, che hanno una distribuzione del magnetismo press'a poco eguale, dovrebbero appartenere ad un'epoca molto anteriore a quella a cui vengono attribuiti, o a periodi di tempo relativamente brevi vengono assegnati vasi, nei quali la distribuzione del magnetismo è molto diversa.

Nel Museo archeologico di Firenze si trovano: parecchie anfore nolane attribuite al periodo 450-400 a. C., vasi policromi di fabbrica attica ed italiota attribuiti al periodo 400-300 a. Cr., vasi di Apulia, Lucania e Campania attribuiti al periodo 350-250 a. Cr., vasi policromi di Apulia e Campania attribuiti al periodo 300-200 anni a. Cr., vasi a decorazione policroma di fabbriche italiche (creduti di Brindisi) attribuiti al periodo 250-100 a. Cr., vasi italici così detti campano-etruschi, fatti ad imitazione della metallotecnica ed attribuiti essi pure al periodo 250-100 anni a. Cr.

I risultati sono i seguenti:

Oggetto	Epoca a. Cr.	Inclinazione magnetica	Oggetto	Epoca a. Cr.	Inclinazione magnetica
Anfora n° 1931	450-350	13° 45′	Anfora n° 1939	300-200	15° 35′
» » 1927	»	14 30	Schifo » 1116	250-100	44 40
» » 1932	»	25 2	» senza num.	»	50 54
Cratere » 1948	»	30 19	» n° 1115	»	53 24
Anfora » 1930	»	36 45	Situla senza num.	»	59 17
» » 1941	»	51 1	» n° 1059	»	59 40
» » 1919	350-250	7 25	» » 1061	»	60 8
» » 1938	»	22 35	Oinochoe n° 1086	»	17 50
» » 1917	»	25 56	» » 1085	»	22 37
» » 1936	300-200	0 0	Anfora » 1239	»	46 48
» » 1940	»	3 31	» » 1057	»	55 8
» » 1934	»	6 25			

Come si vede, dall'esame di queste due tabelle è impossibile determinare la legge, colla quale l'inclinazione magnetica ha variato dal 450 a. Cr. fino al 1° secolo. Solo per il periodo di quest'ultima tabella, che va da 250-100 anni a. Cr., vi è un discreto accordo, quando però si vogliano lasciare da parte i risultati avuti dai due oinochoai 1085 e 1086: risulterebbe in tal caso, che l'inclinazione magnetica media di questo periodo è stata 53°45′ in una regione compresa a press'a poco tra il 40° e 41° di latitudine, nella quale attualmente essa ha un valore compreso tra 55°30′ e 57°.

Nel Museo di Villa Giulia a Roma vi sono pure delle ricche raccolte di vasi etrusco-campani ed etruschi, ma la maggior parte di essi ha la forma di olpe bassa e grossa con ansa elevata e di oinochoe (col collo cosidetto a canna) pure coll'ansa elevata Ho esaminato molti di questi vasi, ed anche qui i risultati non vanno punto d'accordo tra loro: però siccome questi sono dedotti da misure fatte alla sola base degli oggetti, e quindi sono meno sicuri di quelli trovati per le anfore, così stimo inutile il riportarli.

Cristallografia. — *Sulla determinazione delle costanti ottiche nei cristalli.* Nota di C. VIOLA, presentata dal Socio BLASERNA.

È noto dai bei lavori di Liebisch (1) e Soret (2), quale via si puó seguire per determinare gli indici principali di rifrazione in un cristallo, sia valendosi del metodo della riflessione totale, sia del metodo della deviazione minima. La determinazione degli assi di simmetria ottica e degli indici principali di rifrazione della luce riesce completa con due sezioni del cristallo perfettamente arbitrarie. E la determinazione ne è così completa, che mercè le dette costanti ottiche, riesce contemporaneamente determinato l'angolo, che fanno fra loro le due sezioni prese in modo arbitrario.

Dopo Soret, Lavenir (3) fece vedere in quale maniera sia praticamente determinabile l'orientazione e la grandezza dell'ellissoide di Fresnel con due sezioni del cristallo. In breve, si può dire, che Lavenir si limitò a determinare i massimi e i minimi per mezzo delle prime e seconde differenze nella variazione degli indici di rifrazione per raggi paralleli ad un piano, ciò che la teoria ammise come dato.

Su questa via lavorò Pulfrich (4) con ottimo successo. L'opera di Wallerant (5) non diversa in sostanza da quella di Pulfrich, ma indipendente, riuscirà forse più proficua, grazie al materiale ricchissimo, che col metodo di lui sarà messo a disposizione delle esperienze. Ultimamente C. Klein (6) ha portato un miglioramento notevole al riflettometro totale di Abbe-Pulfrich, mercè il quale l'ideale di ogni petrografo coscienzioso, che voglia dare alle sue determinazioni un grado di fiducia, sarà vicino a realizzarsi, non meno che col riflettometro applicato al microscopio di Wallerant, solo forse raggiungendo una precisione maggiore e in egual tempo.

(1) Th. Liebisch, Zeitschrift für Krgstall. 1887, XII, 474. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Maggio 1888.

(2) Ch. Soret, *Sur la mesure des indices de réfraction des cristaux à deux axes par l'observation des angles limites de réflexion totale sur deux faces quelconques.* Compt. rend. 1888, 107, 176-178 e 479-482.

Idem, *Sur l'application de réflexion totale à la mesure des indices de réfraction des cristaux à deux axes.* Arch. sc. ph. nat. Genève 1888. XX, 263-286.

(3) A. Lavenir, *Sur la détermination de l'orientation optique dans un cristal quelconque.* Bullettin de la société franç. de miner. Tome XIV, 1891, 100.

(4) C. Palfrich, *Das Totalreflectometer und das Refractometer für Chemiker* etc. Leipzig 1890.

(5) Fréd. Wallerant, *Détermination des indices de réfraction des minéraux des roches.* Bull. de la soc. franç. de miner., 1897, Tome XX, pag. 234.

(6) C. Klein, *Die Auwendung der Methode der Totalreflexion in der Petrographie.* Sitzber. der k. preus. Akad. der Wissenschaften. 1898, XXVI, 317.

Come dissi, è noto che la determinazione completa delle costanti ottiche di un cristallo non è possibile con una sola sezione (ammesso che questa non abbia una orientazione speciale), perchè con una sezione conosciuta della superficie d'onda, due superficie d'onda sono possibili, mentre datene due sezioni la detta superficie è pienamente e univocamente individuata. Ma questo ragionamento regge, e le conclusioni di Soret e di coloro, che lo hanno preceduto e anche di quelli che lo hanno seguito, sono giuste, finchè non si tenga conto dei piani di polarizzazione, che si possono determinare con sufficiente esattezza col prisma di Nicol. In una mia precedente pubblicazione [1], richiamai l'attenzione su questa circostanza, che mi sembra importante, dappoichè gli istrumenti di precisione vanno diffondendosi anche fra i petrografi, nonchè fra i mineralogisti.

Tenendo conto dei piani di polarizzazione, le costanti ottiche di un qualunque cristallo sono determinabili pienamente con una sola sezione arbitraria.

La presente Nota serve per dimostrare questo principio, e il modo di applicarlo.

Chiameremo da ora in avanti con α, γ, β', β'', i due massimi e i due minimi, che si ottengono da una sezione di un cristallo in un riflettometro totale come p. e. quello di Liebisch, Abbe, Pulfrich o Abbe-Pulfrich, Wallerant ecc. α è l'indice minimo, γ è il massimo, e l'indice medio β è uno dei due β' e β''. I piani di polarizzazione dei raggi (in una qualsiasi sezione) corrispondenti ai valori di α, β, γ passano rispettivamente per gli assi principali a, b, c dell'ellissoide di Fresnel, e i piani a loro normali e passanti rispettivamente per i detti raggi, coincidono per conseguenza con i piani principali dell'ellissoide o piani di simmetria ottica. E facile disporre nell'apparecchio di Abbe, servendosi p. e. di qualche sezione di calcite o di quarzo, lo zero del Nicol in guisa che la lettura dia immediatamente l'angolo, che i piani principali dell'ellissoide fanno con la sezione del cristallo. Essendo questi piani fra loro normali, β sarà determinato per quel raggio corrisponspondente a β' o β'', il quale soddisfi a questa condizione; e poichè i piani di polarizzazione corrispondenti a β' e β'' fanno fra loro in generale un angolo grande, che in qualche caso speciale, si avvicina a 90°, ne viene che in tesi generale, e nella maggior parte dei casi, β riescirà determinato indipendentemente dagli errori, che derivano dal Nicol. Solamente se la sezione del cristallo fa un piccolissimo angolo col piano degli assi ottici, il problema diviene indeterminato perchè l'angolo, che fanno fra loro i raggi relativi a β' e β'' si avvicina a 90°, e insieme i piani di polarizzazione rispettivi si avvicinano a essere fra loro paralleli. In questo caso speciale, e solo in questo, influiscono gli errori, che si commettono nel cercare l'esatta posizione del

[1] C. Viola, Zeitschrift für Krystallographie 1899, XXXI, fasc. 1°.

Nicol per ottenere la sparizione di una linea limite, e la visione distinta e massima dell'altra [1]. Un esempio può essere più utile che ulteriori parole.

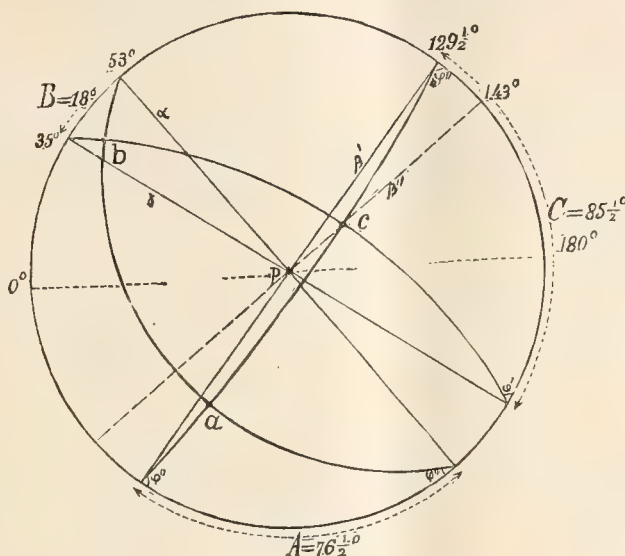
Ho un cristallo di *Albite* di Lakous, il quale mi servì già per altre esperienze, il cui risultato sarà pubblicato in un'altra Nota. Di questo cristallo feci fare una sezione bene levigata e piana, parallela prossimamente alla faccia (110). L'apparecchio per la riflessione totale di Abbe-Pulfrich è quello dell'istituto mineralogico di Monaco di Baviera. In seguito ripetei le esperîenze con un analogo riflettometro totale nell'Istituto fisico dell'Università di Roma, che mi fu messo a disposizione dal prof. Blaserna.

Osservai e puntai le linee limiti di questa sezione per tutte le posizioni di 10° in 10° da 0° a 360°. Con le prime differenze ne sono risultati i luoghi dei massimi e dei minimi e la posizione del Nicol relativa a questi ultimi. La tabella seguente dà le medie di parecchie osservazioni ottenute con la luce di Na.

Cerchio orizzontale	Curva-limite interna		Curva-limite esterna	
	Cerchio verticale	Polarizzatore	Cerchio verticale	Polarizzatore
0°	54°, 04′, 05″	14°	54°, 23′, 44″	76°
10	54 02 30	—	54 26 30	—
20	54 01 30	—	54 28 22	—
γ 35	—	—	*54 29 25*	60
40	54 00 00	—	—	—
α 53	*53 59 45*	32	54 28 20	58
60	53 59 53	—	54 27 05	—
70	54 00 18	—	54 24 54	—
80	54 01 12	—	54 22 25	—
90	54 02 26	—	54 19 34	65
100	54 03 55	25	54 17 04	—
110	54 05 23	—	54 14 35	—
120	—	—	54 13 20	—
β′ 129½	—	—	*54 12 58*	79½
β″ 143	*54 07 42*	12	54 14 24	78
150	54 07 22	—	54 15 46	—
160	54 06 37	—	54 17 54	—
170	54 05 23	—	54 20 50	—
180	54 04 06	14	54 23 44	76

Ora portiamo in proiezione stereografica, essendo p il polo della sezione, i dati di questa tabella (vedi figura annessa), e facciamo il calcolo per le

[1] L'apparizione dei tratti cuspidali nelle curve limiti, alla distanza angolare minore di 180°, ci mette in sull'avviso che il piano di sezione fa un piccolo angolo col piano degli assi ottici. Vedi a questo proposito i lavori di Soret e Palfrich sopra citati.

due ipotesi, cioè che l' indice medio di rifrazione della luce β sia ora eguale a β' e ora eguale a β''.

1ª Ipotesi: $\beta = \beta'$. — Gli angoli, che si ottengono dalla lettura, sono:

$$\begin{aligned} A &= 129\tfrac{1}{2}° - 53 = 76\tfrac{1}{2}° \\ B &= 53 - 35 = 18 \\ C &= 180 + 35 - 129\tfrac{1}{2} = 85\tfrac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Chiamiamo con φ', φ'', φ''' gli angoli che il piano di sezione fa con i piani principali dell' ellissoide di Fresnel, e avremo le relazioni seguenti:

$$\operatorname{tag}^2 \varphi' = \frac{\cos A}{\cos B \, . \cos C}$$

$$\operatorname{tag}^2 \varphi'' = \frac{\cos B}{\cos C \, . \cos A}$$

$$\operatorname{tag}^2 \varphi''' = \frac{\cos C}{\cos C \, . \cos A}$$

Ed eseguito il calcolo:

$$\begin{aligned} \varphi' &= 60°,31',03'' \\ \varphi'' &= 82\ 05\ 57 \\ \varphi''' &= 30\ 43\ 48\,. \end{aligned}$$

Le letture al cerchio del polarizzatore invece sono:

$$\begin{aligned} \varphi' &= 60° \\ \varphi'' &= 79,\ 30' \\ \varphi''' &= 32\,. \end{aligned}$$

2ª Ipotesi: $\beta = \beta''$. — Gli angoli che si ottengono dalla lettura, sono in questo caso:

$$A' = 143^\circ - 53^\circ = 90^\circ$$
$$B' = 53 - 35 = 13$$
$$C' = 180 + 35 - 143 = 72 .$$

Chiamando analogamente con φ_1', φ_1'', φ_1''', gli angoli, che il piano di sezione fa con i piani principali dell'ellissoide, otterremo da analoghe relazioni:

$$\varphi' = 0^\circ$$
$$\varphi'' = \varphi''' = 90 .$$

Mentre le letture al cerchio del polarizzatore sono:

$$\varphi' = 60^\circ$$
$$\varphi'' = 12$$
$$\varphi''' = 32 .$$

Ognun vede che la seconda ipotesi deve essere scartata, e per conseguenza gli angoli limiti, che determinano i tre indici principali dell'*albite* di Lakous, sono:

53°,59',45"	per α (1,52905)		
54 29 20	» γ (1,53858)	per luce D.	
54 12 59	» β (1,53330)		

Le costanti ottiche, cioè i tre indici α, β, γ *e i tre angoli* A, B, C *e di più l'angolo degli assi ottici sono dunque pienamente determinati con una sola sezione del cristallo, qualunque essa sia.* Questo risultato dimostrato ora, e per la prima volta, deve portare necessariamente un notevole contributo alla analisi ottica delle roccie, e alla conoscenza dei minerali, che le roccie contengono; ma porterà principalmente un progresso alla conoscenza dell'isomorfismo dei feldispati, che secondo qualche autore sarebbe scosso nel senso indicato dalla legge di Tschermak [1]. Fouqué fu costretto a determinare le costanti ottiche dei feldispati, pubblicate nel suo lavoro fondamentale, facendo eseguire sezioni speciali perpendicolari alle bisettrici (ognun sa con quante difficoltà e con esito non sempre sicuro), e scegliendo i migliori cristalli di cui disponeva. Oggi, a 10 anni di distanza, grazie ai riflettometri totali di precisione, la stessa determinazione di Fouqué è eseguibile sopra un materiale scadente, e facendo uso di una sola sezione levigata e piana, e condotta

[1] E. von Fedorow, *Universalmethode und Feldspathstudien.* III Abh. *Die Feldspäthe des Bogoslowk'schen Bergreviers.* Zeitschsift f. Krystall. 1898, XXXIX, 604. Idem *Ueber Isomorphismus.* Ibidem 1898, XXX, 17. Cfr. C. Viola, *Ueber Bestimmung und Isomorphismus der Feldspäthe.* Ibidem, 1898, XXX, 232.

in modo qualunque, e avente una grandezza, che può essere anche al disotto di un mm. quadr. Egli è però che la maggior parte dei piccoli cristalli, che sparsi si trovano a dovizia nelle roccie cristalline, viene ora a essere un materiale preziosissimo per la cristallografia, di cui un bell'esempio ci diede Wallerant.

In una prossima Nota comunicherò i risultati delle mie osservazioni, le quali io feci nell'istituto fisico di qui sull'Anortite del Vesuvio, che mi fu donata dal mio amico prof. E. Scacchi. Mi permetterò di dire due parole sui metodi di correzione da adottarsi al riflettometro totale di Abbe-Pulfrich, e sulle precauzioni che si devono usare, per raggiungere un errore nell'indice di rifrazione, il quale non superi alcune unità nella quinta decimale, e per far sì che questa precisione non sia illusoria.

Botanica. — *Sulla biologia del Cynamonium coccineum.* Nota preventiva del prof. P. Baccarini e del dott. P. Cannavella, presentata dal Corrispondente R. Pirotta.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Beltrami dà annuncio della morte del Socio straniero Sophus Lie, colle seguenti parole:

« Debbo col più profondo dolore annunziare all'Accademia che il 18 febbraio u. s. moriva in Kristiania, nell'ancor fresca età di 56 anni, l'eminente geometra norvegese Sophus Lie, nostro Socio straniero dal 4 agosto 1892. L'Accademia nostra, informata della grave perdita da un telegramma del Presidente del Senato accademico norvegese, si faceva da questi rappresentare al servizio funebre.

« In Sophus Lie la scienza matematica contemporanea perde uno dei suoi più eccelsi campioni, anzi quello che, per la singolare genialità ed originalità dell'indirizzo e dei procedimenti, occupava nel mondo scientifico una posizione quasi del tutto eccezionale, così da poter essere, e non a torto, chiamato il Wagner della matematica.

« In Italia le sue belle ricerche, ormai cresciute alle proporzioni di veri e proprî nuovi corpi di dottrina, ebbero ed hanno numerosi e valenti e appassionati cultori, ed egli se ne compiaceva assai e ne sentiva sincera gratitudine per il nostro paese, il quale ha così doppio argomento di piangere la perdita immatura dell'illustre connazionale di Abel ».

Dopo il Presidente, sorge a parlare il Socio Cremona:

« Per circa trent'anni sono stato in corrispondenza con Sophus Lie, ed ho ammirato il genio, con cui ha prodotto nella scienza un grande rivolgimento: nessun' altra sventura scientifica avrebbe potuto cagionarmi maggior dolore. Mentre da tanto tempo la produzione matematica era divisa in due correnti affatto distinte, l'analitica e la geometrica, egli le fuse insieme e portò nell'una e nell'altra tal luce, che ne rese evidente l'unità. Sino dal 1869 le sue ricerche geometriche lo avevano condotto alla nuova concezione dei gruppi di trasformazione. Di questi egli creò la teoria, e ad essa sottopose l' integrazione delle equazioni differenziali, ordinarie e parziali, la geometria projettiva, la geometria non euclidea, la geometria differenziale, la cinematica, la meccanica, la teoria degli invarianti così algebrici come differenziali. Le dottrine più svariate, i metodi più diversi diventarono per opera di lui casi particolari di un unico metodo generale, luminoso, irresistibile ».

Il Socio Cremona legge poi una lettera del Lie, l'ultima ricevuta da lui, del 2 maggio 1898. In essa, dopo aver raccontato la sfortuna toccatagli in entrambi i suoi viaggi in Italia (1870 e 1898), il Lie espone i disegni da lui ideati, per promuovere onoranze al suo grande connazionale Abel.

Il Socio Cremona finisce colle parole: « Dopo Abel, la Norvegia e la scienza hanno da piangere la perdita di un altro sommo geometra, degno di stare accanto al primo: Sophus Lie ».

E conclude col proporre che l'Accademia dei Lincei mandi le sue condoglianze alla vedova (sig.ª Anna Lie, nata Birch), alla Società delle scienze di Kristiania ed all' Università di Kristiania.

Questa proposta è approvata all' unanimità.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Socî Gemmellaro e Riccò, e dai signori Sinigaglia, Brühl, Dufet e capitano Cattolica.

Il Socio Cerruti fa omaggio dell' opera del prof. G. Vivanti intitolata: *Cenni di calcolo infinitesimale* e ne parla.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

L'I. Accademia di scienze naturali di Halle a. S.; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la Società di scienze naturali di Emden; le Società geologiche di Manchester e di Sydney; il Museo Britannico di Londra; la R. Scuola navale di Genova; l'Ufficio per la misura del grado, di Vienna.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 5 marzo 1899.

Arcidiacono S. — Principali fenomeni eruttivi avvenuti in Sicilia e nelle isole adiacenti nel semestre gennaio-giugno 1898. Modena, 1899. 8°.

Bonaventura L. — Cura dei catarri per le correnti continue etc. Milano, 1883. 8°.

Id. — Principi psicologici di elettroterapia. Cerignola, 1899. 8°.

Id. — Sulla cura della tisi. Napoli, 1891. 8°.

Denza F. — Meteorology of the italian Mountains. Chicago. S. a. 8°.

Dufet H. — Recueil de donnés numériques publié par la Société française de Physique. — Optique. 2^e^ fasc. Paris, 1899. 8°.

Gemmellaro G. G. — La fauna dei calcari con fusulina della Valle del fiume Sosio. Fasc. III. IV. 1. Palermo, 1895-99. 4°.

Hjelt E, e *Aschan O.* — Die Kohlenwasserstoffe und ihre Derivate oder organische Chemie. (V. 2, u. VI. Th. d. Roscoe-Schorlemmer's Lehrbuch d. organ. Chemie). Braunschweig, 1896-98. 8°.

Leonardi Cattolica P. — Stazione astronomica a S. Cataldo di Bari. Genova, 1899. 4°.

Lomeni A. L. — Sopra un trattamento delle flemme. S. l. 1898. 8°.

Marro M. — Istruzione ed agricoltura. Roma, 1899. 8°.

Marro M., *Nosotti I.* e *Cuboni G.* — Tre conferenze agrarie. Roma, 1899. 8°.

Mascari A, — Histoire d'un group persistant de taches solaires. Bruxelles. 1898. 8°.

Id. — Sulla frequenza e distribuzione in latitudine delle macchie solari osservate nell'Osservatorio di Catania nel 1897. Roma, 1898. 4°.

Id. — Protuberanze solari osservate nel R. Osservatorio di Catania nel 1897.

Memoria (In) di Teodoro Caruel. Firenze, 1899 8°.

Oddone E. — La misura relativa della gravità terrestre a Pavia. Milano, 1899. 8°.

Osservazioni e fotografie dell'eclisse parziale di Luna del 3 luglio 1898, fatte nel r. Osservatorio di Catania. Roma, 1898. 4°.

Riccò A. — Anomalie delle gravità nelle regioni etnee. Catania, 1898. 8.

Id. — Ciclone e caduta di polvere sciroccale nella notte del 6 marzo al 7 marzo 1898. Catania, 1898. 8°.

Id. — Continuazione della determinazione della gravità relativa in Calabria e nelle Eolie. Catania, 1898. 8°.

Id. — Controllo delle osservazioni di gravità fatte in Sicilia e Calabria. Catania, 1898. 8°.

Id. — La couronne solaire. Bruxelles, 1898. 8°.

Id. — Nuovo rilevamento topografico del cratere centrale dell'Etna. Modena. 1898. 8°.

Id. — Osservazioni sull'assorbimento atmosferico della luce fatte nell'Osservatorio etneo e nell'Osservatorio di Catania dai prof. Müller e Kempf.

Id. — Rilievo topografico e variazioni del cratere centrale dell'Etna. Catania, 1898, 8°.

Id. — Stato attuale della attività endogena nelle Eolie. Catania. 1898. 8°.

Id. — Temperatura nucleare dell'Osservatorio etneo ottenuta per differenza con le osservazioni fatte in Catania. Catania, 1898. 8°.

Id. — Terremoto etneo del 14 maggio 1898. Catania, 1898. 8°.

Riccò A. e *Eredia F.* — Temperatura media dell'Osservatorio di Catania e dell'osservatorio etneo, dedotta da 22 anni di osservazioni dell'osservatorio di Riposto. Catania, 1895. 8°.

Saija G. e *Eredia F.* — Risultato delle osservazioni meteorologiche del 1897 e 1898 fatta nel R. Osservatorio di Catania. Catania, 1898. 4°.

Sinigaglia F. — Application de la surschauffe aux machines à vapeur. Paris, 1898. 4°.

Studi sulla geografia naturale e civile dell'Italia. Roma. 1875. 4°.

Vivanti G. — Corso di calcolo infinitesimale. Messina, 1899. 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 marzo 1899.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Osservazioni sopra alcune equazioni differenziali lineari.* Nota di G. FANO, presentata dal Socio CREMONA.

1. Nella mia Nota: *Sulle equazioni differenziali lineari che appartengono alla stessa specie delle loro aggiunte* (¹) ho dimostrato, fra altro, che se $G(y)=0$ e $G'(z)=0$ sono due equazioni differenziali lineari di ordine n mutuamente aggiunte, e il gruppo di razionalità di $G(y)=0$ si compone di sostituzioni lineari trasformanti in sè stessa una forma quadratica φ a coefficienti costanti e di discriminante non nullo, l'equazione $G'(z)=0$ potrà trasformarsi nella stessa $G(y)=0$ con una sostituzione

$$y=a_0z+a_1z'+\cdots+a_{n-1}\,z^{(n-1)}$$

dove le a sono funzioni della variabile indipendente x appartenenti al campo di razionalità definito dai coefficienti delle due equazioni proposte (e loro derivate) (²). E anzi, se l'equazione differenziale $G(y)=0$ ha rispetto alla forma φ il rango r $\left(\geq 0\,,\ \leq \frac{n-1}{2}\right)$; vale a dire se, indicate con $y_1\,, y_2\,, \dots y_n$ altrettante soluzioni distinte, opportunamente scelte, dell'equazione stessa, si ha identicamente $\varphi(y)=\varphi(y')=\cdots=\varphi(y^{(r-1)})=0$, ma $\varphi(y^{(r)})\neq 0$,

(¹) Atti della R. Acc. di Torino, seduta del 26 febbraio 1899.

(²) Questa relazione fra le equazioni differenziali $G(x)=0$ e $G'(z)=0$ è anche reciproca; e queste due equazioni appartengono allora *alla stessa specie*.

l' equazione $G'(z) = 0$ potrà trasformarsi nella $G(y) = 0$ con una sostituzione:

$$y = A(z) = a_0 z + a_1 z' + \cdots + a_{n-2r-1}\, z^{(n-2r-1)}$$

nella quale $a_{n-2r-1} \neq 0$.

È chiaro poi che, per $k \geq r$, le funzioni $\varphi(y^{(k)})$, benchè non identicamente nulle, saranno tuttavia razionalmente note; e ciò avverrà in particolare per la stessa $\varphi(y)$ ove sia $r = 0$ (e si scelgano in modo opportuno le soluzioni y_i).

Questa stessa proposizione si trova sostanzialmente enunciata (benchè non dimostrata) nella Nota di Halphen: *Sur les formes quadratiques dans la théorie des équations différentielles linéaires* [1]. La condizione che la forma φ sia invariante rispetto a tutte le sostituzioni del gruppo di razionalità della data equazione non è da lui introdotta esplicitamente, ma può ritenersi tacitamente presupposta, poichè questa invarianza *formale* è conseguenza necessaria dell' essere $\varphi(y)$ razionalmente nota [2], o in particolare identicamente nulla [3], ogni qualvolta quest'ultima proprietà non sussista anche per altre forme quadratiche nelle soluzioni y_i. Però Halphen non fa alcun cenno della condizione che il discriminante della forma φ debba essere diverso da zero; condizione che a me è risultata invece essenziale, almeno finchè non si impongano a quel gruppo di razionalità delle condizioni ulteriori, tali da rendere invariante rispetto ad esso, oltre alla forma polare di φ, anche un' altra forma bilineare, di determinante non nullo. Credo perciò opportuno mostrare donde proviene questa apparente contradizione.

2. E comincio col richiamare un caso particolare di questa proposizione, considerato dallo stesso Halphen nella Memoria: *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre* [4], e per il quale egli ha anche determinata la corrispondente sostituzione $y = A(z)$. Si tratta del caso $n = 4$, $r = 1$, ossia di un' equazione differenziale lineare di 4° ordine, di cui quattro soluzioni distinte sono legate da una relazione quadratica omogenea a coefficienti costanti. Se questa relazione ha il discriminante nullo, essa può ridursi a contenere tre sole delle quattro soluzioni y_i, e può assumere quindi la forma:

$$y_1 y_3 - y_2^2 = 0.$$

L' equazione differenziale di 4° ordine $G(y) = 0$ ammetterà allora tutte le soluzioni $C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$ di una certa equazione differenziale lineare

(1) Compt. Rend. de l'Ac. d. sc., t. CI (1885); p. 664-66.

(2) Ossia, nel linguaggio usato da Halphen, eguale a una nota funzione della variabile indipendente x.

(3) In questo caso però la forma $\varphi(y)$ sarebbe soltanto invariante a meno di una costante moltiplicativa.

(4) Acta math., vol. III (1883); p. 349 e seg.

di 3° ordine, che si potrà formare razionalmente, e che a sua volta dovrà essere soddisfatta dai quadrati di tutte le soluzioni di un' equazione differenziale lineare di 2° ordine (e inversamente). Se quest' ultima equazione la supponiamo ridotta alla forma:

$$y'' + py = 0$$

quell' equazione differenziale di 3° ordine sarà:

$$y''' + 4py' + 2p'y = 0; \tag{1}$$

e l' equazione lineare più generale di 4° ordine che ammette tutte le soluzioni di quest' ultima equazione avrà allora la forma [1]:

$$(y' + qy)(y''' + 4py' + 2p'y) = 0$$

dove le espressioni fra parentesi devono considerarsi come simboli di operazioni (delle quali la prima è da eseguirsi sul risultato della seconda); quindi, per disteso:

$$y^{\text{IV}} + qy''' + 4py'' + (6p' + 4pq)\,y' + 2(p'' + p'q)\,y = 0. \tag{2}$$

L' equazione aggiunta di questa è:

$$z^{\text{IV}} - qz''' + (4p - 3q')z'' - (3q'' - 2p' + 4pq)z' - (q''' + 4pq' + 2p'q)\,z = 0. \tag{2'}$$

Calcolando pertanto per quest' ultima equazione la sostituzione con cui Halphen afferma ch' essa si trasforma nella (2) (Mem. cit., p. 350), si trova:

$$y = qz - z'. \tag{3}$$

E la funzione y così definita soddisfa bensì alla (2), ma soddisfa pure alla (1); essa non è quindi soluzione generale della (2), e la vera trasformata della (2') mediante la sostituzione (3) sarà pertanto la (1), e non già la (2). Ciò va d' accordo anche col fatto che la (2'), essendo aggiunta della (2), e potendo perciò rappresentarsi simbolicamente col prodotto:

$$(z''' + 4pz' + 2p'z)(z' - qz) = 0 \text{ [2]}$$

deve ammettere la soluzione (unica, a meno di una costante arbitraria moltiplicativa) dell'equazione differenziale di primo ordine $z' - qz = 0$, e deve

(1) Cfr. ad es. Schlesinger: *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, vol. I, p. 45-46.

(2) Cfr. ad es. Schlesinger, op. e vol. cit., p. 59. Questi due fattori sono rispett. gli aggiunti (cambiati di segno e) in ordine invertito dei due con cui si compone il primo membro della (2). In particolare la forma di differenziale $y''' + 4py' + 2p'y$ coincide (a meno del segno) colla propria aggiunta.

quindi trasformarsi colla sostituzione (3) in un'equazione differenziale di ordine inferiore al proprio di un'unità [1].

In questo caso dunque l'equazione $G'(z) = 0$ aggiunta di $G(y) = 0$ si trasforma non già nella stessa $G(y) = 0$, ma in un'equazione di ordine inferiore (con coefficienti appartenenti allo stesso campo di razionalità), della quale $G(y) = 0$ ammette tutte le soluzioni; si trasforma cioè (come potremo dire brevemente) in un *divisore razionale* di $G(y) = 0$. È in questo senso pertanto che deve intendersi la proposizione già enunciata da Halphen (e da lui anche dimostrata per $n = 4$), nel caso in cui la forma φ abbia il discriminante nullo; sussiste cioè il teorema:

Se un' equazione differenziale lineare di ordine n è tale che sia formalmente invariante rispetto alle operazioni del suo gruppo di razionalità, e perciò anche razionalmente nota, una forma quadratica $\varphi(y)$, a coefficienti costanti, fra n sue soluzioni distinte; e si indica con $r\left(0 \leq r \leq \frac{n-1}{2}\right)$ *il rango di essa rispetto a questa forma, l'equazione aggiunta di essa si trasformerà con una sostituzione razionale:*

$$y = a_0 z + a_1 z' + \cdots + a_{n-2r-1}\, z^{(n-2r-1)}$$

in un divisore razionale della stessa equazione proposta, di ordine eguale alla caratteristica del discriminante della forma φ; e quindi nella stessa equazione proposta, se questo discriminante non è nullo.

Infatti, se il discriminante di φ ha la caratteristica m ($\leq n$; e > 2, non potendo φ spezzarsi nel prodotto di due forme lineari), noi potremo ridurre la forma stessa, con un'opportuna sostituzione lineare, a contenere soltanto m variabili (rispetto alle quali il suo discriminante sarà diverso da zero); e potremo allora scegliere le n soluzioni distinte y_i dell'equazione proposta $G(y) = 0$ in modo che m fra queste, ad es. le $y_1, y_2 \dots y_m$, e le loro derivate di uno stesso ordine, rendano φ razionalmente nota, e eventualmente nulla. Il sistema lineare di soluzioni $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_m y_m$ sarà allora invariante rispetto a tutte le sostituzioni del gruppo di razionalità dell'equazione proposta; e queste stesse soluzioni dovranno perciò soddisfare a un'equazione differenziale lineare di ordine m, $Q(y) = 0$, i cui coefficienti apparterranno ancora allo stesso campo di razionalità. La forma differenziale $G(y)$ si potrà quindi rappresentare simbolicamente con un prodotto:

$$G(y) = PQ(y)$$

essendo P un'opportuna forma differenziale lineare di ordine $n - m$, a coefficienti pure razionalmente noti. E se con G', P', Q' indichiamo le forme differenziali aggiunte rispett. di G, P, Q, avremo altresì:

$$G'(z) = Q'P'(z).$$

[1] Schlesinger: op. cit., vol. II, p. 114.

Ora, il gruppo di razionalità dell' equazione differenziale $Q(y)=0$ non è altro che l' insieme delle sostituzioni determinate sulle $y_1, y_2, \dots y_m$ dal gruppo di razionalità di $G(y)=0$; e poichè queste sostituzioni lasciano invariata (formalmente) la $\varphi(y_1 \dots y_m)$ (che, come forma ad m variabili, ha il discriminante non nullo), così l' equazione $Q'(z)=0$ aggiunta di $Q(y)=0$ dovrà potersi trasformare in quest' ultima (in forza del risultato già ottenuto nella mia Nota cit.) con una sostituzione $y=A(z)$, nella quale le derivate di z compariranno soltanto fino all' ordine $m-2r-1$ incluso, se con r indichiamo il rango di $G(y)=0$, e quindi anche di $Q(y)=0$, rispetto alla forma φ. E siccome d' altra parte la sostituzione $\bar{z}=P'(z)$ trasforma evidentemente l' equazione $G'(z)=0$, nella $Q'(\bar{z})=0$; così, mediante il prodotto di queste due operazioni, ossia ponendo:

$$y = AP'(z)$$

dove le derivate di z compariranno fino all' ordine $(m-2r-1)+(n-m)$ $=n-2r-1$ incluso, noi potremo trasformare l' equazione $G'(z)=0$, aggiunta di $G(y)=0$, non già in quest' ultima equazione, ma nel suo divisore razionale di ordine $m, Q(y)=0$.

Quest' equazione $Q(y)=0$ appartiene anzi alla stessa specie della propria aggiunta (secondo la definizione contenuta nella mia Nota cit.): non così però la $G(y)=0$.

3. Un ragionamento completamente analogo permette di concludere che *se un' equazione differenziale lineare di ordine n è tale che sia formalmente invariante rispetto alle operazioni del suo gruppo di razionalità, e perciò anche razionalmente nota, una forma bilineare alternante a coefficienti costanti fra n sue soluzioni distinte* y_i *e le loro derivate prime, e si indica pure con r il rango dell' equazione differenziale proposta rispetto a questa forma* (¹), *l' equazione aggiunta della proposta si trasformerà con una sostituzione razionale:*

$$y = a_0 z + a_1 z' + \cdots + a_{n-2r-2}\, z^{(n-2r-2)}$$

(dove $a_{n-2r-2} \neq 0$) *in un divisore razionale di quest' ultima equazione, di ordine eguale alla caratteristica* (che è certo numero pari) *del determinante della forma alternante considerata.*

La dimostrazione è fondata anche qui sulla proprietà di questa forma alternante di potersi trasformare linearmente in un' altra di determinante non nullo, nella quale le variabili di ciascuna serie siano in numero eguale alla

(¹) Se si suppone cioè che questa forma alternante si annulli identicamente quando in luogo delle y_i e loro derivate prime si introducono rispett. le derivate $y_i^{(k)}$ e $y_i^{(k+1)}$ per $k<r$; e non si annulli invece quando vi si introducono le $y_i^{(r)}$ e $y_i^{(r+1)}$.

caratteristica del determinante primitivo (e risultino altresì affette dai medesimi indici). In linguaggio geometrico, si tratta semplicemente della proprietà di una quadrica o di un complesso lineare di uno spazio S_{n-1}, i quali siano $n-m$ volte degeneri, di potersi ottenere come proiezioni di varietà omonime non degeneri di uno spazio S_{m-1} da uno spazio S_{n-m-1} (asse) non incidente a quest' ultimo.

Questi due teoremi non sono però invertibili; perchè se l' equazione $G'(z)=0$ aggiunta di $G(y)=0$ si trasforma con una sostituzione razionale $y=A(z)$ in un divisore razionale $Q(y)=0$ della stessa $G(y)=0$, questo non basta nemmeno per concludere che l' equazione differenziale $Q(y)=0$ appartenga alla stessa specie della propria aggiunta, e si possano perciò applicare a quest' ultima equazione i risultati della mia Nota cit.

Sia infatti $S(y)=0$ un' equazione differenziale dello stesso ordine m di $Q(y)=0$, e tale che la sua aggiunta $S'(z)=0$ appartenga alla stessa specie di $Q(y)=0$, e si trasformi perciò in quest' ultima con una sostituzione razionale $y=A(z)$. Formiamo l' equazione differenziale lineare $G(y)=0$ di ordine $2m$ che ammette tutte le soluzioni delle due equazioni $Q(y)=0$ e $S(y)=0$ (e che ha perciò per integrale generale la somma degli integrali generali di queste due equazioni). Avremo allora:

$$G(y)\equiv PQ(y)\equiv RS(y)$$

essendo P e R opportune forme differenziali di ordine m. E passando alle forme aggiunte:

$$G'(z)\equiv Q'P'(z)\equiv S'R'(z).$$

E poichè la sostituzione $y=A(z)$ trasforma $S'(z)=0$ in $Q(y)=0$, così la sostituzione $y=AR'(z)$ dovrà trasformare $G'(z)=0$ nella stessa $Q(y)=0$; e ciò senza che su quest' ultima equazione si sia fatta alcuna ipotesi particolare.

Si può domandare infine se un teorema analogo ai precedenti non sussista anche per il caso in cui le sostituzioni del gruppo di razionalità dell' equazione differenziale proposta trasformino in sè stessa una forma bilineare non simmetrica nè alternante, il cui determinante abbia una caratteristica $m<n$. Ma la risposta è negativa.

Infatti, se la forma bilineare $\sum c_{ik}\xi_i\eta_k$, il cui determinante supporremo avere la caratteristica $m<n$, è simmetrica o alternante, i due sistemi lineari di dimensione $m-1$ determinati rispettivamente dalle forme $\sum_i c_{ik}\varrho_i$ e $\sum_k c_{ik}\varrho_k$ (dove, per maggior chiarezza, indichiamo le variabili con una nuova lettera ϱ) coincidono; mentre invece negli altri casi questi stessi sistemi lineari, pur potendo coincidere, sono in generale distinti. In ogni caso poi questi due sistemi lineari sono legati invariantivamente alla forma bilineare proposta. Da ciò si trae che, applicando alle due

serie di variabili ξ_i e η_i una medesima sostituzione lineare, noi potremo bensì trasformare quest' ultima forma in un' altra contenente soltanto m delle nuove variabili $\bar{\xi}$ e altrettante delle $\bar{\eta}$, e avente rispetto a queste il determinante (di ordine m) non nullo; ma queste $\bar{\xi}$ e $\bar{\eta}$ non saranno affette in generale — ove la forma non sia simmetrica nè alternante — dai medesimi m indici; e noi non potremo perciò considerare la nuova forma come invariante rispetto a un gruppo di sostituzioni lineari, quale ad es. il gruppo di razionalità di un' equazione differenziale lineare, nè introdurre in essa le soluzioni y_i di quest' equazione e le loro derivate, se non considerando la forma stessa come tale rispetto a due serie di un numero $> m$ di variabili (in modo da comprendere tutti gli indici). E allora il suo determinante sarà ancora nullo, e non si potranno perciò applicare le considerazioni analoghe a quelle del n. 2.

A chi ha famigliarità con considerazioni geometriche, basterà d' altronde ch' io ricordi che una reciprocità di uno spazio S_{n-1} il cui determinante abbia la caratteristica $m \leq n-1$ si riduce a una reciprocità non degenere tra due forme fondamentali di spazî aventi per sostegni rispettivi due S_{n-m-1}. Questi due spazî coincidono certo se la reciprocità è involutoria; ma negli altri casi sono in generale distinti; e soltanto quando essi coincidano, alla considerazione della reciprocità proposta si può sostituire (come a noi occorre, volendo estendere il teorema del n° 2) quella di un' analoga corrispondenza non degenere *in* uno spazio inferiore.

Matematica. — *Contributo alla determinazione dei gruppi continui in uno spazio ad n dimensioni.* Nota del dott. P. Medolaghi, presentata dal Socio Cerruti.

Alcune antiche ricerche di Engel ed altre più recenti di Picard hanno mostrato la corrispondenza che c' è tra i gruppi finiti ed infiniti e certi speciali gruppi finiti.

Io mi ero proposto già da qualche tempo di adoperare questa corrispondenza come mezzo di ricerca nel problema della determinazione di tutti i gruppi di uno spazio ad n dimensioni. Presto mi accorsi che il metodo non avrebbe avuto che le apparenze della novità: in sostanza esso coincide col metodo basato sugli sviluppi in serie dei coefficienti delle trasformazioni infinitesime nell' intorno di un punto generico; ma *soltanto nella supposizione che le trasformazioni di ordine zero siano permutabili*, cioè riducibili alla forma: $p_1, \dots p_n$.

Le considerazioni raccolte in questa Nota, mentre spiegano la ragione di tale differenza in due metodi egualmente generali, mostrano che in realtà

a rappresentare l' insieme dei gruppi transitivi bastano quei gruppi che contengono le traslazioni.

1. Se la trasformazione $y_i = y_i(x_1 \dots x_n)$, $i = 1 \dots n$, lascia invariante la espressione differenziale quadratica

$$(1) \qquad \sum_{k,\nu}^{1\dots n} f_{k,\nu}(x_1 \dots x_n)\, dx_k\, dx_\nu$$

le funzioni y_i soddisfano alle condizioni:

$$(2) \qquad f_{i,\lambda}(x_1 \dots x_n) = \sum_{k,\nu} f_{k,\nu}(y_1 \dots y_n) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\lambda} \qquad i, \lambda = 1 \dots n .$$

Secondo la natura delle funzioni $f_{i,\nu}$ il sistema può essere completamente integrabile, o avere nell' integrale generale meno di $\frac{n(n+1)}{2}$ costanti, od anche ammettere la soluzione unica $y_i = x_i$; il supporre che sia completamente integrabile non basta a caratterizzare il gruppo dei movimenti, perchè è noto dai lavori di Lie sui fondamenti della geometria che questi movimenti sono riducibili a *due* diversi tipi: il gruppo dei movimenti euclidei:

$$(3) \qquad p_k \quad , \quad x_\mu p_k - x_k p_\mu \qquad k, \mu = 1 \dots n$$

e quello dei movimenti non euclidei:

$$(4) \qquad p_k - x_k \sum_{\tau=1}^{n} x_\tau p_\tau \quad , \quad x_\mu p_k - x_k p_\mu \qquad k, \mu = 1 \dots n .$$

Cercando d'altra parte la forma di Engel per le equazioni di definizione dei gruppi (3), (4), si trova che questa forma è *comune* ai due gruppi; essa è appunto la (2). Quì dunque le equazioni di definizione sotto la forma di Engel rappresentano due gruppi, uno dei quali contenente le traslazioni.

Sarebbe facile trovare altri casi consimili; mi limito ancora ad accennare il più caratteristico: quello dei gruppi transitivi ad n parametri nello spazio ad n dimensioni. Questi gruppi, che già per $n = 2$ appartengono a tipi diversi, hanno comuni le equazioni di definizione sotto la forma di Engel, la quale è:

$$\varphi_{k,i}(x_1, \dots x_n) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k,\nu}(y_1 \dots y_n) \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \qquad k, i = 1 \dots n .$$

Prendendo p. es.

$$\varphi_{k,i} = 0 \; (k \neq i) \quad , \quad \varphi_{k,k} = 1 .$$

si ha il gruppo delle traslazioni:

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial y_k}{\partial x_k} = 1 .$$

e disponendo opportunamente delle $\varphi_{k,i}$ si otterrebbero tutti gli altri.

2. Dimostrerò ora per ogni caso che le equazioni di definizione, quando vengono assunte sotto la forma di Engel, rappresentano in generale gruppi diversi, e che tra questi ve ne è sempre uno almeno che contiene come sottogruppo il gruppo delle traslazioni.

Consideriamo successivamente i sistemi:

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{G} & \varpi_k(x) = \mathrm{I}_k \left\{ \varpi_1(y), \dots \varpi_m(y); \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dots \right\} & \\
\mathrm{S} & \overline{\varpi}_k(x) = \mathrm{I}_k \left\{ \varpi_1(y), \dots \varpi_m(y); \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dots \right\} & \\
\mathrm{S}^{-1} & \varpi_k(x) = \mathrm{I}_k \left\{ \overline{\varpi}_1(y), \dots \overline{\varpi}_m(y); \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dots \right\} & k = 1 \dots m. \\
\Gamma & \overline{\varpi}_k(x) = \mathrm{I}_k \left\{ \overline{\varpi}_1(y), \dots \overline{\varpi}_m(y); \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dots \right\} &
\end{array}
$$

in cui $\varpi(y)$, $\overline{\varpi}(y)$ stanno per brevità in luogo di $\varpi(y_1 \dots y_n)$, $\overline{\varpi}(y_1 \dots y_n)$, e le ϖ, $\overline{\varpi}$ sono due sistemi di funzioni determinate in modo che ciascuno dei sistemi G, Γ sia completamente integrabile. Le G siano le equazioni di definizione di un gruppo G; allora anche Γ è un gruppo, ed S, S^{-1} sono due schiere. Le proprietà delle funzioni I_k permettono facilmente di stabilire che la trasformazione più generale della schiera S si ottiene facendo seguire ad una trasformazione particolare della schiera stessa la trasformazione più generale del gruppo G, e che la schiera S^{-1} si compone di tutte le trasformazioni inverse a quelle di S. Combinando queste due osservazioni si arriva al risultato che la schiera S si compone di tutte le trasformazioni che trasformano il gruppo G in Γ. Condizione necessaria e sufficiente perchè i gruppi G e Γ siano simili è dunque la integrabilità del sistema S.

Grazie alla natura delle funzioni I_k, la condizione di integrabilità si può presentare sotto un aspetto invariantivo: consideriamo le $\varpi_1(x), \dots \varpi_m(x)$ come funzioni del punto nella varietà $x_1 \dots x_n$ (come sarebbero p. es. le $\mathrm{E}(u, v)$, $\mathrm{F}(u, v)$, $\mathrm{G}(u, v)$ su una superficie di cui si conosce l'elemento lineare); le S possono allora considerarsi come le formole di trasformazione delle funzioni $\varpi_1(x), \dots \varpi_m(x)$ per un cambiamento di coordinate. A queste formole si potranno aggiungere quelle che rappresentano le trasformazioni delle derivate prime, seconde, ... delle funzioni $\varpi_1 \dots \varpi_m$; e si determineranno quelle espressioni formate con le ϖ e le loro derivate che restano invarianti per ogni cambiamento di coordinate.

Sia:

$$
\begin{array}{c}
\alpha_1 \left(\varpi_1(x), \dots \varpi_m(x); \dfrac{\partial \varpi_1}{\partial x_1}, \dots \right) \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_r \left(\varpi_1(x), \dots \varpi_m(x); \dfrac{\partial \varpi_1}{\partial x_1}, \dots \right)
\end{array}
$$

il sistema completo di questi invarianti.

Per riconoscere se il sistema S, (od S^{-1}), è integrabile, bisognerà calcolare anche le espressioni:

$$\alpha_1 \left(\overline{\varpi}(y), \dots \overline{\varpi}(y); \frac{\partial \overline{\varpi}_1}{\partial y_1}, \dots \right), \dots$$

e vedere poi se il sistema:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \left(\varpi_1(x), \dots \varpi_m(x); \dfrac{\partial \varpi_1}{\partial x_1}, \dots \right) = \alpha_1 \left(\overline{\varpi}_1(y), \dots \overline{\varpi}_m(y); \dfrac{\partial \overline{\varpi}_1}{\partial y_1}, \dots \right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_r \left(\varpi_1(x), \dots \varpi_m(x); \dfrac{\partial \varpi_1}{\partial x_1}, \dots \right) = \alpha_r \left(\overline{\varpi}_1(y), \dots \overline{\varpi}_m(y); \dfrac{\partial \overline{\varpi}_1}{\partial y_1}, \dots \right) \end{array} \right.$$

è compatibile.

Notiamo a questo punto che se il sistema S è integrabile, il suo integrale generale ha lo stesso grado di generalità (per quel che si è visto sulla natura delle soluzioni di S) dell'integrale di G; e che se G è transitivo, tra le sue equazioni di definizione non ve ne è nessuna di ordine zero. Non ve ne sarà dunque nessuna nemmeno nel sistema S, e poichè le equazioni (5) appartengono al sistema S e sono di ordine zero, esse devono ridursi a delle identità: ciò che, data la natura di quelle equazioni, non può avvenire altro che supponendo costanti gli invarianti $\alpha_1 \dots \alpha_m$.

Senza insistere maggiormente sulle condizioni di equivalenza di due gruppi, basta per lo scopo attuale osservare che le funzioni $\varpi_1(x), \dots \varpi_m(x)$ sono soggette soltanto alle condizioni:

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \left\{ \varpi_1(x), \dots \varpi_m(x); \dfrac{\partial \varpi_1}{\varpi x_1}, \dots \right\} = \text{costante} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 \left\{ \varpi_1(x), \dots \varpi_m(x); \dfrac{\partial \varpi_1}{\partial x_1}, \dots \right\} = \text{costante} \end{array} \right.$$

È facile infatti riconoscere che inversamente ogni gruppo G le cui funzioni $\varpi_1(x) \dots \varpi_m(x)$ soddisfano alle (6) è transitivo e le sue equazioni G formano un sistema completamente integrabile. Alle condizioni (6) si soddisfa certamente prendendo per $\varpi_1 \dots \varpi_m$ delle costanti, nel qual caso il gruppo G contiene il sottogruppo delle traslazioni [1]; quindi tra i gruppi che vengono rappresentati da uno stesso sistema di Engel ve ne è certamente uno che contiene tutte le traslazioni.

3. Un gruppo qualunque si assume ordinariamente come rappresentante di una schiera infinita di gruppi; di tutti quelli cioè che si deducono dal dato con un cambiamento di variabili.

[1] Comptes rendus; 25 aprile 1898.

Se si pensa che dato un gruppo è sempre possibile presentare le sue equazioni di definizione sotto la forma di Engel, sembrerà giustificato l' assumere quel gruppo come rappresentante di tutti quegli altri che hanno a comune con esso la stessa forma. E siccome tra questi vi è sempre, come si è visto precedentemente, un gruppo con le traslazioni si potrà ogni volta assumere come rappresentante appunto questo gruppo. Il problema della determinazione dei gruppi continui in uno spazio ad n dimensioni viene così considerevolmente semplificato.

Matematica. — *Sulle equazioni a coppie di integrali ortogonali.* Nota di T. Levi-Civita, presentata dal Socio Beltrami.

Le equazioni

$$\frac{\partial u}{\partial z} = A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} \tag{E}$$

tali che, per ogni famiglia $f_1(x, y, z) =$ cost *di superficie integrali, ne esiste un' altra ortogonale* $f_2(x, y, z) =$ cost, *sono tutte e soltanto quelle, le cui caratteristiche*

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = -dz$$

godono della seguente proprietà:

Le rette cicliche, che, corrispondentemente ad ogni punto P *dello spazio, giacciono nel piano* π, *normale in quel punto alla caratteristica, non esauriscono, come nel caso generale, il complesso ciclico, ma formano soltanto un sistema* ∞^2, *cioè due congruenze* (coniugate, quando i coefficienti A e B sono reali).

Ho stabilito non è guari questo risultato con procedimento analitico (1). Eccone una brevissima dimostrazione sintetica.

Sieno P e Q due punti generici dello spazio, π e χ i rispettivi piani normali alle caratteristiche. Per ogni famiglia $f(x, y, z) =$ cost di superficie integrali, diciamo ordinatamente a e b le intersezioni con π e χ dei piani tangenti α, β in P, Q.

Facendo variare la famiglia f, si viene a porre una corrispondenza fra le rette a del fascio (π, P) (così designamo il fascio, che appartiene al piano π ed ha P per centro) e le rette b del fascio (χ, Q). Per la natura della equazione (E), questa corrispondenza è tale che, ad una coppia qualunque di rette ortogonali del primo fascio, corrisponde nel secondo una coppia

(1) Cfr. la Nota precedente: *Sulle congruenze di curve.*

pure ortogonale, quindi alle rette cicliche i, i' di (π, P) rispettivamente le j, j' di (χ, Q).

Di quà risulta che quella particolare famiglia $\varphi(x, y, z) = \text{cost}$ di integrali della (E), il cui piano tangente α in P taglia π secondo i (famiglia che si può sempre costruire) interseca ogni altro piano χ secondo una retta j pure ciclica.

Si vede poi subito che α è un piano ciclico, cioè tangente al cono I^2, che proietta da P il cerchio immaginario all' infinito.

Infatti, per ciascuna coppia di integrali ortogonali di (E), i rispettivi piani tangenti in P sono coniugati rispetto ad I^2, perciò α risulta coniugato a sè stesso, ossia ciclico. Lo stesso evidentemente è a dirsi di ogni altro piano tangente alla superficie $\varphi(x, y, z) = \text{cost}$.

Assumiamo ora il punto Q vicinissimo a P sopra i: A meno di infinitesimi d' ordine superiore, esso si può risguardare situato sopra la superficie $\varphi(x, y, z) = \text{cost}$, che passa per P, e quindi il piano tangente β in Q contiene la retta PQ, cioè i. D' altra parte, per quanto s' è osservato, è questa l' unica retta ciclica, passante per Q e situata in β. Ne viene che la intersezione j di β con χ è la stessa retta i.

Dimostrato ciò per il punto Q di i, contiguo a P, si conclude con facile illazione che lo stesso vale per ogni punto Q della i.

In altri termini, la corrispondenza, che la considerazione delle superficie $\varphi(x, y, z) = \text{cost}$ stabilisce fra ogni punto P dello spazio e una delle due rette cicliche i del fascio (π, P) è tale che, ad ogni altro punto di i, corrisponde sempre la retta stessa.

Le i costituiscono dunque una congruenza (e così le i'), giusta l' asserto.

La reciproca è pur vera, come si riconosce in modo perfettamente analogo.

Fisica. — *Sul ripiegamento dei raggi Röntgen dietro gli ostacoli* (¹). Nota dei dott. R. Malagoli e C. Bonacini, presentata dal Socio Blaserna.

1. L'idea di un ripiegamento dei raggi X dietro gli ostacoli sorse fino dalle prime ricerche fatte intorno ad essi.

In certe apparenze di penombre che vennero notate nelle imagini di fenditure o di reticoli, si vollero vedere delle vere frangie di diffrazione, e si cercò subito di dedurne valori per le lunghezze d' onda dei raggi X, od almeno dei limiti superiori (²).

Nello stesso tempo si ebbero numerose osservazioni dirette di un apparente ripiegamento dei nuovi raggi (³), essendosi constatato che essi manifestavano

(¹) Lavoro eseguito nel R. Istituto tecnico di Modena.

(²) Cfr. lavori di Perrin, Sagnac, Calmette et Lhuillier, Gouy, Fomme, Kümmel, Precht, ecc.

(³) Ròiti, Rend. Lincei, marzo 1896; Villari (ibid); Righi, ecc.

le loro azioni anche nell'*ombra* degli ostacoli. Tale fenomeno fu rilevato sperimentando con tutti tre i metodi di ricerca relativi ai raggi Röntgen; cioè il fotografico, il fluoroscopico, e l'elettroscopico: senonchè, in seguito alle belle ricerche del Righi ([1]), completate dal Villari e generalizzate poi dal Perrin ([2]), ecc., si dovette fare una riserva in merito al terzo metodo.

Poichè, difatti, per produrre effetti elettro-dispersivi non è necessario che i raggi X incidano direttamente sul corpo elettrizzato, ma basta che incontrino le linee di forza che ad esso fanno capo, è chiaro che il metodo elettroscopico non è adatto per ricerche che riguardano la propagazione rettilinea dei raggi X (se non quando il campo elettrico del conduttore scaricato sia chiuso), ed in particolare per le ricerche di cui parliamo.

L' interpretazione di tutti i fenomeni succitati, come conseguenze di una vera flessione dei raggi X, non si mantenne però a lungo: ma venne sostituendosi generalmente l'altra che li considera come effetti di penombra, dovuti alla forma ed estensione della sorgente, ed alla molteplicità dei luoghi di emissione. Tale idea, dapprima lanciata dal Ròiti ([3]), ripresa più tardi da altri, ed in particolare dal Sagnac ([4]), il quale un tempo però ([5]) era pel ripiegamento, veniva completamente sanzionata da una serie ordinata di ricerche, fatte in comparazione coi fenomeni luminosi, dall' Ercolini ([6]), ed indirettamente confermata dallo stesso ([7]) sui valori delle lunghezze d' onda ottenute dai diversi sperimentatori dei raggi X ([8]).

Ciò non escluse che i fenomeni di apparente ripiegamento dei raggi X venissero anche attribuiti ad una *disseminazione* di questi raggi da parte dell' aria ([9]); oppure, più tardi, ad una cripto-luminescenza di questa ([10]). E ciò crediamo, non tanto perchè si cercò da alcuni di provare che i raggi X manifestavano effetti entro l' *ombra geometrica* degli ostacoli ([11]), ma sopra-

([1]) Memorie dell'Accademia di Bologna, 31 maggio 1896.

([2]) Journal de Physique, agosto 1896.

([3]) Rendiconti Lincei, 1 marzo 1896.

([4]) Comptes rendus, 23 novembre 1896.

([5]) Comptes rendus, 31 marzo 1896.

([6]) *La pseudo-diffrazione dei raggi X.* Nuovo Cimento, aprile 1897.

([7]) Loc. cit.

([8]) Ci piace notare che la questione in discorso, in quanto si connetteva intimamente coll'altra di costruire una sorgente piccolissima di raggi X per avere imagini radiografiche a contorni netti, era stata implicitamente, se non risolta, già molto chiarita dalle ricerche del Colardeaux sul tubo *focus*, che porta il suo nome. (Eclairage électr., T. VIII, 18 luglio 1896).

([9]) Righi, Rend. Lincei, 3 maggio 1896; Villari, Rend. Lincei, 6 giugno 1896; Müller, Wied. Ann. N° 8, 1896, ecc.

([10]) Röntgen, 3ª Memoria, maggio 1897; Sagnac, Comptes rendus, 19 luglio 1897; Villard, Comptes rendus. 26 luglio 1897, ecc.

([11]) Buguet, Comptes rendus, 16 agosto 1897.

tutto perchè si cominciò a far sentire quella influenza delle diffusioni di ambiente, che noi, inascoltati, facevamo rilevare fino dall' aprile 1896 ([1]).

Comunque, un reale ripiegamento dei raggi X dietro gli ostacoli, pareva ormai generalmente escluso.

2. Ciò non pertanto, il prof. Villari, in una sua Nota dell'estate scorsa ([2]), dopo aver riferito ad alcune sue esperienze riguardanti le modalità delle ombre radiografiche, concludeva ancora « per una probabile ed estesa flessione dei raggi X nell' ombra generata da un corpo opaco che li intercetta ».

Egli collocava, ad interrompere il fascio dei raggi X, un disco di piombo, assai spesso, posto ad una certa distanza da una « lastra sensibile ben chiusa in una scatola di cartone nero », ed a meglio apprezzare le differenze di tono delle varie parti dell'ombra, collocava sullo strato sensibile delle striscie di piombo. Di queste poi, i raggi supposti flessi dovevano disegnare l' imagine nell' ombra del disco.

Poichè nelle nostre ricerche sulla diffusione dei raggi X ([4]) abbiamo dovuto, sia pure in via secondaria, interessarci di continuo a queste azioni indirette dei raggi stessi, dopo la Nota del Villari abbiamo voluto occuparci direttamente della questione.

Cominciammo perciò col ripetere le esperienze del Villari, nelle condizioni da lui descritte, confermando pienamente i suoi risultati. Un' altra serie di esperienze abbiamo poi fatto modificando ordinatamente le condizioni nel modo che diremo. E in seguito ai risultati ottenuti, ci è parso di poter considerare il fenomeno da un punto di vista più comprensivo di quello che non sia stato fatto fin qui.

3. Le azioni radiografiche (o criptoscopiche) che si osservano nell' ombra dei corpi opachi ai raggi X possono attribuirsi a più cause che giova distinguere:

a) Causa principale, prevalentissima, è senza dubbio l' estensione della sorgente che emette i raggi X (piastrina anticatodica nei focus), nonchè la molteplicità dei luoghi di emissione secondaria. Come abbiamo detto sopra, di ciò si hanno ormai prove le più sicure. Ci limitiamo quindi (soltanto a titolo di conferma) a riferire qui, che operando col dispositivo Villari, abbiamo visto l'ampiezza e l' entità delle penombre andar scemando man mano che si limitava il fascio degli X con diaframmi sempre più piccoli e, meglio ancora, con parecchi di essi a centri allineati.

Perciò riteniamo che le apparenze osservate dal Villari siano da attribuirsi *principalmente* a questa circostanza, dappoichè non è detto che egli abbia preso precauzioni in proposito.

([1]) Rendiconti Lincei, 26 aprile 1896.
([2]) *Le ombre dei raggi* X *studiate colla fotografia*, Rend. Lincei, 11 giugno 1898.
([3]) Rendiconti Lincei, 26 aprile 1896, 20 febbraio 1898, 3 aprile 1898.

b) Come causa secondaria, i cui effetti riescono sensibili solo attenuando l'influenza della causa *a*), è da considerarsi la diffusione dei corpi circostanti allo strato sensibile che vengono colpiti direttamente dal fascio; ed in particolare dell'involucro dello strato stesso e del vetro su cui per avventura esso sia steso. Ed in ciò va naturalmente compresa non solo la diffusione di raggi X da parte di corpi del nostro tipo B ([1]), ma anche la trasformazione dovuta a corpi del tipo A.

Per mettere ora in rilievo questa circostanza, dopo limitato il più possibile il fascio agente, abbiamo fatto esperienze comparative esponendo una volta una lastra sensibile chiusa in una scatola di cartone, come faceva il Villari, e un'altra una pellicola nuda, secondo il nostro dispositivo, già descritto in altra occasione ([2]) che permette di eliminare l'azione di ogni diffusore di solido.

Fra queste due prove si nota subito una grande differenza; le tracce delle striscie di piombo a contatto dello strato, che nella prima si disegnano complete, cioè per tutta l'estensione dell'ombra del disco, nel secondo caso si riducono ad un accenno lungo il bordo dell'ombra di esso.

In tutte le esperienze del Villari questa circostanza dovette avere la sua influenza; ma gli effetti non potevano riuscire sensibili, neppure nelle esperienze appositamente istituite « per accrescere le supposte o possibili ri- « flessioni degli X su corpi solidi » ([3]); giacchè non solo la causa *a*) prevalente tendeva a mascherare ogni altro effetto secondario, ma tra la diffusione dei solidi doveva più di ogni altra farsi sentire quella che non mancava mai, dovuta cioè alla scatola.

c) Infine è da considerarsi l'azione diffondente dell'aria. Essa invero potrebbesi anche comprendere nelle diffusioni d'ambiente sopra citate; ma noi preferiamo distinguerla: 1° perchè i suoi effetti sono di un ordine di grandezza assai minori di quelli delle due precedenti, e si rendono quindi sensibili solo per pose lunghissime e quando si possa trascurare ogni altra azione diffondente. Ci permettiamo di richiamare qui la nostra esp. 4ª (Nota Iª *Sulla diffusione*, Rend. Lincei, 20 febbraio 1898), che non solo mostra l'esistenza, ma anche dà idea dell'*entità* della diffusione dell'aria, e che non è in alcun modo spiegabile con ripiegamento dei raggi X, in seguito al dispositivo adoperato. 2° perchè il suo effetto, che persiste anche sopprimendo entro certi limiti di distanza i corpi non gasosi, non può viceversa essere tolto che introducendo l'influenza di questi (a meno che non si operi con pose molto brevi).

Nelle esperienze del Villari, dove predominano le cause *a*) e *b*), è quindi inutile invocare la causa *c*). Ma nelle nostre prove dove la *b*) è del tutto

([1]) Rendiconti Lincei, 3 aprile 1898.

([2]) Esperienza 2ª, Nota del 20 febbraio 1898.

([3]) Villari, loco citato, pag. 293.

soppressa, e la *a*) è ridotta il più possibile, non possiamo escludere un contributo della diffusione dell'aria in quei residui d'imagine delle striscie che, come dicevamo, non siamo riusciti a sopprimere. E del resto, tutti gli sperimentatori, in un modo o nell'altro, hanno riconosciuto un'influenza dell'aria nelle azioni radiografiche dei raggi X dietro gli ostacoli.

4. Da questa analisi delle circostanze che possono concorrere alla produzione di quei fenomeni che si vogliono ancora interpretare in base ad una flessione dei raggi X dietro gli ostacoli, ci sembra di poter concludere negativamente rapporto alla flessione stessa.

L'esperienza veramente decisiva in proposito, è vero, noi non l'abbiamo fatta: ma si pensi che per realizzarla, bisognerebbe teoricamente poter disporre: 1° di una sorgente puntiforme; 2° di un ambiente abbastanza ampio e completamente vuoto. Ed oltre a ciò bisognerebbe aver cura che l'ostacolo (a cui devesi pure attribuire un certo spessore) fosse limitato lateralmente da un tronco di cono, il cui vertice coincidesse colla sorgente, e che la pellicola sensibile fosse limitata entro il cono d'ombra: ciò ad evitare anche le diffusioni dovute ai corpi che prendono parte inevitabilmente alla esperienza.

5. Le ricerche del prof. Villari, dalle quali abbiamo preso le mosse, furono fatte con tubi *focus* e con tubi *Crookes a pera;* e le modalità dell'ombra si presentavano nei due casi alquanto diverse. Noi invece abbiamo fatto le ricerche precedenti usando solo tubi *focus.* Ma non riteniamo per questo, di dover fare delle riserve sulle nostre conclusioni, dappoichè le considerazioni relative alle cause *b*) e *c*) dell'apparente ripiegamento, non dipendono evidentemente dalla natura del tubo e, d'altra parte, le ricerche dell'Ercolini [1], fatte anche sui tubi Crookes, ci autorizzano a mandar buone per essi le considerazioni relative alla causa *a*).

6. A complemento di questa nostra Nota giudichiamo opportuno aggiungere qualche considerazione a proposito di una più recente pubblicazione del Villari [2], il cui argomento principale è in verità, affatto distinto da quello dell'altra, a cui ci siamo fin qui riferiti; ma che in linea secondaria si collega alla questione di cui trattiamo.

In questo suo lavoro l'A., dopo aver confermato con nuove esperienze la parte che spetta all'aria negli effetti dispersivi dei raggi X, riesce a spiegare in modo elegante certe anomalie che si verificano durante il periodo iniziale della scarica di un elettroscopio, e che egli stesso ed altri avevano già osservato senza darsene ragione soddisfacente.

Però, nel dare una spiegazione *completa* della scarica che producono i raggi X dietro gli ostacoli, egli richiama ancora l'intervento dei raggi « flessi o comunque diffusi ».

(1) Ercolini, loco citato.
(2) Rendiconti Lincei, 20 novembre 1898.

Ora, il metodo elettroscopico non essendo, per consenso dello stesso Villari, il più adatto per conclusioni relative a fenomeni in cui si tratti di propagazione rettilinea ([1]), non possiamo considerare questa sua insistenza nell'idea della flessione come un nuovo argomento che combatta le nostre osservazioni precedenti. Tanto più poi che nei raggi *comunque diffusi*, che egli ammette accompagnare i *flessi*, si può, secondo noi, trovare sufficiente spiegazione dei fatti osservati. S'intende che nei raggi diffusi noi comprenderemmo e quelli che si conservano ancora raggi X, ed i trasformati, come abbiamo già detto sopra.

Che le influenze degli uni e degli altri non siano sempre tali da trascurarsi, e si debba quindi di esse tener conto nello sperimentare coi raggi X, più di quanto non si faccia d'ordinario, non è questa la prima volta che noi cerchiamo di mettere in rilievo. Ci permettiamo d'insistere qui ancora, cogliendo occasione da una delle esperienze descritte dal prof. Villari, che egli interpreta attribuendo alla carta un potere specifico, mentre a noi sembra di poterla spiegare appunto col semplice intervento delle diffusioni.

La pallina di un elettroscopio (ben protetto da ogni altra azione) viene introdotta in un tubo cilindrico orizzontale, chiuso ad una estremità, così da trovarsi a poca distanza dal fondo. I raggi X penetrano nel tubo lungo l'asse, dall'estremità aperta. A parte i fenomeni iniziali, allorchè la scarica diventa regolare, si osserva che se il tubo è di carta, l'azione scaricatrice è più debole di quella che dà un eguale tubo di zinco ([2]). Ciò che si spiega, secondo noi, agevolmente, se si pensa alla grande trasparenza della carta, dall'A. riconosciuta « perfetta » (pag. 271), e se si pensa che i raggi trasformati dallo zinco, aventi, come è noto, un potere scaricatore, debbono accentuare ancora il distacco.

Il Villari poi esperimenta con due tubi di zinco uguali, tappezzati internamente, l'uno con carta, l'altro con sottile foglia di zinco per mantenere identico il vano d'entrambi. L'azione scaricatrice di quello che porta la carta è notevolmente minore di quella dell'altro. La ragione di questa differenza sembra a noi attribuibile al fatto, che mentre la carta è trasparente per i raggi diretti, lo è assai poco per quelli che ritornano, dopo subìta la trasformazione a contatto dello zinco che sta dietro.

Dall'esame dei tempi impiegati dalla foglia dell'elettroscopio per cadere di un grado e che il Villari espone, risulta altresì maggiore il potere scaricatore del tubo di zinco foderato di carta, che non quello del solo tubo di carta. Ed anche ciò si spiega facilmente, ricordando che è in parte trasparente ai raggi trasformati dallo zinco.

([1]) Rendiconti Lincei, 11 giugno 1898.
([2]) Nota 20 novembre 1898, pag. 270.

In base a queste spiegazioni si dovrebbero ottenere risultati ancora salienti usando, ad esempio, alluminio e zinco anzichè carta e zinco: dappoichè come tutti i corpi del tipo B cioè prevalentemente diffusori, l'alluminio che è molto trasparente per i raggi X incidenti è molto opaco per le radiazioni trasformate che provengono dallo zinco del tubo esterno.

Fisica. — *Sulla teoria del contatto* [1] (*attrazione di metalli eterogenei*). Nota III di QUIRINO MAJORANA, presentata dal Socio BLASERNA.

Poichè secondo l' enunciato di Volta metalli eterogenei posti in comunicazione metallica sono a potenziali elettrici differenti, essi debbono, se convenientemente disposti, attirarsi.

Sperimentalmente non era stata peranco verificata l' esistenza di quest' attrazione; anzi Lord Kelvin, in un suo recente lavoro [2], è d' avviso che sarebbe estremamente difficile se non del tutto impossibile, di mostrare per mezzo di esperimento, l' attrazione di due dischi metallici eterogenei.

Realmente, se si rimane nel caso di due dischi piani e paralleli nell' aria, non si arriva a scorgere nessun fenomeno attrattivo; ma usando speciali accorgimenti si può nettamente constatare l' attrazione di pezzi metallici.

Scopo della presente Nota, è di accennare ad esperienze, rivolte alla constatazione dell' accennato fenomeno.

Anzitutto consideriamo due corpi metallici eterogenei; essi, dopo essere stati riuniti metallicamente, o dopo essere stati scaricati al suolo, sono a potenziali differenti. Gli strati elettrici che ricoprono i due metalli esercitano tra loro una forza che, in tesi generale, è attrattiva. La forza newtoniana che contemporaneamente agisce tra le due masse metalliche, sarà generalmente diversa dalla forza elettrica.

Nei casi sperimentali di cui dirò nella presente Nota, le attrazioni che ho constatato debbono essere interpretate come dovute alla forza elettrica;

(1) Dopo la pubblicazione delle prime due Note *sulla teoria del contatto*, sono venuto a conoscenza, che il prof. Righi in una sua Memoria non recente (*Sull'azione dei coibenti nelle esperienze di elettricità di contatto*, Acc. dei XL, serie III, vol. II, pag. 15) già aveva riconosciuto, che avvicinando due pezzi metallici eterogenei, si ottengono cariche contrarie a quelle della esperienza di Volta. La pubblicazione del prof. Righi è antecedente alle esperienze di Exner, alle quali ho accennato nella 1ª nota.

(2) Phil. Mag. Luglio 1898, p. 104.

la forza newtoniana, agendo tra le piccole masse poste in vicinanza, è di un ordine di grandezza molto inferiore.

La disposizione sperimentale che mi ha dato i migliori risultati è la seguente:

Un filo di quarzo dello spessore di $^1/_{100}$ di mm. od anche meno e di 10 cm. di lunghezza, è argentato su tutta la sua superficie. La sua estremità superiore, successivamente ramata per piccol tratto, è saldata ad un fil di rame rigido, isolato.

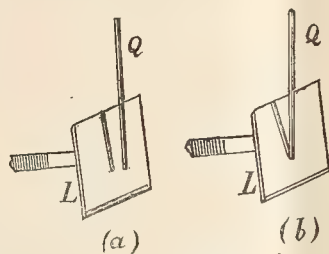



Fig. 1.

La estremità inferiore, molto ingrandita, è rappresentata in Q nella fig. 1; accanto ad essa trovasi una lastrina quadrata di zinco speculare, di 1 cm. di lato, che può venire accostata al fil di quarzo, mediante un finissimo movimento a vite. Tutto il sistema è chiuso ermeticamente dentro una scatola con pareti di vetro, dal di fuori della quale possono a volontà stabilirsi comunicazioni elettriche, sia col fil di quarzo che con la lastrina di zinco, e questa può spostarsi mediante la vite.

Con un microscopio, il cui asse ottico è normale al fil di quarzo, e poco inclinato sul piano della lastrina di zinco, si riesce facilmente ad osservare l'estremità Q, e la sua immagine riflessa dalla lastrina.

Il filo di quarzo deve essere alquanto inclinato sullo zinco, in guisa che quando è avvenuto il contatto, si osservi al microscopio un'immagine simile al (*b*), della fig. (1).

L'artificio indicato, di osservare oltre che il filo, la sua immagine, riesce utilissimo nello scoprire i piccoli movimenti di quello. Essi rimangono infatti pel nostro occhio, come raddoppiati. Le esperienze che descriverò in seguito possono ripetersi anche servendosi di un microscopio a proiezione; essi si rendono così visibili ad un intero uditorio; in tal caso occorre non adoprare luce molto intensa, giacchè altrimenti il fil di quarzo subirebbe spostamenti dalla sua posizione di riposo, per le azioni calorifiche.

Pongansi ora il filo e la lastrina in comunicazione metallica tra loro, e col suolo. Quest'ultima operazione è necessaria, perchè non avvengano perturbazioni accidentali.

Osservando col microscopio il fil di quarzo, e lavorando lentissimamente colla vite, in guisa da avvicinar lo zinco, quando la distanza fra la punta Q e la sua immagine è di circa $^2/_{10}$ di millimetro, si osserva un moto brusco del filo di quarzo verso la lastrina; il filo di quarzo argentato è dunque attratto dallo zinco.

Che questa attrazione sia dovuta alla eterogeneità dei metalli è facilissimo constatare: Una lastrina di argento non attira il fil di quarzo argentato; l'attrazione c'è sempre, anzi è più marcata, sostituendo allo zinco l'alluminio; è facile osservarla col rame; è debolissima con l'oro. Dorando il filo argentato, questo rimane attratto debolmente da una lastrina di argento, niente da una

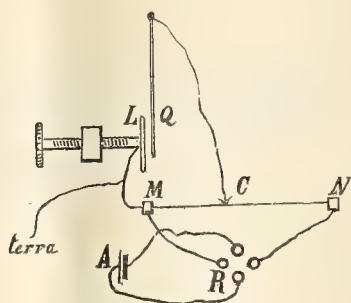



Fig. 2.

d'oro. Lastrine di altri metalli si comportano sensibilmente col filo dorato, come col filo argentato.

Ma al fine di studiare meglio il fenomeno, consideriamo il dispositivo della fig. 2. La lastrina L ed il filo Q sono riuniti ciascuno ai punti M e C di un filo di argentana MN, percorso dalla corrente di un accumulatore, di grande capacità e di vecchia carica. Se il filo MN è abbastanza resistente, l'accumulatore non si scarica sensibilmente durante l'esperienza e i due punti M ed N restano alla differenza di potenziale di circa 2 volt; la qual cosa vien verificata di tanto in tanto con un elettrometro. Il punto di attacco C è mobile su MN, così che si può variare a volontà la differenza di potenziale tra L e Q. Pongasi il commutatore R in guisa, che la corrente vada da N in M. Con ciò l'argento del filo di quarzo riceve una carica positiva; la lastrina di zinco non ne riceve nessuna, essendo il punto M al suolo. Regolando convenientemente la posizione del corsojo C, si può arrivare ad un valore tale del potenziale del filo argentato, per il quale non avviene più alcuna attrazione da parte dello zinco. Se lo zinco è ben pulito e speculare, ciò corrisponde ad una differenza di potenziale, tra i due punti M e C di 0,9 volt, circa.

Rovesciando il senso della corrente mediante il commutatore R, può agevolmente osservarsi che l'attrazione diventa molto più viva che elimi-

nando l' accumulatore. Il filo di quarzo comincia visibilmente a piegarsi verso la lastrina di zinco, anche per distanze di circa $\frac{1}{2}$ mm.

Appare dunque manifesto, che l' attrazione sia dovuta alla differenza degli stati elettrici dei metalli adoperati. Eguagliando i potenziali dell' argento e dello zinco mediante una pila che abbia la stessa forza elettromotrice che quella esistente al loro contatto, l' attrazione sparisce, almeno sensibilmente. Secondo la teoria del Volta, ciò si potrebbe ottenere mediante una congiunzione elettrolitica del filo argentato e della lastrina, ma ciò equivale appunto ad adoperare la pila come si è fatto. Poichè il muovere la vite della lastrina L, genera delle scosse in tutto l' apparecchio, per quanto tutto venga costruito robustamente, si può procedere così, per meglio constatare l' attrazione: Si mandi la corrente dell' accumulatore A, da N in M. Essendo il corsojo C in tale posizione che la differenza di potenziale tra M e C sia di 0,9 volt, si avvicini sino a circa $^1/_{10}$ di mm. la lastrina al filo. Così non avviene attrazione, ma interrompendo la corrente, si osserva subito la caduta brusca del filo sullo zinco. Lasciando la corrente interrotta, e distaccando il filo dalla lastrina, in guisa che tra di essi esista una distanza di $\frac{1}{2}$ mm., non appena si invia la corrente, ma in guisa che da M vada in N, avviene ancora l' attrazione.

Dalle precedenti esperienze si deduce un metodo semplice e rapido per misurare la f. e. m. di contatto di due metalli, o meglio di un metallo qualunque, con l' argento; basta all' uopo osservare quale è la f. e. m. necessaria per annullare l' attrazione. Benchè il metodo non offre a prima vista una grande precisione, a causa, oltre che della piccolezza del fenomeno, della incertezza dello stato superficiale dell' argento che ricopre il filo, pure mi è stato facile ordinare così alcuni metalli:

Alluminio	+ 1,1 volt	Rame	+ 0,40
Zinco	+ 0,9	Argento	0,00
Ferro	+ 0,5	Oro	— 0,2
Ottone	+ 0,45		

È notevole il fatto che ho trovato costantemente l' oro alquanto più negativo dell' argento, mentre Pellat pone l' oro e l' argento quasi sullo stesso gradino della scala di Volta.

Lord Kelvin, dicendo dell' attrazione che dovrebbe sussistere fra due dischi metallici eterogenei, afferma che essa ha luogo quando essi sono riuniti metallicamente. Ora ciò, benchè sia esatto, non è praticamente sempre necessario. Supponiamo infatti, che i due dischi sieno uniti ciascuno ad una grande capacità metallica che sia stata scaricata al suolo, e successivamente isolata. È chiaro che allora l' attrazione deve poter avvenire egualmente, giacchè

all' avvicinarsi dei due dischi, le due capacità forniscono a ciascuno di essi le quantità di elettricità necessarie per mantenerli agli stessi potenziali.

Nelle esperienze descritte avviene alcunchè di simile. Infatti l'attrazione della lastrina di zinco e del filo argentato avviene egualmente anche nel caso in cui essi sono isolati. E così dev' essere, giacchè le regioni attraentisi sono piccolissime di fronte al resto.

È assai difficile tentar di calcolare a priori qual sia il valore della forza attrattiva nel caso sperimentale descritto. Se si hanno invece due dischi eguali di area A, posti alla distanza D, piccola di fronte al diametro dei dischi, e tra i quali esiste la differenza di potenziale V, si dimostra facilmente che la loro forza attrattiva P è

$$P = \frac{V^2 A}{8\pi D^2}.$$

Per avere un'idea dell'ordine di grandezza delle forze con cui si ha da fare, supponiamo che del filo di quarzo e della lastrina agiscano, attiran-

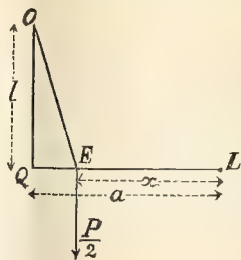



Fig. 3.

dosi, solo due elementi di superficie di area A ciascuno. Nella figura 3 è indicato in OQ il filo di quarzo; il punto L è quello della lastrina di zinco che immaginiamo come agente. In seguito all'attrazione il filo OQ viene in OE. Se P è il peso del filo di quarzo, l la sua lunghezza; se $EL = x$, $QL = a$, la forza agente sull' estremo E secondo EL, è $\frac{P(a-x)}{2l}$. Ciò supponendo che il filo di quarzo sia rigido e fissato a cerniera sulla sua estremità superiore. Quella forza deve essere eguale, per l'equilibrio, alla attrazione delle due aree ipotetiche considerate e cioè

$$\frac{P(a-x)}{2l} = \frac{V^2 A}{8\pi x^2},$$

od anche

$$(a-x)x^2 = \frac{V^2 A l}{4\pi P}.$$

Affinchè possa sussistere questa equazione, occorre che il massimo valore che può prendere il primo membro, per un dato valore di a, al variare di x, sia maggiore del secondo membro che è costante; e cioè derivando rispetto ad x ed eguagliando a zero:

$$2x(a-x)-x^2=0\,,\ \text{cioè}\ x=\frac{2a}{3}\,.$$

E allora deve essere

$$\frac{4a^3}{27}>\frac{V^2Al}{4\pi P}\,.$$

Se invece eguagliamo i due membri si ha

$$a^3=\frac{27}{16\,\pi}\cdot\frac{V^2Al}{P}\,.$$

In tal caso la distanza a è quella che corrisponde all' istante in cui, avvicinando la lastrina al filo di quarzo, questo viene bruscamente a precipitarsi su quella.

Dalla precedente espressione si ha anche

$$A=\frac{16}{27}\pi\,\frac{a^3\,.\,P}{V^2\,.\,l}\,.$$

Con l' apparecchio da me adoperato si può ritenere che occorre portare la lastrina di zinco sino ad $^1/_{10}$ di millimetro di distanza dal filo di quarzo affinchè avvenga l' attrazione. Supponiamo dunque che nel caso ipotetico delle due aree di argento e zinco, si abbia egualmente lo stesso valore per quella distanza; sarà dunque $x=$ cm. 0,01, e quindi $a=\frac{3}{2}x=0{,}015$ cm. Sostituiamo nella espressione di A i valori delle quantità che vi rientrano, ricavati dall' apparecchio adoperato. Essi sono $P=0{,}032$ *dine*; $l=10$ cm.; $V=0{,}9$ volt $=0{,}003$ Un. C. G. S. elettrost. Si ha dunque

$$A=\frac{16\,.\,\pi\,.\,\overline{0{,}015}^3\cdot 0{,}032}{27\,.\,\overline{0{,}003}^3\cdot 10}=0{,}22\ \text{mm.q.}$$

Il caso ideale delle due aree di argento e zinco, si potrebbe realizzare lasciando inalterate le condizioni di sensibilità del filo di quarzo, e servendoci di un dischetto di argento fissato alla estremità inferiore del filo, ed avente una superficie di solo 2 decimi circa di mm.q. A questo disco ne dovrebbe star di fronte un altro di zinco dello stesso diametro, mobile mediante una vite. La piccolezza delle aree di questi dischi, rende verosimile l' ipotesi che sieno aree dello stesso ordine di grandezza, quelle che mutuamente si attirano nella esperienza descritta.

Giacchè l'esperienza ha dimostrato che metalli eterogenei si attirano, potrebbe sorgere l'idea che metalli omogenei, che sono quindi carichi allo stesso potenziale, debbano respingersi. Ora se si sostituisce nella esperienza precedente alla lastrina di zinco una di argento, non solo non si osserva attrazione alcuna, ma nemmeno alcuna sensibile repulsione. Si potrebbe obbiettare che le pareti della scatola in cui si fa l'esperimento, possono essere allo stesso potenziale del filo e della lastrina. Realmente anche se si rivestono di stagnola posta in comunicazione col suolo, non è osservabile alcuna repulsione. La spiegazione di ciò si ha pensando che gli elementi superficiali di argento del filo e della lastrina che sono in vicinanza, hanno una capacità elettrica che è poco differente da quella che avrebbero se fossero scostati. Mentre nel caso dell'attrazione, le quantità di elettricità esistenti sopra i due elementi vicini dei due metalli eterogenei, sono enormi in confronto di quelle che possederebbero se fossero scostati, nel caso dei due metalli eguali non si ha accrescimento nella distribuzione elettrica, anzi tendenza ad annullarsi dei valori delle due densità elettriche superficiali; e quindi nessuna reciproca azione.

Anche con bilance di torsione ho potuto constatare l'attrazione di metalli eterogenei. All'uopo riuscirono infruttuosi tentativi fatti operando nel-

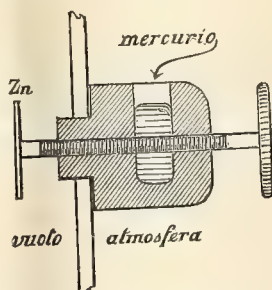



Fig. 4.

l'aria con dischetti metallici di cui uno fermo e verticale, e l'altro parallelo al primo, portato da un braccio orizzontale e sospeso ad un lungo filo metallico, od anche di quarzo. La difficoltà, in cui si incorre in simile esperienza, proviene dalla resistenza che incontra un disco ad avvicinarsi all'altro nello scacciare lo strato d'aria esistente tra i due. Dovetti dunque ricorrere ad esperienze eseguite nel vuoto. Dentro una cassetta di vetro è sospeso un piccolo braccio, portante ai suoi estremi due dischetti verticali di ottone dorato del diametro di due centimetri; uno di questi non ha che lo scopo di controbilanciare il peso dell'altro che è quello che serve. Un disco di zinco è portato da una vite che lavora su una madrevite di ebanite fissata con mastice in un foro praticato in una delle pareti verticali della scatola di vetro, e una chiusura a mercurio, come è indicato nella fig. 4, garantisce una

buona tenuta, anche per vuoti molto spinti. Lavorando con la vite dal di fuori della scatola, si possono far combaciare i due dischi d'oro e di zinco.

Il braccio portante il disco dorato è sospeso ad un lungo filo metallico che è retto dentro un tubo verticale, anch'esso a tenuta d'aria. Uno specchio, portato dal sistema mobile, permette di osservarne i movimenti. Dal di fuori della cassetta possono stabilirsi comunicazioni metalliche sia col disco d'oro, che con quello di zinco.

Con questo apparecchio, quando il vuoto è molto spinto ($^1/_{500}$ di mm.), si possono ripetere le stesse esperienze che sono state descritte pel filo di quarzo argentato, senonchè occorre un tempo molto maggiore. Si ottiene infatti bruscamente l'attrazione del disco di zinco e di quello d'oro, quando questi non sono che ad una piccola frazione di millimetro di distanza. Questa attrazione può essere annullata od aumentata, mediante il collegamento dei due metalli coi poli di un conveniente elemento di pila.

Ma anche a pressione ordinaria, si può adoperare una bilancia di torsione. Occorre allora servirsi di un disco metallico verticale fermo e di un filo rigido formato dall'altro metallo e sospeso orizzontalmente. Anche qui, quando l'estremità del filo è abbastanza vicina al disco, resta bruscamente attratta, e non ha più luogo sensibilmente, l'inconveniente lamentato della resistenza offerta dall'aria pel caso di due dischi.

Ho voluto accennare a queste ultime disposizioni per far vedere come in isvariate guise si possano ripetere le esperienze descritte, ma debbo avvertire che il metodo più sicuro, e che, oltre ad essere di una grande semplicità, è di una evidenza rimarchevole, è sempre quello del filo di quarzo argentato.

Concludo notando che l'attrazione di metalli eterogenei, oltre a potersi dimostrare sperimentalmente abbastanza facilmente, fornisce un nuovo metodo, per la determinazione della forza elettromotrice di contatto. Questo metodo che in ogni caso è abbastanza rapido, può anch'essere suscettibile di alquanta precisione, se convenientemente adoperato, giacchè esso è metodo di riduzione a zero.

Fisica. — *Verifica del principio dell'equivalenza termodinamica per un conduttore bimetallico.* Nota di Paolo Straneo, presentata dal Socio Blaserna.

Come applicazione del metodo da me svolto in una precedente Nota [1], mi permetto di comunicare i risultati di alcune misure da me eseguite nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.

[1] Vedi questi Rendiconti pag. 106.

Il conduttore di cui mi servii, si componeva di due fili rettilinei, l'uno di *ferro* e l'altro di *nikel*, saldati a argento sul prolungamento l'uno dell'altro ed aventi ciascuno una lunghezza di 8 cm. ed un diametro di 4 mm. Le condizioni relative alle estremità ed all'aria ambiente venivano realizzate mediante semplicissimi recipienti, in cui circolava acqua alla temperatura costante assunta come zero. Le misure della temperatura si eseguivano servendosi di piccolissime pile termoelettriche, saldate nei punti del conduttore considerati dalla teoria, cioè al contatto dei due metalli ed in altri due punti distanti 2,5 cm. da esso, e di un galvanometro specialmente costruito per misure di piccole correnti variabili col tempo. L' intensità della corrente che attraversava il conduttore veniva determinata mediante un amperometro ordinario. Le differenze del potenziale alle estremità del conduttore venivano misurate da un galvanometro preventivamente calibrato.

Si misurarono dapprima le temperature stazionarie dei tre punti sopradetti per le due direzioni della corrente; indichiamole rispettivamente con $\overset{+}{u}_1$, $\overset{+}{u}_c$, $\overset{+}{u}_2$, e $\overset{-}{u}_1$, $\overset{-}{u}_c$ ed $\overset{-}{u}_2$, convenendo di usare il segno $+$ quando la corrente va dal ferro al nikel e viceversa.

Si determinarono inoltre le differenze di potenziale alle estremità del conduttore per le differenti direzioni della corrente; indichiamole con $\overset{+}{\Delta p}$ e $\overset{-}{\Delta p}$.

L' intensità della corrente i rimase sempre costante in valore assoluto quando veniva invertita; noi la indicheremo con $+i$ e $-i$.

Dopo ciò, allo scopo di determinare i coefficienti k_1, k_2, h_1 ed h_2 che troviamo in tutte le formole di cui faremo uso, si invertì periodicamente per un certo in tervallo di tempo la corrente, sino che le variazioni della temperatura nei tre punti ove si trovavano le pile termoelettriche fossero divenute completamente periodiche, se ne osservarono gli andamenti e se ne determinarono i primi termini dei rispettivi sviluppi in serie di Fourier. Nel caso particolare che ci occupa, possiamo evitare il lungo calcolo numerico che richiederebbe la soluzione delle equazioni dedotte a pag. 201 della precedente Nota [1]. Infatti sostituendo nelle formole i valori approssimati dei coefficienti che si vogliono determinare ed i valori noti delle altre costanti, si vedrà immediatamente che la costante N è appena uguale a pochi millesimi della costante M e che quindi si potrà senza errore sensibile considerare uguale a zero. Allora evidentemente anche la β potrà porsi uguale a zero. Le quantità η_1 e ϑ_1 relative ai due metalli si potranno quindi dedurre col noto metodo di Ångstrom e con esse calcolare le costanti k_1, h_1 e rispettivamente k_2 ed h_2.

Le misure furono eseguite per due periodi di tempo differenti e cioè per $T = 240''$ e per $T = 300''$. I risultati sono riuniti nella seguente tabella:

[1] Nella quarta equazione del sistema che determina M, N, β e γ in funzione di ϑ, η ed l, si deve sostituire alla cifra 1 il valore ϱ.

Ferro: $c = 0{,}111$ $\varrho = 7{,}80$

T = 240	$\eta = 0{,}295$	$\vartheta = 0{,}258$	$k = 0{,}148$	$h = 0{,}00030$
T = 300	$\eta = 0{,}268$	$\vartheta = 0{,}228$	$k = 0{,}147$	$h = 0{,}00028$

Nikel: $c = 0{,}109$ $\varrho = 9{,}1$

T = 240	$\eta = 0{,}365$	$\vartheta = 0.328$	$k = 0{,}112$	$h = 0{,}00033$
T = 300	$\eta = 0{,}326$	$\vartheta = 0{,}276$	$k = 0{,}110$	$h = 0{,}00034$

Il calcolo poi delle ω_1, ω_2, P ed J, quantunque numericamente assai complicato non presenta difficoltà essenziali; conviene procedere per successive approssimazioni. I risultati sono riuniti nella seguente tabella:

$i = 5$ Amp.	$\overset{+}{U}_1 = 7{,}84$	$\overset{-}{U}_1 = -6{,}68$	$U'_1 = 0{,}58$	$\overset{+}{\Delta p} = 6{,}25.10^6$	$\overset{-}{\Delta p} = -4{,}85.10^6$
	$\overset{+}{U}_c = 12{,}36$	$\overset{-}{U}_c = -10{,}93$	$U'_c = 0{,}71$	$\omega_1 = 9640$	$\omega_2 = 15930$
	$\overset{+}{U}_2 = 3{,}25$	$\overset{-}{U}_2 = -2{,}06$	$U'_2 = 0{,}59$	$P = 0{,}0139$	$J = 3{,}95.10^7$

Le unità fondamentali alle quali si riferiscono queste cifre sono il centimetro, il grammo, il secondo ed il grado centigrado.

Conclusione. Dal complesso di queste ricerche si vede non solo come i fenomeni termoelettrici procedano regolarmente ed in perfetto accordo colle teorie, ma anche come essi possano venire studiati con sufficiente esattezza senza ricorrere a metodi calorimetrici, ma fondandosi su dirette misure di temperature. La determinazione del coefficiente dell'effetto Peltier col metodo esposto riesce certamente bene anche nel caso in cui i metodi fino ad ora usati divengono poco esatti, cioè quando i due metalli hanno una grande resistenza specifica ed un debole effetto Peltier, poichè con questo metodo, l'effetto Joule maschera pochissimo il fenomeno che si vuol studiare.

Chimica. — *Azione dell'etere diazoacetico sul pirrolo, n-metil-pirrolo ed alcuni indoli.* Nota di A. Piccinini, presentata dal Socio G. Ciamician.

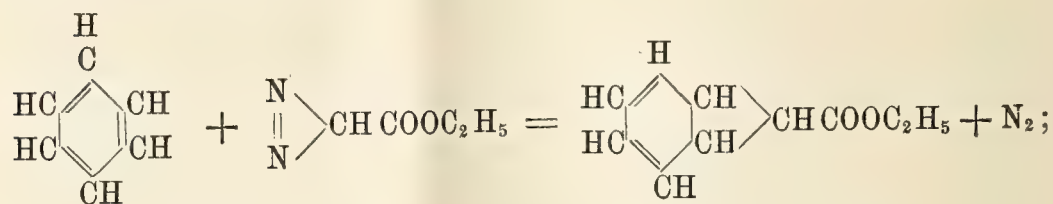
L'azione singolarmente interessante che l'etere diazoacetico esplica su alcuni idrocarburi aromatici e già da tempo descritta dal Buchner in diverse memorie (1), ha oggidì acquistato una grande importanza per la scoperta delle strettissime relazioni che legano i corpi dal Buchner ottenuti (2) coi prodotti di scomposizione degli alcaloidi dell' Erythroxylon Coca, studiati da Einhorn (3) assieme a Tahara, A. Friedländer e Willstätter. Ma non soltanto per questo i lavori suaccennati meritano considerazione; infatti per le belle ricerche di R. Willstätter (4) è ormai ampiamente dimostrata la esistenza di un nucleo derivante dal cicloeptano, nella maggior parte dei prodotti di scissione degli alcaloidi della Coca e quindi anche negli acidi del Buchner; perciò nella sintesi e nelle trasposizioni intramolecolari dell' acido pseudofenilacetico dal Buchner stesso studiate, noi possediamo un nuovo esempio di quei rari processi di allargamento di nucleo, che trovano nelle serie eterocicliche il loro riscontro colla sintesi delle piridine e chinoline dai pirroli e indoli per mezzo del cloroformio e analoghi.

L'azione dell' etere diazoacetico sul pirrolo e i suoi derivati meritava adunque di divenire oggetto di studio, onde stabilire se anche in questo caso avvenisse qualche fenomeno analogo a quelli sopracitati.

L'esperienza ha dato però risultati che non sono in accordo con quanto si è esposto sopra, e sembra anzi portare una nuova dimostrazione della singolare mobilità dell' idrogeno contenuto nel nucleo pirrolico.

Mentre col benzolo l' etere diazoacetico si combina in modo rappresentabile secondo lo schema:

```
      H                                          H
      C                                   HC/\CH\
 HC/\CH      N\                             |  |   >CH COOC2H5 + N2;
 HC\/CH  +   || >CH COOC2H5  =            HC\/CH/
      CH     N/                                CH
```

$$C_6H_6 + N_2{>}CH\,COOC_2H_5 = C_6H_6{>}CH\,COOC_2H_5 + N_2;$$

(1) E. Buchner, Th. Curtius Berl. Ber. *18*, 2377; Buchner, Berl. Ber. *21*, 2637; *29*, 106; *30*, 632.

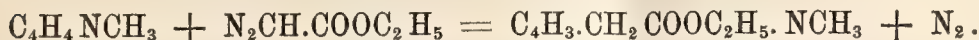
(2) Buchner, F. Lingg. Ber., *31*, 402 e 2247; Buchner, Jacobi Berl. Ber. *31*, 399; Buchner, Berl. Ber. *31*, 2004, 2241, 2247.

(3) Berl. Ber. *26*, 324, 1482; *27*, 2823; Ann. d. Ch. *280*, 96.

(4) R. Willstätter, Ber. *31*, 1546; *30*, 702; *31*, 1534, 2498, 2655.

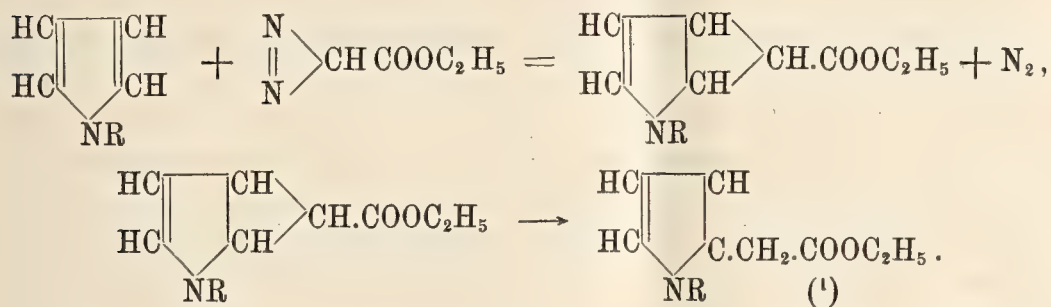
nei corpi della serie pirrolica aventi idrogeno sostituibile si comporta in modo da originare principalmente gli eteri degli acidi acetici corrispondenti.

Per esempio coll' n-metilpirrolo la reazione dà per prodotto principale un' acido n-metilpirrilacetico, cosicchè si può rappresentare nel modo seguente:

$$C_4H_4NCH_3 + N_2CH.COOC_2H_5 = C_4H_3.CH_2COOC_2H_5.NCH_3 + N_2.$$

Così pure dagli indoli non completamente sostituiti si hanno i rispettivi acidi indolacetici; fu anzi per mezzo di questi ultimi derivati che si potè stabilire con certezza la costituzione dei prodotti in questione, mancando per l'acido derivato dal metilpirrolo ogni termine di confronto.

Circa il modo con cui questi acidi acetici sostituiti si formano, nulla si può dire di certo. Si può ammettere la formazione primordiale di un prodotto analogo per costituzione all' acido pseudofenilacetico, derivante dall'addizione del residuo dell' etere diazoacetico, al nucleo pirrolico con scioglimento del doppio legame e sua successiva ricostituzione con passaggio di un idrogeno nucleare alla catena laterale, così:

HC═CH, HC═CH, NR (anello) + N═N>CH COOC₂H₅ = HC═CH, HC═CH, NR (anello)>CH.COOC₂H₅ + N₂,

$$\text{HC—CH, HC—CH, NR}>CH.COOC_2H_5 \longrightarrow \text{HC—CH, HC—C, NR}\;C.CH_2.COOC_2H_5.\ (^1)$$

Si può anche ammettere però che il derivato diazoico agisca semplicemente sul nucleo pirrolico come con tutte le sostanze fornite di idrogeno facilmente sostituibile [2].

Assieme agli acidi ora citati si formano notevolissime quantità di materie oleose dense, di difficile esame; siccome però questi prodotti oleosi si decompongono con grande facilità per riscaldamento svolgendo dei gas, così non è escluso che in essi sien contenuti alcuni prodotti di costituzione analoga ai derivati del diidropirazolo formatisi con un processo consimile a quello svolgentesi tra l'etere diazoacetico e gli eteri degli acidi grassi non saturi [3]; la natura resinosa di questi corpi non ne permise però l' isolamento.

[1] È probabile che la catena laterale si trovi in posizione α, perchè in genere nel pirrolo la sostituzione con radicali negativi si fa sempre in questo modo.

[2] Buchner, Berl. Ber. *18*, 2371; *27*, 3250.

[3] Buchner, Berl., Ber. *21*, 2637; *22*, 2165; *26*, 256; *27*, 868.

I.

n-metilpirrolo ed etere diazoacetico.

Gr. 10 di *n*-metilpirrolo si riscaldarono lentamente in bagno ad olio a 120° per alcune ore, fino a cessazione completa dello sviluppo gassoso. Terminata la reazione si separò dal prodotto, di aspetto oleoso e colorato in bruno, la porzione che bolle fino a 120° e che contiene precipuamente il metilpirrolo che non ha preso parte alla reazione. Si distillò quindi il rimanente fino a che il passaggio di sostanza si sospese da sè, il che suol succedere verso 240°. L' ultima porzione così ottenuta ha un odore disgustosissimo particolare; raggiunge il peso di gr. 3 e contiene l' etere dell' acido *metilpirrilacetico*. Operando nelle proporzioni indicate non si riesce però ad isolare l' etere stesso allo stato puro. Il distillato presenta infatti un punto di ebollizione del tutto incostante, anche dopo varie rettificazioni eseguite colla massima cura; la maggior parte di esso bolle tra 230°-240°.

Riusciti infruttuosi vari tentativi di isolamento dell' etere, si sottopose tutto il prodotto disponibile alla saponificazione. A questo scopo lo si fece bollire con acqua di barite in eccesso, fino a che l'olio insolubile non diminuì più. Durante questa operazione si formò una piccola quantità di un sale baritico insolubile anche a caldo, che si separò per filtrazione, dopo eliminazione della parte oleosa non saponificabile (*n-metilpirrolo*) per distillazione a vapore. La soluzione baritica, privata dell'eccesso di idrato di bario, dà per acidificazione con acido solforico diluito un acido molto solubile in acqua che si può estrarre con etere. Convenientemente purificato per cristallizzazione dall'etere di petrolio, si presenta in fogliette incolore, leggerissime, di splendore madreperlaceo, fondenti a 113-114°.

Analisi. — Gr. 0,1704 di sostanza diedero gr. 0,1022 di H_2O e gr. 0,3786 di CO_2.

In cento parti:

	trovato	calcolato per $C_4H_3.CH_2.COOH.NCH_3$
C	60,61	60,40
H	6,71	6,50

Il nuovo acido non dà la reazione, coll' isatina, dei composti pirrolici; fornisce però immediatamente e in modo intenso la colorazione del fuscello d'abete intriso di acido cloridrico. I suoi sali coi metalli alcalini e alcalino-terrosi sono solubilissimi in acqua e difficilmente cristallizzabili. Il sale d'argento è pochissimo solubile e si riduce spontaneamente, specialmente a caldo.

La costituzione di questo acido non fu determinata direttamente, ma solo per l' analogia che esso addimostra con quelli derivanti dagli indoli, che saranno più avanti descritti.

Pirrolo ed etere diazoacetico.

Sul pirrolo l' acido diazoacetico agisce in parte come metilante e quindi dà origine principalmente allo stesso acido proveniente dall' *n*-metilpirrolo. Contemporaneamente però si formano grandi quantità di materie resinose che rendono difficile l' esame dei prodotti della reazione. Separando la resina per diluzione della massa con etere, rimane sciolto in quest' ultimo una miscela di metilpirrolo e di altri prodotti oleosi, tra cui trovasi in quantità preponderante l' etere etilico dell' acido *n-metilpirrilacetico*. Saponificando il residuo della soluzione eterea nel modo sopradescritto, rimane come olio insaponificabile il metilpirrolo, che separasi distillando a vapore. Dalla soluzione baritica, per acidificazione con acido solforico ed estrazione con etere si ha un acido cristallizzato, che dopo alcune cristallizzazioni dall' etere petrolico fonde a 113-114° ed offre nelle reazioni e nella salificazione le stesse caratteristiche dell' acido *n*-metilpirrilacetico.

II.

N-metilindolo ed etere diazoacetico.

Riscaldando parti eguali di *n*-metilindolo ed etere diazoacetico, si osserva un lento svolgimento d' azoto già a 120°. Per avere una reazione completa occorre riscaldare sino a 200° e per parecchie ore. Dal prodotto della reazione si ha per saponificazione con potassa acquosa un acido in quantità notevole, non molto solubile a freddo nell' acqua; esso si separa facilmente con alcune estrazioni con etere e purificasi trasformandolo nel sale baritico che è molto solubile in acqua, mentre precipitansi così traccie di un sale insolubile derivante probabilmente da un' acido diazinsuccinico [1]. L' acido indolico ricuperato nel solito modo dal sale baritico, si purifica per cristallizzazione da una miscela di benzolo ed etere petrolico. Si ha così l' acido puro in prismetti incolori fondenti a 128-129°. La sua composizione corrisponde a quella di un acido indolacetico metilato.

Analisi. — Gr. 0,1848 di sostanza diedero gr. 0,4738 di CO_2 e gr. 0,1012 di H_2O.

[1] Curtius, Berl. Ber. *18*, 1302.

In cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{11}H_{11}NO_2$
C	69,94	69,78
H	6,13	5,86

Sale argentico. — La soluzione neutra del sale ammoniacale dà con nitrato d'argento un precipitato microcristallino incoloro poco stabile a caldo, che raccolto e lavato con alcool ed etere diede all'analisi il risultato seguente:

gr. 0,2274 di sostanza lasciarono per calcinazione un residuo di gr. 0,0824 di argento metallico.

In cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{11}H_{10}NO_2Ag$
Ag	36,24	36,45

Picrato. — Analogamente agli acidi indolcarbonici, il derivato sopradescritto dà con acido picrico in soluzione benzolica un precipitato di aghetti sottili di colore rosso granato, fondenti a 173-174°.

n-β dimetilindolo dall' acido precedente. — La costituzione dell' acido derivante dall' *n*-metilindolo risulta dalla sua trasformazione quantitativa in *n*-*β*-dimetilindolo per riscaldamento tra 200-220°. In queste condizioni l' acido perde anidride carbonica senza ulteriori alterazioni; l' indolo risultante è quasi puro e dà in soluzione alcoolica un picrato cristallizzato in aghi porporini fondenti a 143-144°, che è identico al picrato dell' indolo preparato sinteticamente dal metilfenilidrazone della propilaldeide (1).

All'acido in questione spetta quindi il nome di *n-metil-βindolacetico.*

Metilchetolo ed etere diazoacetico.

Riscaldando molto lentamente una miscela di *α*-metilindolo ed etere diazoacetico in parti eguali si ha svolgimento d'azoto, che cessa soltanto dopo alcune ore, quando la temperatura del bagno ad olio, che serve come mezzo di riscaldamento, ha raggiunto i 200°. Dal prodotto della reazione, con un trattamento consimile a quello sopra descritto, si ha un acido cristallizzabile identico a quello che ottiensi col metodo sintetico di E. Fischer, dal fenilidrazone dell'acido levulinico (2); come il Fischer consiglia, la purificazione del prodotto si consegue nel miglior modo sciogliendolo in pochissimo acetone

(1) E. Fischer e Degen, Ann. d. Ch. *236*, 163.
(2) E. Fischer, Ann. d. Ch. *236*, 149.

e precipitandolo con precauzione per mezzo dell' etere petrolico. Si hanno così dei piccoli prismetti incolori fondenti, come il prodotto di Fischer a 204° con leggero rammollimento verso 197°.

Analisi. — Gr. 0,2052 di sostanza diedero gr. 0,1091 di H_2O e gr. 0,5240 di CO_2.

In cento parti:

	trovato	Calcolato per. $C_{11}H_{11}NO_2$
H	5,95	5,86
C	69,66	69,78

L'acido *α-metil-βindolacetico*, ottenuto col metodo ora descritto, forma un nitroso derivato cristallino, giallo, che dà la reazione di Liebermann in modo singolare; anche in questo punto si manifesta l'identità sua coll'acido di Fischer.

Picrato. — Trattando l'acido descritto con acido picrico in soluzione benzolica, si hanno degli aghetti contorti e ramificati di colore rosso bruno fondenti a 193-194° contemporaneamente al picrato dell'acido ottenuto dal Fischer.

Chimica. — *Sulla preparazione di alcune idrazidi e sui loro prodotti di trasformazione*. Nota di Guido Pellizzari, presentata dal Corrispondente Balbiano.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Botanica. — *Sulla struttura e la biologia del Cynomorium coccineum* L. [1]. Nota preventiva dei prof. P. Baccarini e dott. P. Cannarella, presentata dal Corrispondente R. Pirotta.

Le nostre ricerche intorno a questo interessante parassita hanno per oggetto di chiarire i punti ancora oscuri intorno alla sua biologia ed alla sua struttura.

Il Weddell descrisse per primo il processo di germogliazione dei semi del *Cynomorium* ed i suoi risultati sono poi stati accolti dagli autori po-

[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico dell'Univirsità di Catania, 15 febbraio 1899.

steriori senza che, per quanto è a nostra conoscenza, abbiano subito un qualche controllo.

Ora sembra a noi non privo d'interesse il fare conoscere fin d'ora che i nostri tentativi di far germogliare dei semi di *Cynomorium* provenienti da Trapani e da Sassari hanno avuto fin qui esito negativo: di modo che possiamo concluderne che i semi delle due località sopraindicate non germogliano affatto; almeno in quelle stesse condizioni, nelle quali il Weddell ottenne la germogliazione dei semi dall'Algeria.

Non è questo il momento di fermarci sulle molteplici considerazioni alle quali il fatto potrebbe prestarsi: tuttavia dobbiamo aggiungere che il processo di moltiplicazione vegetativa (almeno per la stazione di Trapani) possiede a nostro avviso un'importanza molto più grande del processo di riproduzione per seme. Nessuno dei numerosi giovani stadii osservati ha mostrato mai un qualche carattere che permettesse di lasciarne riconoscere l'origine da un seme: ma tutti avevano origine invece da speciali tubercoli radicali, come sarà detto più sotto. Anche una visita fatta da uno di noi nel dicembre scorso alla classica località del Ronciglio, ha confermata questa nostra deduzione.

Un altro fatto che noi crediamo di avere confermato è questo: che cioè il *Cynomorium* è una pianta monocarpica; e non possiamo quindi convenire col Martelli sull'esistenza di un tallo intermatricale. I singoli ceppi di *Cyn.* si mantengono perfettamente isolati l'uno dall'altro, salvo nel caso che due o più ceppi si sviluppino a poca distanza sulla stessa radice oste. Allora, come è facile il comprendere, i processi corticali dei singoli auatorii s'incontrano e s'intrecciano fra loro: ma ciò non autorizza a parlare di un vero tallo intermatricale, alla maniera ad es. di quello della *Pilostyles*.

Le singole piantine non prendono mai origine dal tessuto del parassita che si distende entro le radici dell'oste: ma costantemente da appositi tubercoli i quali provengono dalle radici sviluppantisi, come è noto, sul rizoma e la parte più bassa dello stipite. Esse infatti quando incontrano colla loro regione di attivo accrescimento la radice di un oste adattato, s'ingrossano in quel punto, e si trasformano in piccoli tubercoli che aderiscono all'oste e vi si fissano.

Il Weddell ha osservato forse pel primo queste formazioni: ma non ne ha dato una giusta interpretazione, avendole considerate come radici succiatori sussidiarie allo austorio principale: e non si è accorto che quando i tubercoli si sono innestati saldamente alla radice oste, si interrompe la loro connessione anatomica col rizoma o lo stipite dal quale derivano; e che, nel suo concetto, dovrebbero alimentare.

Una più esatta interpretazione del fenomeno ha più recentemente data il Martelli, le cui osservazioni noi possiamo, sotto questo punto di vista, confermare.

L' innesto del tubercolo sulla radice ha luogo lateralmente, o più di rado anche per la sua estremità. Nel primo caso l' austorio prende origine da una regione del parenchima del tubercolo prossima alla superficie, ed ha il significato morfologico di emergenza endogena alla maniera di quello di altri parassiti. Il suo asse, che sarà in seguito attraversato da un robusto cordone di xilema, va ad incontrare ad angolo retto il fascio procambiale della radice.

Il cono radicale preesistente alla formazione del tubercolo dà origine allora al germoglio, ed allo stipite primario della pianta. La trasformazione avviene con ciò che al di sopra del meristema apicale, nei piani cellulari più giovani e quindi più profondi della pileorizza, si forma per origine lisigenica una cavità, la quale un poco alla volta si estende verso la periferia e la base della radice; ed anche verso l' estremità terminale della pileorizza. Il cono vegetativo inizia la produzione delle prime foglie all' interno di questa cavità, la quale va ampliandosi, sino a che in seguito al progressivo assottigliarsi dei tessuti che ne formano la parete, questa ultima si lacera, ed il cono di vegetazione vestito di foglie viene all' aperto. Esiste quindi anche qui alla base del rizoma (per quanto poco appariscente) una vera e propria volva simile a quella di molte Balanoforee; ed il cono vegetativo del caule è di origine endogena. La differenza quindi segnalata sotto questo riguardo dall' Eichler tra il *Cynom.* e le *Balanoforee* viene a cadere; quantunque ne restino altre segnalate in ordine allo sviluppo che le varie parti dell' apparecchio vegetativo precedenti o susseguenti la comparsa del cono di vegetazione presentano, di fronte alle Balanoforee sopracitate.

Se l' individuo costituitosi in tal modo si trova innestato sopra una radice oste sottile, od anche su di una pianta che non gli offra un alimento conveniente, dal tubercolo si forma un solo stipite; ma se la radice oste è robusta e le condizioni di nutrizione son favorevoli, il tubercolo ingrossa, ed oltre al cono vegetativo sopraindicato forma altri coni avventizî, pel costituirsi di singoli meristemi apicali negli strati periferici del parenchima del tubercolo: coni che poi vengono all' aperto con un processo simile a quello indicato. Se il tubercolo si è fissato all' oste per la sua estremità; allora anche il meristema del germoglio primario si forma alla maniera dei coni avventizî ora indicati.

I germogli così formatisi, possono allungarsi orizzontalmente nel terreno per un tratto più o meno lungo, ma finiscono tutti col venire all' aperto terminando nella nota infiorescenza del *Cynomorium*. Essi per lo più non si ramificano, ma anche quando ciò avviene, i germogli hanno origine endogena e sono dei veri e proprî germogli avventizî.

Tanto nella parte sotterranea, quanto nella parte aerea, questi germogli portano delle squame e delle brattee della forma nota; sulle quali abbiamo anche noi ritrovati gli stomi già segnalati dal Pirotta e dal Longo. Essi mancano o sono rarissimi sulle squame inferiori del tratto orizzontale del caule:

ma divengono più frequenti nelle squame dello stipite e numerosissimi nelle brattee e bratteole fiorali.

Per quel che riguarda la struttura del tubercolo più d' una cosa è degna di nota: specialmente il suo ingrossare, oltrechè per accrescimento intercalare del parenchima, anche per lo sviluppo di un vero e proprio anello cambiale tra la parte floematica e xilematica del primitivo cordone vascolare assile del succiatoio.

Anche i fasci del rizoma e dello stipite fiorifero sono suscettibili di accrescimento: ma mentre quello dell' austorio poteva considerarsi (almeno sino ad un certo grado) come un fascio concentrico, questi (come del resto è noto) sono collaterali aperti e crescono notevolmente in spessore per l' attività d' un cambio interfasciale. Anche la somiglianza della struttura di questi stipiti con quella dei cauli delle Monocotiledoni è in gran parte soltanto apparente, e dovuta allo aspetto che la disposizione dei fasci presenta nelle sezioni trasverse. In realtà essi sono disposti su cerchie concentriche (salvo s' intende a tener conto dei frequenti fenomeni perturbatori) delle quali la più esterna è anche la più giovane, ed i singoli fasci di ciascuna cerchia si anastomosano tra loro e con quelli delle cerchie vicine, in modo da dare origine ad una ricca impalcatura vascolare.

Quantunque, come si è detto, i fasci periferici siano frequentemente più giovani di quelli profondi, non vi ha qui la formazione di una zona meristemale continua d' inspessimento alla maniera delle *Dracena* ed affini: ma invece singoli ed isolati gruppi di cellule parenchimatiche si organizzano in cordoni procambiali isolati, dai quali derivano poi i singoli fasci. La mancanza di un cambio interfasciale giustifica il loro isolamento.

Le primane vasali son date da stretti vasi spirali, anulati, ed anche trabecolati: gli altri elementi del legno da tracheidi cementati assieme da un ricco parenchima perivasale a membrane sottili cellulosiche, riccamente amilifero.

Il floema consta di cellule cambiformi e di vasi crivellati con cellule annesse. I tessuti meccanici mancano, e mancano ancora particolari guaine attorno ai fasci.

Anche nelle stesse radici, le quali sono generalmente a tipo *diarco* e non si ramificano mai, l' esistenza di un periciclo ci sembra molto discutibile: ma quivi, in compenso, alcuni degli elementi più esterni del floema assumono i caratteri di fibre, quantunque lo spessore delle loro pareti non diventi mai ragguardevole. Non abbiamo mai incontrati, nè nello stipite, nè nel rizoma, i cordoni meccanici segnalati dal Chatin.

Recentemente fu anche accennato alla presenza di Micorizze sulle radici e sul rizoma del *Cynomorium*: ma noi non possiamo confermare questo dato. La presenza di fili di micelio negli elementi periferici costantemente morti del rizoma, dei tubercoli ed anche delle radici deperenti, non è un dato sufficiente per concluderne in favore dall' esistenza di un apparecchio che ha un significato morfologico e fisiologico ben definito.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 9 aprile 1899.

E. Beltrami Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Sulle macchie, facole e protuberanze solari osservate al R. Osservatorio del Collegio Romano durante il 1° trimestre del 1899.* Nota del Socio P. Tacchini.

Per l'osservazione delle macchie e facole la stagione fu favorevole in questo trimestre come nel precedente, risultando il numero dei giorni di osservazione pressochè il medesimo. Ecco i risultati ottenuti:

1° trimestre 1899.

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Frequenza delle macchie	Frequenza dei fori	Frequenza delle M+F	Frequenza dei giorni senza M+F	Frequenza dei giorni con soli fori	Frequenza dei gruppi di macchie	Media estensione delle macchie	Media estensione delle facole
Gennaio. . .	26	2,50	3,31	5,81	0,04	0,08	1,77	15,85	41,19
Febbraio . .	25	1,36	2,12	3,48	0,80	0,00	0,80	6,13	53,80
Marzo. . . .	24	1,75	3,75	5,50	0,08	0,21	1,38	22,71	34,32
Trimestre	75	1,88	3,05	4,93	0,20	0,09	1,32	15,04	43,46

Il fenomeno delle macchie andò dunque progressivamente diminuendo rispetto alle serie precedenti, con un minimo secondario marcatissimo nel mese di Febbraio, specialmente per ciò che riguarda il numero dei gruppi e la loro estensione. In corrispondenza della diminuzione delle macchie si accrebbe

la frequenza dei giorni senza macchie e senza fori, ciò che caratterizza l'epoca del minimo di attività solare.

Per le protuberanze il numero dei giorni di osservazione fu minore, ed ecco i risultati, disposti nel solito modo:

1° trimestre 1899.

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Medio numero delle protuberanze per giorno	Media altezza per giorno	Estensione media	Media delle massime altezze	Massima altezza osservata
Gennaio. . .	11	3,91	30″,7	1°,2	34″,6	50″
Febbraio . .	18	1,94	30,6	1,3	32,1	44
Marzo. . . .	19	2,16	28,8	0,9	29,6	40
Trimestre	48	2,48	29,9	1,1	31,7	50

Anche nel fenomeno delle protuberanze si verificò una diminuzione rispetto alla serie precedente, e il minimo secondario di frequenza del Febbraio si accorda con quello delle macchie. Devesi però notare che in questo trimestre, come nell'ultimo del 1898, le condizioni dell'aria furono quasi sempre poco favorevoli a questo genere di osservazioni.

Le osservazioni furono fatte da me in 30 giorni e in 18 dal sig. prof. Palazzo.

Astronomia. — *Sulla distribuzione in latitudine delle facole e macchie solari osservate all' Osservatorio del Collegio Romano nel 4° trimestre del 1898.* Nota del Socio P. Tacchini.

Dalle latitudini calcolate per 86 gruppi di facole e 48 di macchie, ricavai le seguenti cifre per la frequenza relativa dei due fenomeni nelle diverse zone solari:

4° trimestre 1898.

Latitudine	Facole		Macchie	
40° + 30°	0,000	0,360		
30 + 20	0,013			
20 + 10	0,130		0,127	0,454
10 . 0	0,217		0,327	
0 — 10	0,248	0,640	0,200	0,546
10 — 20	0,255		0,346	
20 — 30	0,124			
30 — 40	0,013			

Le facole, come le protuberanze, furono più frequenti nelle zone australi, col massimo nella zona (0° — 20°). Le macchie furono pure più frequenti nelle zone australi e si trovano contenute fra i paralleli ± 20° come nel trimestre precedente. In questo trimestre dunque si ebbe una maggiore frequenza al sud dell'equatore per tutti i fenomeni solari. Nessuna eruzione fu osservata. Dobbiamo poi notare che il gruppo di macchie fra le latitudini di — 9°,3 e — 17°,5, calcolate colle osservazioni del 2 Ottobre, corrisponde a quello apparso in principio di Settembre, che tramontò intorno al 15 e che ricomparve il 30 per tramontare nuovamente il 12 di Ottobre: verso la fine poi di Ottobre vi era già all'est una macchia nella solita regione e il 31 il gruppo era compreso fra — 11°,8 e — 14°,9. È questo un bell' esempio della preesistenza di macchie in una regione limitata, considerando anche che siamo nel periodo della minore attività solare.

Astronomia. — *Osservazioni della nuova Cometa 1899 L Swift e del nuovo Pianeta Coggia EL 1899.* Nota del Corrispondente E. Millosevich.

Della nuova Cometa 1899 L Swift, la quale ora è immersa negli splendori del dì, e non potrà essere riosservata che al mattino nel maggio prossimo, feci le seguenti posizioni:

1899 marzo 6	$7^h\ 2^m 54^s$ RCR.	α app.:	$3^h 39^m\ 1^s.26$ (9 446);	δ app.: — 24° 43′ 0″.6 (0.830)
» » 15	7 12 12 »	» :	2 59 46 91 (9.575);	» : — 13 8 30 9 (0.817)
» » 17	7 7 11 »	» :	2 52 54 31 (9.583);	» : — 10 59 44 2 (0.808)
» » 20	7 21 52 »	» :	2 43 12 37 (9.614);	» : — 8 0 8 7 (0.790)

La cometa era lucente, con nucleo di 6 a 7^{ma} grandezza, e vedevasi con difficoltà ad occhio nudo.

Dopo la mia Nota riguardante le osservazioni del pianeta EE 1899 si scopersero, per mezzo della fotografia, i pianeti EF, EG, EI da Wolf e Schwassmann ad Heidelberga; EH, come aveva preveduto nella mia Nota precedente, era *Oceana.* EK ed EL vennero scoperti da Palisa a Vienna e da Coggia a Marsiglia col metodo diretto, ed EM fu trovato dallo scopritore di Eros col metodo fotografico. Ragioni varie non mi permisero che di osservare una sola volta EL ieri sera come segue:

Pianeta EL 1899 Gr. 11.5.

1899 Aprile 8 $8^h 56^m 45^s$ RCR. α app.: $12^h 53^m\ 8^s.91$ (9.473^n); δ app.: — 5° 48′13″.3 (0.802)

Matematica. — *Sulla risoluzione delle equazioni di sesto grado.* Nota del Socio Straniero F. KLEIN.

(Estratto da una lettera al sig. CASTELNUOVO).

... Per quanto riguarda le equazioni di sesto grado, possiamo valerci ora del gruppo elegante di 360 collineazioni piane, che fu scoperto dal sig. Valentiner, e fu poi studiato a fondo, per la prima volta, dal sig. Wiman nel vol. 47 dei Mathematische Annalen.

Siano $x_1, x_2 \dots x_6$ le radici della equazione di sesto grado. Si devono cercare tre funzioni z_1, z_2, z_3 di queste radici, i cui rapporti subiscano le sostituzioni del gruppo nominato, in corrispondenza alle permutazioni pari delle x. Quelle funzioni non possono però esser *razionali*, giacchè il gruppo delle 360 collineazioni piane non è oloedricamente isomorfo ad un gruppo di sostituzioni lineari, omogenee, ternarie, come fu già osservato dal sig. Wiman. Sta invece il fatto che il minimo gruppo isomorfo di sostituzioni lineari, omogenee, ternarie, che si può costruire, contiene il numero triplo di operazioni del gruppo di collineazioni; e precisamente alla collineazione identica corrispondono le tre sostituzioni.

$$(1) \qquad z'_1 = j^\nu z_1, z'_2 = j^\nu z_2, z'_3 = j^\nu z_3. \qquad (j = e^{\frac{2i\pi}{3}}; \nu = 0, 1, 2)$$

Ora si domanda quale sia il modo più semplice per costruire tre funzioni *irrazionali* delle $x_1 \dots x_6$, i cui rapporti si permutino in corrispondenza col nostro gruppo di collineazioni. A tal fine io propongo di ricorrere alla teoria delle curve piane del terzo ordine, e in particolare dei loro flessi. Infatti una forma cubica ternaria delle z_1, z_2, z_3, o delle variabili contragredienti w_1, w_2, w_3, non subisce alcuna alterazione in conseguenza delle sostituzioni (1), e quindi essa subisce solo 360 trasformazioni in corrispondenza alle 3.360 sostituzioni delle w_1, w_2, w_3. Segue che si possono subito formare delle funzioni razionali delle $x_1 \dots x_6$, le quali, in corrispondenza colle sostituzioni pari delle x, subiscano le stesse sostituzioni lineari che le diverse espressioni di terzo grado nelle w_1, w_2, w_3. In altre parole: si può associare in modo covariante alle $x_1 \dots x_6$ *una curva del terzo ordine del piano* z_1, z_2, z_3. Ciò fatto, si può scegliere uno dei nove flessi della cubica come punto covariante rispetto alle $x_1 \dots x_6$. La determinazione di un tal flesso non esige, come è noto, altre irrazionalità che quelle esprimibili mediante radici cubiche e quadratiche. E così, col sussidio di irrazionalità accessorie, si perviene alla meta che si suole riguardare come elementare.

Fisica. — *Intorno alla questione della produzione di un campo magnetico, per opera di un raggio luminoso polarizzato circolarmente.* Nota del Socio Augusto Righi.

Il prof. Fitzgerald ha emesso recentemente l'opinione (1), che un raggio polarizzato circolarmente, passando attraverso un gas fortemente assorbente, possa renderlo magnetico in un grado apprezzabile, e cioè abbia a prodursi un fenomeno in certo modo reciproco di quello di Zeeman, ed annuncia che un suo assistente sta tentando il relativo esperimento.

Una tale ricerca non può considerarsi come nuova, giacchè io stesso fino dal 1883 feci senza frutto dei simili tentativi (2), dirigendo un raggio polarizzato circolarmente su varî corpi, assorbenti o no. Di più, come ha fatto notare il sig. Gray (3), altri tentativi infruttuosi furono da questo autore pubblicati nel 1890 (4).

Non conosco naturalmente quali siano le disposizioni sperimentali adottate nel laboratorio del sig. Fitzgerald, ma certo è che il ricorrere a quei vapori metallici coi quali si suol produrre il fenomeno di Zeeman, deve presentare grandi difficoltà pratiche.

Avendo avuto la fortuna di scoprire che esistono corpi assorbenti, i quali anche alla temperatura ordinaria producono il fenomeno inverso di Zeeman, quali il vapore di ipoazotide (5) e quello di bromo (6), ho pensato di valermene per tentare nuovamente di ottenere il fenomeno supposto. Ecco come ho disposto l'esperienza, la quale, posso dir fin d'ora, non ha dato miglior risultato di quelle fatte in precedenza.

Un tubetto di vetro del diametro di 1,6 c. e della lunghezza di 2,3 c. chiuso con vetri piani sottilissimi e pieno d'ipoazotide gassosa, è posto sul cammino d'un raggio solare orizzontale, condensato con una lente e polarizzato da un nicol. Fra il polarizzatore ed il tubo trovasi una doppia lamina quarto-d'onda, formata da due lamine poste nello stesso piano e congiunte secondo una linea verticale. Siccome il nicol è così orientato, da dare un

(1) Nature, 5 january 1899, pag. 222.

(2) V. la nota in fine della Memoria: *Ricerche sperimentali sul fenomeno di Hall particolarmente nel bismuto.* Mem. della R. Acc. di Bologna, 11 novembre 1883; N. Cimento, 3ª serie, t. XV (1884), pag. 144.

(3) Nature, 16 february 1899, pag. 367.

(4) Phil. Mag., december 1890, pag. 494.

(5) Rend. della R. Acc. dei Lincei, 17 luglio 1898; Berl. Sitzber., 1898, pag. 600; Compt. Rend., t. CXXVII, pag. 216.

(6) Rend. della R. Acc. dei Lincei, 18 dicembre 1898; Berl. Sitzber., 1898, pag. 893; Compt. Rend., t. CXXVIII, pag. 45.

raggio a vibrazioni verticali e le due lamine hanno le loro sezioni principali a 45° l'una a destra l'altra a sinistra della verticale, così basta spostare lateralmente la doppia lamina, in modo che la luce attraversi ora l'una ora l'altra metà di essa, perchè il raggio che attraversa il gas assorbente sia polarizzato circolarmente o in un senso o nel senso opposto.

Al disopra del tubetto si trova un leggiero sistema astatico, formato da due piccoli aghi magnetici, sospeso ad un finissimo filo di quarzo, e munito di un piccolo specchio per la lettura delle deviazioni. Per rendere poi quasi completamente astatico il sistema sospeso, viene fissato in opportuna posizione una piccolissima asticella calamitata, la cui azione compensa quasi del tutto l'azione residua del campo terrestre sul sistema stesso. L'inferiore degli aghi sospesi trovasi a pochi millimetri dal tubo contenente il gas assorbente, ed è diretto trasversalmente all'asse di questo, mentre l'ago superiore dista dal tubo quasi 9 centimetri. In tal modo se il gas si magnetizza per opera del raggio luminoso, il sistema astatico deve deviare.

Fatta più volte l'esperienza non ho potuto osservare, in modo sicuro, nessuna deviazione, sia nell'atto di spostare la doppia lamina quarto-d'onda nel modo indicato, sia, lasciandola fissa, nell'atto di intercettare con un diaframma o di lasciar libero il raggio luminoso.

Per avere poi una idea dell'ordine di grandezza della magnetizzazione cui poteva essere sensibile l'apparecchio, ho formato, mediante un filo di rame, un anello intorno al tubo al disotto del sistema astatico, ed ho cercato qual'era l'intensità della corrente che doveva percorrerlo, perchè si ottenesse una deviazione corrispondente ad un millimetro della scala. Ho trovato per questa intensità il valore $14{,}10^{-7}$, in unità elettromagnetiche assolute. Ne risulta, in base alle dimensioni del tubo e del piccolo circuito, che se l'intensità di magnetizzazione del gas fosse stata eguale a 10^{-6} in valore assoluto, essa avrebbe prodotto una deviazione di circa un millimetro della scala.

Se dunque il gas si magnetizza sotto l'azione del raggio solare polarizzato circolarmente, l'intensità di magnetizzazione deve essere alquanto inferiore a 10^{-6} (C. G. S.).

Fisica terrestre. — *Sulle emanazioni terrestri italiane.* Memoria II: *Gas dei Campi Flegrei e del Vesuvio.* Memoria del Corrisp. Nasini e dei dottori Anderlini e Salvadori.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Zoologia. — *Sull'anatomia e sui costumi dell'Anopheles claviger.* Nota del Socio G. B. Grassi.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sopra la forza elettromotrice di alcuni sistemi di pile a concentrazione e di pile Rame-Zinco con solventi organici.* Nota preliminare di ROBERTO SALVADORI, presentata dal Corrisp. NASINI.

Fisica terrestre. — *Confronti degli strumenti magnetici italiani con quelli degli osservatorî di Parc Saint-Maur e di Kew.* Nota di LUIGI PALAZZO, presentata dal Socio TACCHINI.

Chimica fisica. — *Di una modificazione al pimometro di Sprengel.* Nota di A. MINOZZI, presentata dal Corrisp. NASINI.

Queste Note saranno pubblicate in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulla preparazione di alcune idrazidi e sui loro prodotti di trasformazione* (1). Nota di GUIDO PELLIZZARI, presentata dal Corrispondente BALBIANO.

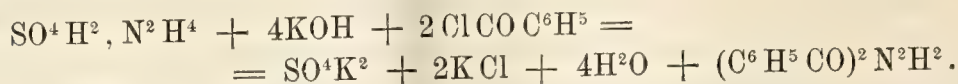
Le idrazidi degli acidi organici furono ottenute da Curtius e dai suoi scolari partendo dall'idrato di idrazina (2) il quale si ha in commercio a prezzo molto elevato e in soluzione diluita, e per prepararlo si richiedono cure ed apparecchi speciali.

In seguito alle mie ricerche sulla sintesi dei composti triazolici (3) nonchè su quelli tetrazolinici (4), m'occorsero varie idrazidi e per alcune son riuscito ad ottenerle direttamente dal solfato di idrazina, che è il preparato che più comunemente si trova nei laboratorî, e qui rendo conto di tali metodi di formazione ed anche sommariamente di alcuni prodotti ottenuti dalle idrazidi per azione del calore.

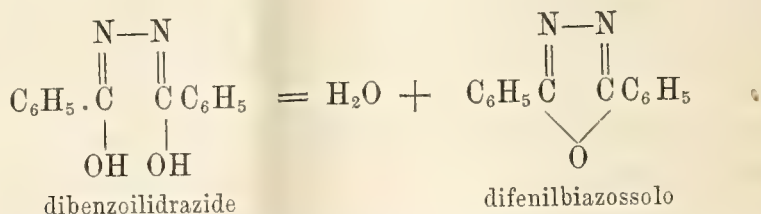
Preparazione della dibenzoilidrazide. — Era stata ottenuta per azione prolungata dell'etere benzoico sopra il derivato monobenzoilico. Io sono riuscito

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di chimica generale della R. Università di Genova.
(2) Journ. f. prakt. Chem. 50, pag. 275.
(3) Gazzetta chim. it. 1894, parte II, pag. 222 e 1896, parte II, pag. 413.
(4) Gazzetta chim. it. 1896, parte II, pag. 430.

a prepararla dal solfato di idrazina in pochi minuti, pura e con rendimento quasi teorico, secondo la seguente equazione:

$$SO^4H^2, N^2H^4 + 4KOH + 2\,ClCO\,C^6H^5 =$$
$$= SO^4K^2 + 2KCl + 4H^2O + (C^6H^5CO)^2N^2H^2.$$

Il solfato di idrazina (1 mol.) si scioglie prima nella potassa diluita (4 mol.) quindi si aggiunge il cloruro di benzoile e si agita; così il prodotto si separa in grumi bianchi e il rendimento è del 90 %. Cristallizzata dall' alcool si ottiene in lamelle bianche fus. a 238°. Ottenuta dall' etere benzoico si purifica più difficilmente e perciò Curtius e Struve dettero per punto di fusione 233° (1). Col presente metodo si ottiene greggia fusibile già a 235°.

Trasformazione della dibenzoilidrazide in difenilbiazossolo. — Gr. 15 di dibenzoilidrazide furono scaldati a bagno di rena in un palloncino a distillazione verso 280° per 6 ore. Tolto il bulbo del termometro dalla miscela e tenuto nel vapore si seguitò a scaldare, finchè non si vide salire la temperatura rapidamente oltre i 300°. Distilla così un po' d' acqua, insieme a piccole quantità di materia oleosa di forte odore di mandorle amare. Nel palloncino rimane un liquido scuro che ancora caldo si versa in una capsula e si rapprende in una crosta verde, che fu sciolta in alcool e decolorata col carbone animale. Il prodotto principale che si ricava è il difenilbiazossolo che si separa in lamine splendenti fusibili a 140° e se ne ottennero circa 8 gr. Separai inoltre una piccolissima quantità di prodotto pochissimo solubile e nelle acque madri trovai circa mezzo grammo di difenil(3.5)triazolo, che separai sciogliendolo in potassa e riprecipitandolo coll' acido cloridrico. Il difenilbiazossolo era già stato ottenuto prima da Günter (2) e poi da Pinner (3) con reazioni assai differenti da questa. La reazione avvenuta consiste nella eliminazione di una molecola di acqua dalla dibenzoilidrazide, e l' interpretazione riesce chiarissima se si considera la dibenzoilidrazide secondo la sua formula ossidrilica:

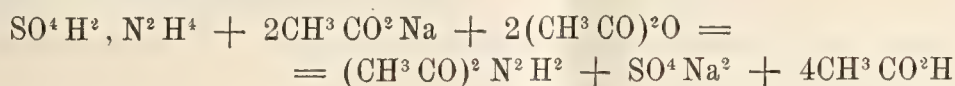
```
       N—N                         N—N
       ‖  ‖                        ‖  ‖
C6H5.C    C C6H5  = H2O +   C6H5 C    C C6H5
       |  |                        \  /
      OH OH                         O
  dibenzoilidrazide            difenilbiazossolo
```

Questa reazione può certamente essere generalizzata per la produzione di altri biazossoli.

(1) Journ. f. prakt. Chem. 50, pag. 299.
(2) Berichte, 1889, pag. 592 e Annali di Liebig, 252, pag. 44.
(3) Annali di Liebig, 297, pag. 221.

Il difenilbiazossolo bollito a lungo con acido cloridrico, dà acido benzoico e cloridrato di idrazina; colla potassa acquosa non si decompone, mentre colla potassa alcoolica si scinde e si ottiene il sale potassico della dibenzoilidrazide.

Preparazione della diacetilidrazide. — Per azione dell'etere acetico sull'idrato di idrazina era stata ottenuta la monoacetilidrazide. Per ottenere il derivato diacetilico, non ancora descritto, ho provato a scaldare la monoacetilidrazide a 180°, ma ottenni invece la dimetiltetrazolina; neppure si ottiene questo derivato diacetilico facendo agire l'etere acetico sopra il monoderivato, per molte ore a ricadere, oppure a 150° in autoclave. Sono riuscito nell'intento per azione dell'anidride acetica sopra la monacetilidrazide: la reazione avviene con sviluppo di calore e perciò è bene aggiungere l'anidride a poco a poco e fino a tanto che sia in piccolo eccesso. Il prodotto si cristallizza dall'alcool e si ottiene in aghi sottili fusibili a 140°. Se l'alcool è un po' acquoso allora si può avere con acqua di cristallizzazione in lamine incolore trasparenti, le quali fondono fra 80° e 100° e perdono l'acqua di cristallizzazione facilmente nella stufa, ed allora diventano opache e fondono a 140°.

Un metodo più comodo di preparazione della diacetilidrazide, consiste nel fare agire l'anidride acetica sopra una miscela di solfato di idrazina e acetato sodico secco secondo la seguente equazione:

$$SO^4H^2, N^2H^4 + 2CH^3CO^2Na + 2(CH^3CO)^2O =$$
$$= (CH^3CO)^2N^2H^2 + SO^4Na^2 + 4CH^3CO^2H$$

Gr. 20 di solfato di idrazina mescolati intimamente con gr. 25,2 di acetato sodico secco furono scaldati per un'ora a 100°, quindi a freddo, e a poco a poco si aggiunsero gr. 31,4 di anidride acetica; la quale reagisce energicamente. Poi si scalda ancora un poco a 100° e si estrae con alcool: la soluzione concentrata si tira a secco a b. m. per scacciare tutto l'acido acetico e lascia come residuo cristallino la diacetilidrazide. Il rendimento è teorico. Cristallizzata dall'alcool forte si ha in cristalli anidri fus. a 140°; dall'alcool acquoso si può ottenere cristallizzata in lamine trasparenti che contengono acqua.

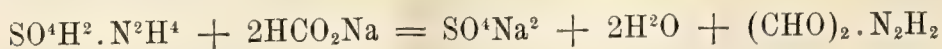
gr. 0,8013 di diacetilidrazide in lamine trasparenti perderono gr. 0,1085 di acqua;

	trovato °/o	calc. $(CH_3CO)_2N_2H_2, H_2O$
H^2O	13,54	13,42

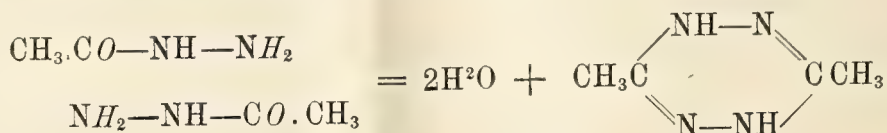
gr. 0,1782 di sostanza anidra dettero 38,2 cc. di azoto a 26° e 754 mm.;

	trovato °/o	calcolato
N	24,30	24,13

Preparazione della diformilidrazide. — Era stata ottenuta per azione di due molecole di etere formico sull'idrato di idrazina. Io la preparai per azione del solfato di idrazina sul formiato sodico secco.

$$SO^4H^2.N^2H^4 + 2HCO_2Na = SO^4Na^2 + 2H^2O + (CHO)_2.N_2H_2$$

Gr. 15 di solfato di idrazina in polvere finissima furono triturati in un mortaio con gr. 15,7 di formiato sodico secco; in questa operazione la miscela si inumidisce; scaldata a 100°, diventa dapprima pastosa e dopo un'ora rimane una massa solida granulosa. Il prodotto estratto con alcool caldo cede la diformilidrazide formatasi, la quale si ottiene per concentrazione della soluzione. Da questa operazione se ne ricavarono gr. 8,6 che rappresentano un rendimento di circa 77 %.

Azione del calore sulla monoacetilidrazide. — La monoacetilidrazide per riscaldamento elimina acqua e si trasforma in dimetiltetrazolina. La reazione può esprimersi col seguente schema:

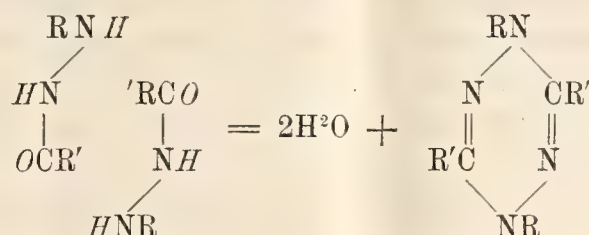
$$\begin{matrix} CH_3.CO-NH-NH_2 \\ NH_2-NH-CO.CH_3 \end{matrix} = 2H^2O + CH_3C\begin{matrix} \diagup NH-N \diagdown \\ \diagdown N-NH \diagup \end{matrix}C\,CH_3$$

Gr. 15 di acetilidrazina furono scaldati a 180-190° per circa 8 ore. Il prodotto cristallizzato da poco alcool, dette la dimetiltetrazolina in cristalli prismatici bianchi, solubilissimi nell'acqua e nell'alcool e discretamente nell'acetone, fusibili a 196°. Per maggiore brevità do i valori analitici percentuali omettendo le pesate:

	trovato	calcolato per $C^4N^4H^8$
C	43,12	42,85
H	7,26	7,14
N	50,00	50,00
Met. ebull. Peso mol.	118 — 116,8 — 117,3	112 —

Fu ottenuto il cloridrato, il solfato e il cloroplatinato, il quale bollito a lungo in soluzione acquosa subisce la reazione di Anderson. La dimetiltetrazolina bollita con anidride acetica, dà facilmente il derivato monoacetilico fus. a 163°; con una certa difficoltà si ottiene il derivato diacetilico.

Azione del calore sopra la diacetil- e diformilidrazide. — La diacetilidrazide come la diformilidrazide, in luogo di reagire di preferenza nel senso stesso della dibenzoilidrazide, hanno fornito invece come prodotto principale dei composti tetrazolinici. Si eliminano cioè due molecole d'acqua fra due molecole di idrazide. Può essere che in parte formino anche composti biazossolici, ma per ora non sono riuscito a separarli.

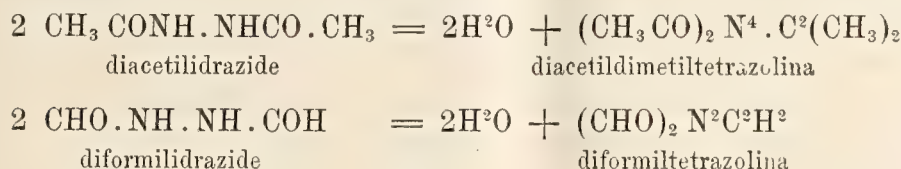
La sintesi della *c dimetiltetrazolina* e della *tetrazolina* dalla *diacetil* e *diformilidrazide* è da paragonarsi colla formazione dalla *n* difeniltetrazolina da me ottenuta per riscaldamento della formilfenilidrazina (Gazz. chim. it. 1896, parte II, pag. 430) e possono queste reazioni esprimersi col seguente schema generale:

```
       RN H                        RN
      /                           /  \
   HN     'RCO                   N    CR'
   |        |     = 2H²O +       ||    ||
  OCR'      NH                  R'C    N
           /                       \  /
        HNR                         NR
```

in cui R può rappresentare un radicale alcoolico come anche acido ed R′ l'atomo d'idrogeno del formile o il CH^3 dell'acetile. Nel caso presente, dunque, si formerebbe dapprima la diacetildimetiltetrazolina e la diformiltetrazolina:

$$2\ CH_3CONH.NHCO.CH_3 = 2H^2O + (CH_3CO)_2N^4.C^2(CH_3)_2$$

diacetilidrazide — diacetildimetiltetrazolina

$$2\ CHO.NH.NH.COH = 2H^2O + (CHO)_2N^2C^2H^2$$

diformilidrazide — diformiltetrazolina

I quali derivati nella reazione stessa in parte si saponificano coll'acqua che si forma. Se il prodotto ottenuto si saponifica completamente con un acido diluito, si ha come resultato finale rispettivamente la dimetiltetrazolina e la tetrazolina.

La diacetilidrazide fu scaldata a 180-190° per circa 8-10 ore: si elimina acqua e acido acetico e il prodotto sciropposo che rimane sciolto in poco acetone dà dei bellissimi cristalli prismatici, che seccati alla stufa fondono a 163° e rappresentano la monoacetildimetiltetrazolina identica a quella ottenuta per azione non prolungata dell'anidride acetica sulla dimetiltetrazolina

	trovato	calcolato per $(CH_3CO)N^4HC_2(CH_3)_2$
N	36,20	N = 36,36

Trattata con acido solforico diluito a caldo, dà acido acetico che distilla col vapor d'acqua, e togliendo poi l'acido solforico colla barite si ricava la dimetiltetrazolina, la quale si può ottenere subito dal prodotto della reazione collo stesso trattamento con acido solforico. Dunque nel caso speciale, almeno in massima parte, uno degli acetili si è saponificato nella reazione stessa coll'acqua sviluppata.

La diformilidrazide scaldata per 7-8 ore a 160° circa svolge acqua e acido formico; il prodotto è costituito da un siroppo dal quale non sono riuscito ad ottenere nessun prodotto cristallizzato, all'infuori di una piccola quantità di sostanza poco solubile in alcool fus. a 263° che rappresenta un prodotto

secondario [1]. La parte principale della reazione e non cristallizzabile, fatta bollire a ricadere con acido cloridrico, sviluppa acido formico, e tirando a secco la soluzione e il residuo cristallizzandolo dall'alcool, si ottiene il cloridrato di tetrazolina in belle lamine trasparenti fus. a 150°. Forma un cloroplatinato che dà facilmente la reazione di Anderson. Questi sali analizzati dettero numeri concordanti colle formule. La base libera non è stata ancora separata. Le presenti ricerche verranno continuate ed in altro periodico darò il resoconto dei risultati ottenuti.

Chimica. — *Sui fenomeni crioidratici nelle soluzioni degli isomeri enantiomorfi.* Nota di Giuseppe Bruni, presentata dal Socio G. Ciamician.

In una recente interessante pubblicazione di H. W. Bakkuis-Roozeboom [2] vengono raccolte ed esposte sistematicamente le considerazioni teoriche, in base alle quali da certe proprietà fisiche delle miscele di isomeri ottici si può decidere se in esse si abbiano presenti o veri composti racemici, o conglomerati inattivi, o cristalli misti pseudo-racemici.

L'utilità di questo lavoro ed i servizi che esso potrà rendere alla chimica organica sono notevoli, poichè a considerazioni più o meno empiriche potranno essere sostituiti ragionamenti strettamente rigorosi basati sulla regola delle fasi.

Fra le proprietà fisiche che possono essere utilizzate come criterio per decidere le questioni suesposte, vengono applicate da Roozeboom la solubilità ed i punti di fusione. Vi sono però altri fenomeni che a questi strettamente si connettono e che possono pure utilmente servire come criterio in simili casi. Sono questi i fenomeni crioidratici.

In un mio precedente lavoro [3] ho dimostrato come l'andamento delle curve di saturazione (congelamento o solubilità) nelle miscele binarie, e quello delle curve crioidratiche nelle miscele ternarie corrispondenti, siano perfetta-

(1) Questa sostanza corrisponde per i resultati analitici e pel peso molecolare, determinato col metodo ebulliscopico, alla formula $C^4N^6H^4$ e sembra essere un derivato tetrazolinico. Tra i prodotti secondari della reazione si trova pure del triazolo, la cui formazione ben si spiega tenuto conto di un pò d'ammoniaca che si ha nel riscaldamento della diformilidrazide. Prendo occasione da questa Nota per annunziare che, seguitando le mie ricerche sulla sintesi dei triazoli per azione delle idrazidi sulle amidi, ho già ottenuto il trifeniltriazolo; il *c* difetiltriazolo; i due *n* fenil-*c* metiltriazoli ed i non ancora conosciuti *c* feniltriazolo f. 117°; il *c* dimeniltriazolo f. 140°, b. 268°; l'*n* fenil-*c* dimetiltriazolo f. 43° b. 281°, e l'*n* feniltriazolo simmetrico f. 119°.

(2) Berl. Berichte XXXII, 537.

(3) Atti di questa Accademia, 1898, 2° sem. 198; Gazz. chim. ital. XXVIII, II, 508.

mente analoghi. Ciò è una conseguenza naturale del fatto che nei due casi si hanno sistemi che, secondo la regola delle fasi, presentano lo stesso grado di varianza, sistemi che si potrebbero dire equivarianti.

Da ciò segue pure che i fenomeni di congelamento in un sistema binario e quelli di solubilità in un sistema ternario non sono confrontabili, presentando questi ultimi manifestamente un grado superiore di varianza. Infatti in entrambi questi sistemi è presente lo stesso numero di fasi, mentre nel sistema ternario esiste un componente indipendente in più.

Volendo quindi servirsi dei fenomeni di solubilità nei sistemi ternarii, si devono considerare non le ordinarie curve in cui la solubilità è espressa in funzione della temperatura; ma bensì (come fa Roozeboom) isoterme di solubilità.

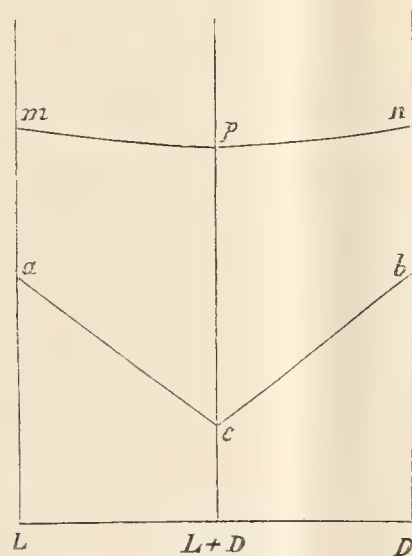



Fig. 1.

I ragionamenti di Roozeboom sulle curve di congelamento sono invece completamente estendibili alle curve crioidratiche nei sistemi ternarii. Nelle deduzioni che seguono userò il sistema di rappresentazione grafica (fig. 1ª e 2ª) già usato in un mio lavoro sopra citato.

Sull'asse delle ascisse vengono riferiti i rapporti nei quali i due isomeri enantiomorfi si trovano fra di loro nella miscela, senza tener conto della quantità del solvente. Sull'asse delle ordinate vengono portate le temperature. Dall'andamento delle curve crioidratiche può agevolmente dedursi se si abbia un vero composto racemico, oppure un conglomerato inattivo, oppure dei cristalli misti pseudo-racemici. Questi andamenti corrisponderanno evidentemente in modo completo a quelli descritti nei casi I, II, IV, del mio già citato lavoro; ed i ragionamenti che seguono sono anzi già implicitamente contenuti in esso.

La soluzione nella quale si abbia il composto racemico od il conglomerato inattivo sarà rappresentata dalla retta parallela all'asse delle ordinate e che taglia per metà l'asse delle ascisse. E la curva, qualunque sia la sua forma, sarà divisa da questa retta in modo perfettamente simmetrico.

Nel caso che non si tratti di un vero composto racemico, ma bensì di un conglomerato inattivo, la curva assumerà l'andamento *acb* (fig. 1ª); *a* e *b* saranno i due punti crioidratici dei due isomeri enantiomorfi i quali si troveranno alla stessa temperatura; da ognuno di essi aggiungendo alla soluzione porzioni crescenti dell'isomero, si arriverà al punto *c* che si troverà a temperatura più bassa.

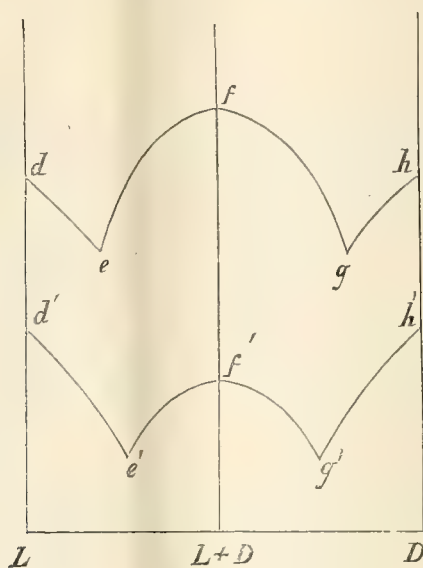



Fig. 2.

Nel caso invece che si abbia un vero composto racemico la curva assumerà uno dei due andamenti della fig. 2ª, in cui sono previsti i due casi che il composto racemico (essendo più o meno solubile dei due componenti) abbia un punto crioidratico più basso o rispettivamente più elevato di essi.

Quando si constati l'ultimo caso — come nella curva *defgh* — cio è già evidentemente un indizio sicuro dell'esistenza di un vero composto racemico. Qualora invece — come nella curva *d'e'f'g'h'* — il punto crioidratico del composto sia più basso diventa necessario uno studio ulteriore della curva. L'andamento sarà però nei due casi essenzialmente simile. Si avranno cioè non più uno ma due punti di minimo, punti crioidratici doppi nei quali sussistono, come fasi solide accanto al ghiaccio, il composto racemico ed uno dei due isomeri enantiomorfi.

Il criterio quindi da usare nella risoluzione del problema propostosi è il seguente: se aggiungendo alla soluzione crioidratica del composto o del conglomerato inattivo un eccesso di uno dei due componenti si ha un abbassamento ulteriore (fig. 2ª curve *fe*, *fg*; *f'e'*, *f'g'*) si ha presente un vero composto racemico; se invece le soluzioni che contengono in eccesso uno dei due componenti hanno punti crioidratici più elevati (fig. 1ª curve *ca*, *ch*) si ha invece un semplice conglomerato inattivo.

Un altro caso può darsi, e cioè che si formino dei cristalli misti pseudoracemici. In tal caso, ove questi cristalli misti possano esistere in tutte le proporzioni, si avrà una sola curva continua decorrente fra i due punti crioidratici dei due isomeri emantiomorfi (fig. 1ª curva *mpn*) e che sarà come tutte le precedenti perfettamente simmetrica. Questa curva si allontanerà in generale assai poco dalla retta orizzontale congiungente i due punti estremi. In un tal caso sarà però necessaria la conoscenza di tutta la curva.

Concludendo, si può fare per le curve crioidratiche nei sistemi ternarii la stessa classificazione fatta da Roozeboom pei sistemi binarii. Si avranno cioè:

1. per un composto racemico: tre curve;
2. per un conglomerato inattivo: due curve;
3. per i cristalli misti pseudo-racemici: una sola curva.

Naturalmente tali fenomeni, come quelli di congelamento, si complicano se alle temperature considerate i composti racemici, i conglomerati ed i cristalli misti si trasformano reciprocamente.

Quanto all'applicabilità pratica del metodo, si vede facilmente come esso possa in molti casi sostituirsi ed in certi essere preferibile a quelli proposti da Roozeboom.

Infatti lo studio sistematico delle curve di congelamento richiede quantità relativamente considerevoli di sostanza che non sono sempre a disposizione dello sperimentatore, ed esso non sarà più applicabile nei casi non infrequenti di composti che nel fondere si decompongano. Lo studio delle isoterme di solubilità presenta poi sempre certe difficoltà sperimentali. L'esame delle temperature crioidratiche non presenta invece nessuna di tali difficoltà, purchè si abbia cura di scegliere un solvente nel quale i composti di cui si tratta siano abbastanza ma non troppo solubili.

Dei metodi che possono usarsi nelle determinazioni delle temperature crioidratiche parlerò più diffusamente in altro luogo, ed in tale occasione esporrò pure opportuni esempî sperimentali atti a verificare e ad illustrare le regole poste più sopra.

Chimica. — *Studi intorno alla costituzione degli alcaloidi del melagrano.* Nota di A. PICCININI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Cristallografia. — *Per la asimmetria dei cristalli.* Nota di C. Viola, presentata dal Socio Blaserna.

Le figure di corrosione del primo stadio, che in generale sono irregolari, e presentano le cosidette anomalie, servono per dimostrare la legge generale *che i cristalli sono asimmetrici, e che ogni simmetria, sotto cui i cristalli possono presentarsi, deve provenire da una associazione simmetrica e omogenea di gemini.*

Anche le cosidette faccie vicinali, che, per fermo, non possonsi spiegare con la legge di Curie-Sohncke, nè con la *legge del minimo lavoro* delle molecole in un fluido; e così eziandio le striature, che frequentemente rigano le faccie dei cristalli, e anche le faccie ricurve portano delle nuove prove, non più sicure di quelle già addotte, alla legge generale della asimmetria, che io sviluppai in una mia Nota precedente [1].

Accettata questa legge, che le esperienze ulteriori dovranno confermare, e sarà fatto un gran passo nello spiegare l'isomorfismo, il polimorfismo e le anomalie ottiche e geometriche dei cristalli. Dico sarà fatto un grande passo, non già sarà data la soluzione completa del difficile e complicato problema, su cui lavorarono i migliori ingegni da Brewster e Bravais in poi.

La legge di Hauy e quelle che con essa sono identiche, come la legge di Weiss, quella di Miller-Gauss, la legge di Hecht ecc. perdono con la legge generale della asimmetria l'assoluto valore, che fino ad ora loro si attribuiva; lo perdono perchè non può essere ammesso come dogma che la cristallizzazione proceda in guisa da generare una struttura omogenea nello stretto senso della parola, e come largamente fu definita già da Sohncke. L'omogeneità e le discontinuità possono essere concentriche, ovvero irregolari, e il complesso di faccie del cristallo non costituirà un sistema razionale. Allora pertanto gli indici milleriani non hanno più ragione di essere; in quella vece si presenta da sè la necessità di ricorrere alla segnatura razionale e semplice di Goldschmidt, che si è già dimostrata molto comoda nella pratica, grazie alle tavole numeriche calcolate e pubblicate dallo stesso autore. Ma nemmeno le coordinate di Goldschmidt potranno avere successo, se il goniometro a un asse non farà definitivamente posto al goniometro a due assi, col quale i calcoli necessarî per la posizione delle faccie, sono eliminati.

Può essere interessante per noi di vedere in quali e quante maniere è possibile di combinare e associare i gemini fra loro per dar luogo a strut-

(1) C. Viola, *Ueber Homogenität und Aetzung.* Zeitsch. f. Kry. 1899, XXXI, fasc. 2°.

ture assolutamente omogenee; le quali serviranno da guida, attorno a cui si aggregheranno le strutture non perfettamente omogenee, che non si devono escludere dai cristalli, allorchè questi si presentano sotto forma di poliedri, razionali o no.

Supposto dunque che la simmetria abbia luogo in una sostanza perfettamente omogenea, le simmetrie nello spazio attorno a un punto sono 32 (compresavi la asimmetria). Questo è un assioma matematico, che non ha bisogno di essere dimostrato. Ma perchè le dette 32 simmetrie siano possibili, occorre che lo scheletro, attorno al quale si aggruppano le molecole o meglio i punti fisicamente equivalenti, soddisfi a certe condizioni, le quali sono le stesse, che diedero origine ai sei sistemi cristallografici triclino, monoclino, rombico, quadratico, esagonale e cubico.

Ammessa la legge che i cristalli sono tutti asimmetrici, facciamo naturalmente cadere la necessità di conservare la denominazione di sistemi, che non può più avere alcun significato. Rimane solamente la asimmetria, la quale, atteso il carattere geometrico e fisico in parte, con cui suole presentarsi, sarà:

Asimmetria triclina $= T_{00}$,
" monoclina $= M_{00}$,
" rombica $= R_{00}$,
" quadrata $= Q_{00}$,
" esagona $= H_{00}$,
" cubica $= C_{00}$.

Se la asimmetria è triclina (T_{00}), e ammesso che la struttura debba essere omogenea in tre direzioni nello spazio, sarà possibile un unico complesso di geminazioni; i due gemini sono fra loro simmetrici rispetto a un piano di riflessione, e l'uno di essi è inverso rispetto all'altro. Questa combinazione e compenetrazione omogenea di gemini equivale alla simmetria conosciuta col nome di oloedria triclina, ovvero simmetria pinacoidale, in cui esiste il centro di inversione, come unico elemento della simmetria. La sostanza che suol presentarsi sotto questa simmetria cristallografica, deve possedere due specie di molecole fra loro inverse. Un esempio, che, mi sembra, possa riferirsi qui con sicurezza, ci dà l'anortite, e i plagioclasi in generale. Infatti fu dimostrato già da Wiik [1] che l'anortite è asimmetrica, siccome è indubitato che essa si presenta eziandio con un centro di inversione.

Volendo introdurre nella asimmetria triclina altri complessi di geminazioni, p. e. con un piano o con un asse di geminazione, otterremo una struttura omogenea in una o in due direzioni, ma giammai in tre. Così p. e. Michel Lévy tentò di dimostrare che con la geminazione polisintetica secondo

[1] Wiik, Zeitschrift für Krystall. 23, 379.

la legge albitica i feldispati triclini potrebbero assumere la struttura dei feldispati monoclini; ma questo tentativo di Michel Lévy non potè avere alcun risultato soddisfacente, poichè la struttura generata dalla geminazione polisintetica di individui triclini secondo la legge albitica non è omogenea in tre direzioni per tutti i fenomeni fisici, come all'incontro lo è la struttura dei feldispati monoclini. Invece quest'ultima è generata da geminazioni polisintetiche secondo una legge, che con ragione possiamo chiamare albitica. Dunque il feldispato monoclino oloedrico può essere considerato quale un geminato composto di 4 individui, i quali due a due stanno fra loro come oggetto e imagine rispetto a un piano, che è il piano di geminazione, perpendicolare al quale è l'asse binario di geminazione. Il simbolo di questo complesso di quattro gemini può essere M_{02}^{σ} seguendo il metodo, che indicheremo fra breve. Quivi l'apice 2 dà il grado dell'asse di geminazione, e l'esponente σ esprime che il piano di geminazione *non* passa per il detto asse.

Il geminato composto di due gemini fra loro inversi appartenenti all'asimmetria triclina può prendere il simbolo T_{21}, volendo indicare che manca un piano fisso di geminazione, l'asse di geminazione è di primo grado, e unitamente ad esso evvi un asse d'inversione di secondo grado.

Se una ingeminazione siffatta si presentasse nella asimmetria monoclina, si adotterebbe il simbolo M_{21}, e così similmente per altre ingeminazioni omogenee, seguendo lo stesso principio.

Nell'asimmetria monoclina M_{00} si possono dare due gemini in posizione di 180° rispetto a un asse, e il simbolo per designare questo geminato sarà M_{02}; e finalmente essi possono essere in posizione come oggetto e imagine rispetto a un piano di riflessione σ, e il simbolo ne sarà M_{00}^{σ}, volendo insistere che vi manca assolutamente un asse di geminazione.

L'asimmetria monoclina M_{00} è dunque capace di generare quattro differenti complessi di geminazione a struttura omogenea, e sono:

$$M_{21}\,,\ M_{02}\,,\ M_{00}^{\sigma}\ \text{e}\ M_{02}^{\sigma}\,;$$

vale a dire, due con un piano di geminazione e due con un asse, il quale può essere o binario, o singolare, cioè equivalente a un centro di inversione.

L'asimmetria rombica R_{00} potrà generare in primo luogo le 4 simmetrie, che genera l'asimmetria monoclina M_{00}, e in seguito saranno possibili delle combinazioni di gemini con un asse binario di geminazione e due piani di geminazione fra loro normali e passanti per il detto asse, combinazione che potremo indicare col simbolo R_{02}^{s} essendo s il piano passante per l'asse binario; indi con tre assi binari di geminaziane fra loro normali, che indicheremo col simbolo R_{22}, e finalmente con tre piani di geminazione ortogonali, complessi, che chiameremo con R_{22}^{s}.

Dunque l'asimmetria rombica R_{00} potrà dar luogo alle seguenti ingeminazioni a struttura perfettamente omogenea:

$$R_{21}\,,\ R_{02}\,,\ R_{00}^{\sigma}\,,\ R_{02}^{\sigma}\,,\ R_{02}^{s}\,,\ R_{22}\,,\ R_{22}^{s}\,.$$

Un bellissimo esempio dell'asimmetria rombica ci dà l'aragonite secondo le esperienze di Beckenkamp; essa comparisce quale una ingeminazione di 8 individui, come esprime il simbolo R_{02}^{s}; ed è però che Beckenkamp propose di assegnare nel sistema rombico la *ogdoedria*.

Sarà bene che noi ripetiamo qui i simboli da me proposti per designare le 32 simmetrie attorno a un punto esistenti nello spazio nelle sostanze assolutamente omogenee, e la relativa nomenclatura divulgata col bel trattato di P. Groth e con la nuova edizione della bellissima cristallografia fisica di Th. Liebisch, nomenclatura, che già completa troviamo nei lavori di Fedorow:

1.	S_{00}	asimmetria	17.	S_{03}^{s}	simmetria piramidale-bitrigone
2.	S_{21}	simmetria pinacoidale	18.	S_{03}^{σ}	„ bipiramidale trigone
3.	S_{02}	„ sfenoedrica	19.	S_{23}	„ trapezoedrico-trigone
4.	S_{00}^{σ}	„ domatica	20.	S_{23}^{s}	„ bipiramidale-bitrigone
5.	S_{02}^{σ}	„ prismatica	21.	S_{06}	„ piramidale esagona
6.	S_{02}^{s}	„ piramidale	22.	S_{06}^{s}	„ piramidale biesagona
7.	S_{22}	„ bisfenoedrica	23.	S_{06}^{σ}	„ bipiramidale esagona
8.	S_{22}^{s}	„ bipiramidale	24.	S_{63}	„ romboedrica
9.	S_{04}	„ piramidale quadrata	25.	S_{63}^{s}	„ scalenoedrico-esagona
10.	S_{04}^{s}	„ piramidale biquadrata	26.	S_{26}	„ trapezoedrico-esagona
11.	S_{04}^{σ}	„ bipiramidale quadrata	27.	S_{26}^{s}	„ bipiramidale biesagona
12.	S_{42}	„ sfenoedrico-quadrata	28.	S_{33}	„ tetartoedrica
13.	S_{42}^{s}	„ scalenoedrico-quadrata	29.	S_{33}^{σ}	„ dodecaedrica
14.	S_{24}	„ trapezoedrico-quadrata	30.	S_{33}^{s}	„ tetraedrica
15.	S_{24}^{s}	„ bipiramidale biquadrata	31.	S_{34}	„ giroedrica
16.	S_{03}	„ piramidale-trigone	32.	S_{34}^{s}	„ ottaedrica.

Il principio che informa questa segnatura, è in primo luogo questo che la base è una sola lettera, p. e. S; in secondo luogo gli apici indicano i gradi degli assi di simmetria, e l'esponente s ovvero σ indica un piano di simmetria o di riflessione, il quale o passa (s) per l'asse di simmetria, il cui grado è dato dall'apice a destra, ovvero non passa (σ) per il detto asse.

Allorchè unitamente a un asse di simmetria evvi una inversione, nel qual caso il suo grado è doppio del grado della simmetria, esso è segnato da un apice a sinistra. Figure simmetriche aventi un asse di inversione, come unico elemento della simmetria, sono dunque rappresentate dal simbolo

$$S_{2m,m}$$

Se oltre l' asse d' inversione vi sono degli assi binarî, nel qual caso non possono essere in numero maggiore di m, e devono essere perpendicolari al detto asse di inversione, si adotterà il simbolo

$$S_{2m,m}^{s},$$

poichè basta il piano di riflessione s passante per l' asse di inversione per dar luogo agli m assi binarî.

In questa segnatura sono dunque messi in evidenza con tre soli segni tutti quegli elementi (e non vi abbisognano mai più di tre), i quali sono sufficienti per individuare completamente una qualunque simmetria nello spazio (si intende spazio ordinario a curvatura costante) attorno a un punto.

Per il nostro scopo la segnatura di Schoenflies non può prestarsi. Invece quella razionale di Minnigerode adottata anche da Liebisch potrebbe essere utilizzata con vantaggio, se essa fosse accomodata per le varie asimmetrie. Credo si possa dire altrettanto della semplice segnatura di Gadolin e della elegante di Möbius.

Ora possiamo facilmente riassumere tutte le possibili ingeminazioni, che avranno luogo, la struttura essendo perfettamente omogenea.

I. — 1. Asimmetria triclina T_{00}
2. Ingeminazione pinacoidale T_{21}.

II. — 1. Asimmetria monoclina M_{00}
2. Ingeminazione pinacoidale M_{21}
3. " domatica M_{00}^{σ}
4. " sfenoedrica M_{02}
5. " prismatica M_{02}^{σ}.

III. — 1. Asimmetria rombica R_{00}
2. Ingeminazione pinacoidale R_{21}
3. " domatica R_{00}^{σ}
4. " sfenoedrica R_{02}
5. " prismatica R_{02}^{σ}
6. " piramidale R_{02}^{s}
7. " bisfenoedrica R_{22}
8. " bipiramidale R_{22}^{s}.

IV. — 1. Asimmetria quadrata Q_{00}
2. Ingeminazione pinacoidale Q_{21}
3. " domatica Q_{00}^{σ}
4. " sfenoedrica Q_{02}
5. " prismatica Q_{02}^{σ}

IV. — 6. Ingeminazione piramidale Q^s_{02}
7. " bisfenoedrica Q_{22}
8. " bipiramidale Q^s_{22}
9. " piramidale quadrata Q_{04}
10. " piramidale biquadrata Q^s_{04}
11. " bipiramidale quadrata Q^σ_{04}
12. " sfenoedrico-quadrata Q_{42}
13. " scalenoedrico-quadrata Q^s_{42}
14. " trapezoedrico-quadrata Q_{24}
15. " bipiramidale biquadrata Q^s_{24}.

V. — 1. Asimmetria esagona H_{00}
2. Ingeminazione pinacoidale H_{21}
3. " domatica H^σ_{00}
4. " sfenoedrica H_{02}
5. " prismatica H^σ_{02}
6. " piramidale H^s_{02}
7. " bisfenoedrica H_{22}
8. " bipiramidale H^s_{22}
9. " piramidale trigone H_{03}
10. " piramidale bitrigone H^s_{03}
11. " bipiramidale trigone H^σ_{03}
12. " trapezoedrico-trigone H_{23}
13. " bipiramidale bitrigone H^s_{23}
14. " piramidale esagona H_{06}
15. " piramidale biesagona H^s_{06}
16. " bipiramidale esagona H^σ_{06}
17. " romboedrica H_{63}
18. " scalenoedrico-esagona H^s_{63}
19. " trapezoedrico-esagona H_{26}
20. " bipiramidale-biesagona H^s_{26}.

VI. — 1. Asimmetria cubica C_{00}
2. Ingeminazione pinacoidale C_{21}
3. " domatica C^σ_{00}
4. " sfenoedrica C_{02}
5. " prismatica C^σ_{02}
6. " piramidale C^s_{02}
7. " bisfenoedrica C_{22}
8. " bipiramidale C^s_{22}
9. " piramidale quadrata C_{04}
10. " piramidale biquadrata C^s_{04}

VI. — 11. Ingeminazione bipiramidale quadrata C_{04}^{σ}
12. " sfenoedrico-quadrata C_{42}
13. " scalenoedrico-quadrata C_{42}^{s}
14. " trapezoedrico-quadrata C_{24}
15. " bipiramidale biquadrata C_{24}^{s}
16. " piramidale trigone C_{03}
17. " piramidale bitrigone C_{03}^{s}
18. " romboedrica C_{63}
19. " scalenoedrico-trigone C_{63}^{s}
20. " tetraedrica C_{33}
21. " dodecaedrica C_{33}^{σ}
22. " bitetraedrica C_{33}^{s}
23. " giroedrica C_{34}
24. " ottaedrica C_{34}^{s}.

La asimmetria esagona H_{00} non può dar luogo ad alcuna ingeminazione con un asse quaternario. E così l'asimmetria cubica non renderà possibili delle ingeminazioni con un asse senario di simmetriá; nè quivi saranno possibili degli assi ternarî con piani di geminazione ad essi normali.

Nell'ordinare le sei asimmetrie, ho proceduto dalla asimmetria triclina (T_{00}) cioè dalla asimmetria meno perfetta, come quella, che è capace di generare il minor numero di simmetrie, alla asimmetria cubica (C_{00}) cioè la asimmetria più perfetta, come quella, che ne può generare il maggior numero. Seguendo quest'ordine di idee la asimmetria quadrata (Q_{00}) deve passare innanzi alla asimmetria esagona, essendo quella capace di formare solamente 15 ingeminazioni, e questa 20 ingeminazioni omogenee.

Le asimmetrie e le ingeminazioni possibili in una struttura omogenea sono dunque 74.

Le meriedrie, cioè le simmetrie inferiori alla simmetria di un reticolo nello spazio, non poterono discendere sotto un dato limite, come supposero Bravais, e diciamo pure anche Sohncke, Fedorow e Schoenflies, i quali fondarono la struttura dei cristalli sulla base dei sistemi di punti semplici e composti. Ma da questa restrizione si allontanò già Mallard. È noto che egli ammise delle meriedrie possibili inferiori a quelle compatibili con la simmetria minima corrispondente ad un reticolo nello spazio; e dimostrò persino che le geminazioni sono più frequenti quanto più bassa è la meriedria. Da Mallard a noi la esperienza e la teoria fecero grande cammino. Già Baumhauer e Beckenkamp supposero delle simmetrie diverse dalle 32. Fr. Wallerant [1]

[1] Fr. Wallerant, *Théorie des anomalies optiques, de l'isomorphisme et du polymorphisme, déduite des théories de MM. Mallard et Sohncke.* Bull. de la Soc. franç. de Min. 1898, 21, 188.

andò più oltre; accennò al fatto che le anomalie ottiche entrano nella legge comune, pur supponendo, come è probabile, che le ingeminazioni per sè possano dar luogo a fenomeni ottici diversi da quelli, che corrispondono ai singoli individui. Io credo che il lavoro di Wallerant se non esprime ancora, appoggia pertanto tacitamente la legge generale della asimmetria dei cristalli.

Il numero delle anomalie ottiche e geometriche, o di quelle che così si vogliono chiamare, cresce ogni giorno con le nuove osservazioni, sicchè il principio dei sistemi cristallografici accoglie meno fenomeni, di quello che siano esclusi con la formola comoda di anomalie.

La fluorina cristallizza nella asimmetria cubica. Di essa sono conosciute le seguenti combinazioni, secondo le esperienze di Wallerant [1]:

1. Ingeminazione domatica C_{00}^{σ}
2. " scalenoedrico-trigone C_{63}^{s}
3. " ottaedrica C_{34}^{s}.

È probabile che la leucite cristallizzi nella asimmetria cubica (C_{00}) pur non escludendo che le proprietà ottiche siano quelle proprie delle asimmetrie monoclina e rombica secondo le belle esperienze di C. Klein. Di essa si conoscono le ingeminazioni prismatica C_{02}^{σ}, bipiramidale C_{22}^{s}, piramidale quadrata C_{04}, giroedrica C_{34} e ottaedrica C_{34}^{s}. Con dubbio si può asserire che l'asimmetria della leucite sia quadrata o rombica, poichè è provato che vi si presentano combinazioni da dar luogo a simmetrie superiori di R_{22}^{s} e risp. Q_{24}^{s}. Secondo le belle esperienze di C. Klein [2], la birifrangenza della leucite varia con la temperatura; a 560° essa è quasi nulla. Anche l'analcime si comporta nella stessa maniera, con la sola differenza che la sua birifrangenza cresce con la temperatura. Circa il granato, sembra che questo minerale cristallizzi nella asimmetria cubica, come la fluorina e l'alume. Del granato si conoscono ingeminazioni C_{02}^{σ}, C_{22}^{s}, C_{33}^{σ} secondo le osservazioni di C. Klein [3].

È molto probabile che il carbonato di calcio sia dimorfo; poichè una forma, sotto cui esso si presenta, è l'asimmetria rombica (R_{00}) con varie combinazioni, che vanno fino alla ingeminazione rombico-bipiramidale R_{22}^{s}; l'altra forma è l'asimmetria esagona H_{00}, e si chiama calcite quando è pura o metacalcite [4] quando è unita al carbonato di magnesio; i complessi di combinazioni, che se ne conoscono, sono la romboedrica H_{63}, come nella dolomite e la scalenoedrica H_{63}^{s} come nella calcite pura, ma le figure di cor-

[1] F. Wallerant, *Mémoire sur la fluorine*. Bull. Soc. franç. de Miner. 1898, 21, 44.

[2] C. Klein, *Mineralogische Mittheilungen*. Neues Jahrbuch für Miner. BB. 11, 475-553.

[3] Mitth. aus der Kg. preuss. Akademie der Wissensch. 1898.

[4] C. Viola, *La struttura Carsica osservata in alcuni monti calcarei della provincia Romana*. Boll. R. Uff. geologico, 1897, n. 2.

rosione, cosidette anomale, hanno messo in evidenza delle simmetrie inferiori di H_{63} nella calcite.

I pesi specifici differenti fra aragonite (2,85) e calcite (2,7) permettono l'accettazione dell'ipotesi, già avanzata da Bravais, che veramente il carbonato di calcio è dimorfo; anche i clivaggi nell'un caso e la mancanza nell'altro sono un carattere favorevole per l'ipotesi suddetta.

Esaminando i molteplici risultati sperimentali, parte dei quali io riferii in una delle mie Note precedenti, non si può fare a meno di riconoscere che la legge generale della asimmetria nei cristalli è sostenuta da una base solida. L'attenzione dei mineralogisti rivolta alle anomalie ottiche e geometriche dei cristalli, la quale negli ultimi 20 anni principalmente fu forte e generale, agevolerà la raccolta di fatti sperimentali, capaci di far vedere fino a quale punto l'isomorfismo e il polimorfismo che qui volli solo accennare, sono spiegabili con la legge generale della asimmetria dei cristalli; perchè per quanto riguardano le anomalie ottiche, esse naturalmente divengono, con la legge della asimmetria, fenomeni ordinarî.

Cristallografia. — *Celestina di Strongoli (Calabria)* [1].

Nota del dott. FEDERICO MILLOSEVICH, presentata dal Socio STRÜVER.

Nell'agosto dello scorso anno ho avuto occasione di visitare le miniere di zolfo attualmente in attività presso Strongoli nella provincia di Catanzaro. Dai signori avv. e dott. Pelaggi proprietarî della miniera Consolazione nella località detta la Carcarella ebbi in dono cortesemente alcuni campioni di minerali di quella miniera, cioè *Zolfo*, *Gesso*, *Calcite* e segnatamente *Celestina* in bei cristalli: lo studio appunto di questi è oggetto della presente Nota.

Come è noto le miniere di zolfo presso Strongoli e S. Nicola dell'Alto si trovano nella formazione gessoso-solfifera del miocene superiore e quindi, tranne la minor ricchezza ed estensione, sono perfettamente paragonabili a quelle di Sicilia e di Romagna. Lo Zolfo si trova in una marna azzurrognola ed è accompagnato dai soliti minerali. Il Cortese [2] che descrisse questi giacimenti dice essere raro lo zolfo in cristalli e mancare affatto le belle cristallizzazioni di Celestina e di Aragonite dei consimili giacimenti di Sicilia.

Il Neviani [3] invece già da prima avea accennato a cristalli di Zolfo, di Celestina e di Gesso di quelle miniere.

[1] Lavoro eseguito nel Gabinetto di mineralogia della R. Università di Roma.

[2] E. Cortese, *Descrizione geologica della Calabria*. Memorie descrittive della Carta geologica d'Italia, vol. IX, 1895, pag. 293-298.

[3] A. Neviani, *Di alcuni minerali raccolti nella provincia di Catanzaro*. Catanzaro 1887, pag. 10-12. L'A. cita le forme }021{ }101{ }110{ }001{ }100{ per la Celestina, ma non dice secondo quale orientazione.

Lo *Zolfo* che ho potuto esaminare si presenta talora in cristalli della solita combinazione }111{ }113{ }001{ }011{, il *Gesso* in cristalli prismatici allungati e non terminati, la *Calcite* in concrezioni globulari formate di imperfetti cristalli.

Molto più interessanti sono invece i cristalli di *Celestina* che presentano le seguenti forme che danno due combinazioni di abito assolutamente diverso:

}001{ $0P$. }100{ $\infty \bar{P} \infty$.
}110{ ∞P.
}011{ $\breve{P} \infty$.
}102{ $\frac{1}{2} \bar{P} \infty$.
}111{ P. }322{ $\frac{3}{2} \bar{P} \frac{3}{2}$.

La forma }322{ è nuova per la Celestina.

I cristalli più comuni e più numerosi generalmente di piccole dimensioni, che chiameremo del primo tipo, rivestono insieme con zolfo le cavità della marna solfifera e sono dello stesso abito di quelli notissimi di Sicilia. Presentano la combinazione:

}001{ }011{ }102{ }110{ }322{ (vedi fig. 1).

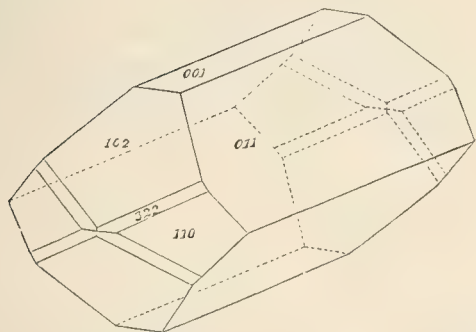



Fig 1.

Sono allungati secondo l'asse x e presentano sviluppatissime le facce del brachidoma }011{ imperfette e striate, poco sviluppate quelle del pinacoide }001{. Presso a poco uguale estensione hanno le facce del macrodoma }102{ e del prisma }110{. In taluni cristalli del primo tipo si presenta la nuova forma }322{ rappresentata da faccettine che appaiono come lunghe e sottili troncature degli spigoli fra }110{ e }102{. Al goniometro danno scarso riflesso e quindi di esse ho ottenuto misure angolari inesatte, ma fortunatamente il simbolo }322{ fu potuto determinare mediante le zone [(110):(102)] e [(011):(100)]. Gli angoli principali per questa forma sono i seguenti:

Angolo	(100):(322) =	misurato	33°	circa,	calcolato	33° 23′
"	(110):(322) =	"	22° 1/2	"	"	22° 18′
"	(102):(222) =	"	38°	"	"	37° 38′ 1/2

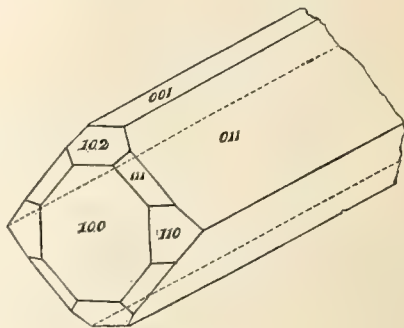
I cristalli del secondo tipo più grandi e meno numerosi sono sparsi sopra una incrostazione di calcite biancastra che presenta in qua e in là dei

globuli sporgenti formati da aggregati di cristalli imperfetti del medesimo minerale; al disotto fra questa calcite e la solita marna uno straterello di zolfo puro. Questi cristalli presentano la combinazione:

{100} {001} {011} {102} {110} {111} (v. fig. 2).

L'abito è ben diverso da quelli precedentemente descritti: sono ancora allungati secondo l'asse x con le facce del brachidoma prevalenti e la base lunga e sottile, ma all'estremità sono terminati dal pinacoide {100} sempre molto sviluppato: di conseguenza sono ridotte le facce delle forme {102} e {110}. La piramide {111} è rappresentata da piccole lucenti faccettine. Le facce del pinacoide {100} sono opache e mostrano una marcata striatura parallelamente allo spigolo [001]: quando esse sono più piccole, per prevalente sviluppo del prisma {110}, è facile scorgere che questa striatura è data da un seguito di alternanze delle facce vicine di esso prisma. Questo tipo di cristalli piuttosto raro si può rassomigliare a quello descritto da G. Drabant [1] per la Celestina di Conil presso Cadice che presenta anche il pinacoide {100} sviluppato opaco e marcatamente striato.

Fig. 2.

Aggiungo infine un elenco di qualche angolo da me misurato posto in confronto con quelli calcolati secondo il rapporto parametrico di Auerbach [2] adottato nel trattato del Dana, cioè:

$$\breve{a} : \bar{b} : \acute{c} = 0{,}77895 : 1 : 1{,}28005$$

Angoli	Media delle misure	Calcolo
110:1$\bar{1}$0	75° 52′	75° 50′
011:0$\bar{1}$1	104 3	104 0
102:10$\bar{2}$	101 15	101 11
102:110	60 2	59 57
110:111	25 44	25 39
322:011	57° circa	56 37
322:110	22° 1/2 circa	22 18
322:102	38° circa	37 38 1/2

(1) C. Bärwald, *Untersuchung einiger Cölestine*. Zeitsch. f. Kryst. u. Min. XII, 231. La parte cristallografica di questo lavoro di C. Bärwald si deve a G. Drabant.

(2) A. Auerbach. *Krystallographische Untersuchung des Cölestins*. Sitzungsb. d. K. Akad. Wien. LIX. II Abth. 1869. S. 549-588.

Mineralogia. — *Brochantite di Rosas (Sulcis)* [1]. Nota di Carlo Riva, presentata dal Socio Struever.

L'ingegnere Umberto Cappa, direttore delle miniere di Rosas nel Sulcis (Sardegna), inviò recentemente al Gabinetto mineralogico dell'Università di Pavia alcuni esemplari da lui raccolti nella detta miniera, fra i quali trovansi pregievoli cristalli di vivace colore verde smeraldo, che i saggi chimici e le proprietà cristallografiche ed ottiche dimostrarono essere *brochantite*, specie questa che, a quanto mi consta, per la prima volta si riscontra in Sardegna. Fra i minerali del gruppo dei solfati basici [2] si rinvennero sin qui in Sardegna la linarite e la caledonite. La prima, citata dallo Jervis [3], descritta dal Brugnatelli [4], e recentemente anche da me [5], è conosciuta in diverse località sarde; la seconda, descritta dal Lovisato e studiata cristallograficamente dal vom Rath [6], proviene da Malacalzetta.

I campioni con brochantite provengono dal cantiere Prete Atzori, e sono costituiti da una roccia diabasica alteratissima con abbondante limonite. La brochantite è accompagnata dalla malachite, e forma compatte croste cristalline tenacemente aderenti alla roccia; non sono rari i cristalli isolati e ben terminati, allungati secondo [c] e che raggiungono mm. 1-1,5 di lunghezza.

Considerando la brochantite trimetrica, seguendo la maggior parte degli autori [7], le forme osservate sono le seguenti:

$$\{110\}\ \{120\}\ \{010\}\ \{012\}.$$

Le facce della zona verticale sono fortemente striate parallelamente all'allungamento. La sfaldatura è netta secondo (010). I valori angolari, ottenuti dalla misura e dal calcolo, in base alle costanti date dal Kokscharow [8], sono i seguenti:

$$a:b:c = 0,7739:1:0,4871$$

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto di mineralogia della R. Università di Pavia.

(2) Dana, *The system of mineralogy*. London 1892, pag. 922.

(3) Jervis, *I tesori sotterranei d'Italia*. Torino 1881, parte III, pag. 134, n. 2580.

(4) Brugnatelli, *Sulla linarite della miniera di San Giovanni (Sardegna)*. Rendic. r. Ist. Lombardo di sc. e lett., 1897.

(5) Riva, *Sopra la formazione diabasica e sopra alcuni minerali di Rosas nel Sulcis*. Rendic. r. Ist. Lombardo di sc. e lett. Milano 1899.

(6) Lovisato, *Contributo alla mineralogia sarda*. Rend. r. Acc. Lincei, 1886.

(7) È noto che lo Schrauf considera triclina la brochantite. Sitz. d. Wiener Akad. 1873.

(8) Kokscharow, *Materialen zur Mineralogie Russland*. Bd. III, p. 260. Atlas tav. 53.

	Media misure	Calc.
(110):(1$\bar{1}$0)	75° 30′	75° 28′
(120):(110)	19 40	19 23
(120):(010)	32 18	32 52
(012):(110)	81 41	81 40

L'abito dei cristalli è simile a quello della brochantite di Russia, disegnata dal Kokscharow nella fig. 6 della tav. 53 del suo atlante. I cristalli di Rosas sono maggiormente tabulari secondo (010).

Il piano degli assi ottici è parallelo a }100{. Da (010) esce la bisettrice acuta. Il carattere della doppia rifrazione è negativo; l'estinzione è parallela, caratteri tutti che concordano con quelli dati dal Bertrand [1] pel nostro minerale. La malachite, la quale accompagna la brochantite, è in piccoli cristalli fibrosi, e l'osservazione microscopica mostra che essi sono geminati secondo }100{, e presentano caratteri identici a quelli da me recentemente descritti per la malachite della stessa località [2].

Geologia. — *Osservazioni geologiche sopra i terreni secondarî del gruppo del M. Judica in Sicilia.* Nota del prof. Olinto Marinelli, presentata dal Corrispondente De Stefani.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *L'azione dei farmaci antiperiodici sul parassita della malaria* [3]. Prima Nota preventiva dei dott. D. Lo Monaco e L. Panichi, presentata dal Socio Luciani.

Gli studî sull'etiologia della malaria, che in questi ultimi anni, sono stati con grande ardore coltivati, a causa del loro nuovo indirizzo il quale induce a ritenere che si possano trovare mezzi preventivi sicuri e razionali, hanno come conseguenza prodotto un ristagno delle ricerche sperimentali riguardanti la cura di questa diffusa malattia.

Finora si sa che la chinina agisce sul parassita della malaria, arrestandone i movimenti e facendolo scomparire dal sangue, in tutte le sue fasi di sviluppo, sia endoglobulari sia estraglobulari, eccettuata quella riproduttiva

(1) Bertrand, *Propriétés optiques de la brochantite.* Bull. Soc. franc. de Minéralogie, tome III, 1880, pag. 56.

(2) Riva, loc. cit.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia di Roma.

sulla quale è completamente inefficace (Marchiafava e Bignami). In quest'ultimo caso è stato osservato che la propinazione della chinina, pur non ostacolando la sporulazione del parassita, influisce sulla nuova generazione, che al microscopio si appalesa molto scarsa (Golgi).

Noi ci siamo proposti di osservare il comportarsi del parassita della malaria in tutte le fasi e in tutte le forme cliniche, nel primo momento in cui esso viene a contatto con la chinina. È anche nostra intenzione di estendere queste esperienze a tutti gli alcaloidi della china e a tutte le altre sostanze di azione antiperiodica, che spesso vengono somministrate in surrogazione della chinina. E a tal uopo, mentre la più parte degli sperimentatori che si sono occupati di questo argomento, hanno osservato il sangue malarico prima e dopo la somministrazione della chinina, noi invece aggiungiamo questa direttamente sul preparato microscopico. Questo metodo è stato anche adoperato da Laveran ([1]), da Dock ([2]) e da Marchiafava e Celli ([3]). I primi due, adoperando le soluzioni di chinina, e i secondi, adoperando le soluzioni di 0,50 e 0,70 °/₀ di cloruro sodico, hanno visto che i movimenti dei parassiti si arrestano.

Riassumiamo brevemente i fatti da noi osservati, servendoci del sangue di malati di febbre palustre a tipo quartanario non chinizzati:

Se si fissa sul campo del microscopio una forma giovanissima di parassita malarico, e si deposita una goccia di soluzione isotonica (0,90 °/₀ cloruro sodico) e isovischiosa (2 °/₀ gomma); appena il liquido penetra nel preparato, gli eritrociti si spostano, urtandosi e deformandosi. Meno si muove e in conseguenza meno si deforma l'eritrocito in osservazione. Il parassita contenuto in esso, compie movimenti ameboidi più vivaci, emette più pseudopodi e si assottiglia. Questa vivacità di movimenti nel parassita dura pochi secondi; dopo esso assume una forma ellittica con il pigmento disposto alla periferia. Tale apparente inerzia non è duratura, perchè poco tempo dopo, i movimenti riprendono come prima, e si possono osservare anche dopo un'ora circa. In questo ultimo periodo si nota che il pigmento è più visibile e pare aumentato. Se invece di una soluzione isotonica e isovischiosa di cloruro sodico, s'immette nel preparato di sangue malarico una goccia di soluzione acquosa di bisolfato di chinina (1:1500) che messa in rapporto colla quantità di sangue (di circa 5 kgr.) corrisponde alla dose di circa tre grammi di sale di chinina, si osserva che il parassita si contrae con movimenti di tremolio nei pseudopodi, e i granuli di pigmento in esso contenuto, si radunano nella parte centrale del corpo parassitario. In seguito, dopo circa 15 minuti, il parassita si espande, il pigmento ritorna alla periferia della massa cen-

([1]) *Du paludisme et de son hématozoaire*. Paris. 1891.
([2]) Centralblatt f. Klin. Med. 1891.
([3]) Arch. p. le scienze mediche. Vol. X, 1886.

trale, a misura che i pseudopodi si allungano; infine il parassita presenta i movimenti lenti che si osservano normalmente, i quali continuano anche dopo mezz' ora di osservazione.

Nelle forme parassitarie giovani, ma più sviluppate delle precedenti, che occupano i $^2/_5$ dell' eritrocito e contengono maggiori quantità di pigmento, la soluzione di chinina produce i seguenti fenomeni: Il parassita si contrae, ritira i pseudopodi, e tende ad assumere una forma rotonda; i granuli di pigmento, che si trovano in maggior copia alla periferia del parassita, presentano movimenti vivaci. In seguito tutti i granuli si dispongono alla periferia del parassita che presentasi di forma rotonda. Dopo brevissimo tempo i granuli di pigmento entrano in una ridda vertiginosa, e il parassita, che in questo momento si presenta più splendente, ora con un movi-

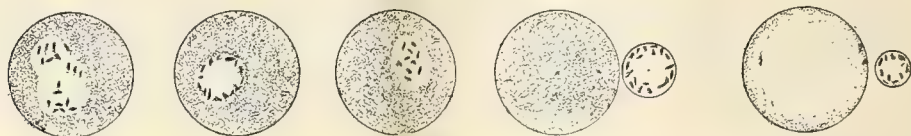



Fig. 1.

Eritrocito contenente un parassita giovane, veduto nei successivi periodi di azione della chinina.

mento di scatto, ora con movimenti oscillatori, fuoriesce — come se scivolasse — dal globulo rosso, e si sofferma a lato di esso. Giova qui notare che questo fenomeno è indipendente dalle correnti liquide del preparato, inquantochè il parassita emigra dal globulo anche quando queste sono cessate, e qualche volta anche contro la loro direzione. Se le correnti poi sono impetuose, riescono a trasportare il parassita, mentre l' eritrocito che lo conteneva, rimane in sito, quasi avesse una superficie più vischiosa. In seguito gli eritrociti che occupavano il campo del microscopio, si scolorano riducendosi a semplici ombre. Il parassita libero conserva la forma rotondeggiante, o la riprende se l' aveva perduta, mentre i granuli di pigmento continuano a muoversi poco vivacemente, rimanendo alla periferia del medesimo. Le fasi di questo fenomeno (osservato anche in parassiti di maggiore sviluppo dei precedenti come vedesi nella figura 1), si compiono in un tempo più o meno lungo che varia da pochi secondi a quindici minuti circa. Lo scoloramento dei globuli su notato, si evita quando alla soluzione di chinina si aggiungono pochissime gocce di soluzione di cloruro sodico al 0,90 °/₀. In questo caso si scolora il solo eritrocito parassitifero, mentre gli altri rimangono normali.

Se si adopera la soluzione isotonica e isovischiosa di cloruro sodico, chinizzata o no, le forme parassitarie molto sviluppate mostrano movimenti più vivaci, ma non fuoriescono mai dall' eritrocito.

Il fenomeno della fuoriuscita del parassita malarico dal globulo rosso sotto l' azione della chinina, non era stato mai osservato direttamente al

microscopio. Ricordiamo però che Marchiafava e Celli [1], occupandosi dell'azione della chinina sulla febbre malarica, notarono — senza annetterci una grande importanza —, di aver visto che nei preparati di sangue fatti dopo la somministrazione della chinina, la maggior parte dei parassiti si presentano immobili, e taluni *come in via di uscire dai globuli rossi.*

Nel periodo che precede l'accesso febbrile, i parassiti che occupano quasi l'intero eritrocito, del quale non rimane libero che un sottile orlo, a contatto di soluzioni chininiche, non emigrano dai globuli rossi, ma si limitano a contrarsi e ad espandersi ripetutamente, assumendo infine una forma rotondeggiante che li fa sembrare rimpiccoliti, come si vede nella figura 2.

I granuli di pigmento contenuti nei parassiti anche più sviluppati dei precedenti, presentano movimenti sempre più vivaci, in forza dei quali

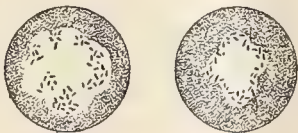



Fig. 2.

Eritrocito contenente un parassita adulto che per l'azione della chinina non emigra, ma si limita a contrarsi.

in parte si raccolgono dalla periferia verso il centro del corpo parassitario, in parte fuoriescono da questo allontanandosene più o meno nel preparato, talora persino di una distanza eguale approssimativamente a dieci volte il diametro di un eritrocito. Questo fenomeno si produce anche dopo 15 minuti di osservazione, ed è rappresentato nella fig. 3.

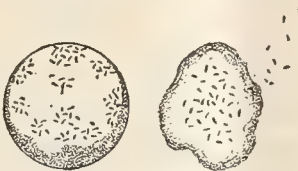



Fig. 3.

Eritrocito con parassita anche più sviluppato del precedente, che sotto l'azione della chinina si contrae ed emette granuli di pigmento.

Riguardo alle cosiddette forme libere, che sono caratterizzate dall'immobilità dei granuli di pigmento, il quale si presenta ammassato nella parte centrale del corpo parassitario, per l'azione della chinina, il parassita da rotondo si fa talora oblungato e i granuli si allontanano fra loro. Continuando l'osservazione, si nota che nella forma parassitaria in seguito a un processo

[1] Arch. p. le scienze mediche. Vol. X, pag. 193.

di divisione, ha luogo la segmentazione del parassita in un numero limitato di piccole sporule trasparenti di grandezza variabile, alcune con pigmento altre senza, come si vede nella fig. 4. La soluzione isotonica e isovischiosa di cloruro sodico, a contatto delle forme libere, non produce in esse alcuna modificazione.

FIG. 4.

Parassita maturo (resosi libero pel completo assorbimento dell'eritrocito), che durante l'azione della chinina sporifica.

Tutti i fenomeni da noi descritti sono stati riscontrati, come abbiamo detto, nel sangue di ammalati di febbre palustre a tipo quartanario; in un caso da noi più lungamente seguito, si notò che, (quantunque l'andamento dell'infezione fosse regolare), gli accessi febbrili divennero meno intensi, e ripetendo le nostre esperienze con la solita soluzione di chinina, non si riuscì a determinare l'emigrazione del parassita dal globulo rosso. All'attenuazione del processo morboso corrispondeva forse una diminuita resistenza dell'agente patogeno. Infatti, diluendo la soluzione al doppio (1:3000) e nei giorni susseguenti al triplo (1:4500), siamo riusciti a riottenere i primi risultati positivi. Ciò dimostra che la fuoriuscita del parassita dal globulo è un fenomeno attivo, vale a dire dipendente dalla vitalità del parassita stesso.

Prima di dare un'adeguata interpretazione dei fenomeni da noi descritti, ci sembra logico ammettere che l'azione della chinina sul parassita della malaria dentro il circolo sanguigno debba avvenire nell'identico modo come è stato da noi osservato *in vitro*. La vivacità e la persistenza dei movimenti di cui sono dotati questi parassiti fuori dell'organismo; il fatto che il sangue estratto da un malarico ed iniettato ad un individuo sano, riproduce l'accesso febbrile identico a quello osservato nel paziente; e l'essere noi riusciti a produrre l'emigrazione del parassita in soluzioni che non scolorano i globuli rossi; sono prove evidenti della persistente vitalità del medesimo fuori dell'organismo umano, e delle buone condizioni di esperimento in cui ci siamo posti.

Riferendoci poi alle attitudini biologiche del parassita della malaria, vogliamo qui rammentare che tutti coloro che si sono occupati di questo argomento, ammettono che l'ambiente adatto per la sua vita è rappresentato dal globulo rosso, mentrechè il plasma ed i leucociti rappresentano mezzi a lui dannosi. Ciò ammesso, ci sembra facile spiegare in che modo la chinina esplica la sua azione sul parassita malarico: *La chinina, agendo sul paras-*

sita, ne produce l'emigrazione dal globulo rosso, e in conseguenza lo mette in condizioni deleterie per la sua vita e per la sua evoluzione. Le esperienze che intendiamo continuare riguardanti l'inoculazione di sangue malarico mescolato a chinina ad individui sani, ci diranno se il parassita quando emigra nel plasma, è ancora suscettibile di ulteriore sviluppo. Sarà anche nostro compito di determinare se l'emigrazione del parassita debba interpretarsi come effetto dei movimenti attivi che provoca in esso la chinina, per chemotropismo positivo; e se nel fenomeno da noi descritto influisca l'azione che la chinina ha di diminuire la facoltà ossidante del protoplasma.

Notiamo intanto che, dalle nostre esperienze, si può ricavare la sanzione del precetto clinico di somministrare la chinina nel periodo apirettico e non durante l'accesso febbrile. Se infatti si considera che l'effetto utile della chinina contro il parassita consiste nel produrre l'emigrazione del medesimo, già in via di sviluppo, nel plasma sanguigno, ne viene di conseguenza che il rimedio si deve somministrare nel periodo in cui circolano nel sangue il maggior numero di forme giovani parassitarie. Quale effetto benefico produca la propinazione di questo alcaloide in tutte le altre fasi del ciclo evolutivo del parassita, ci resta ancora da indagare.

Sentiamo il dovere di ringraziare il prof. Bondi direttore della Sala Alessandrina dell'ospedale S. Spirito, il quale, con grande cortesia, ci ha permesso di usufruire per i nostri studî dei malati del suo reparto.

Storia della scienza. — *Intorno all'autografo galileiano del « Discorso sul flusso e reflusso del mare » nuovamente ritrovato nella Biblioteca Vaticana.* Nota di ANTONIO FAVARO, presentata dal Socio CERRUTI.

Il campo degli studiosi è stato di recente messo a rumore dall'annunzio che nella Biblioteca Vaticana era stato scoperto il desiderato autografo del discorso di Galileo Galilei « Del flusso e reflusso del mare »: e poichè furono diffuse inesatte notizie così intorno alle circostanze che accompagnarono lo scoprimento, come sulla importanza del cimelio, come infine e soprattutto circa i risultati che lo studio di esso veniva a somministrare; stimo doveroso, da parte di chi soprintende all'Edizione Nazionale delle Opere di Galileo, il prendere la parola, affinchè non siano per acquistar credito certe affermazioni, le quali da un lato sono contrarie alla verità, e dall'altro indurrebbero a far supporre che in alcuni luoghi il testo galileiano sia da tenersi essenzialmente diverso da quello che nella stessa Edizione Nazionale fu dato recentemente.

Non è difficile spiegare in che modo quel manoscritto, il quale, se anche non contenesse alcun elemento utile alla critica del testo, sarebbe pur sempre

prezioso perchè vergato dalla mano stessa dell'Autore, anzi il solo autografo di tale scrittura che si sappia pervenuto sino a noi, abbia potuto sottrarsi alle ricerche diligentissime istituite a fine di porre in evidenza tutti i materiali di cui potevano e dovevano giovarsi i nuovi editori delle Opere di Galileo. Il manoscritto faceva parte di un fondo ordinato circa vent' anni or sono; e poichè l'inventario, nel quale venne sommariamente indicato e senza far cenno che fosse autografo [1], non era accessibile agli studiosi, questi non avrebbero potuto averne conoscenza se non dopo che da quell' inventario fu tratto l'indice degli autori, compiuto nel 1894 [2] e posto a disposizione dei lettori della Vaticana in tempo non ben precisato, ma ad ogni modo posteriore a quell'anno: e appunto nel principio dell'anno 1894 noi avevamo compiuta la revisione dei principali depositi nei quali era qualche speranza di ritrovare scritti e documenti galileiani, e dato alle stampe l'indice dei matariali per tal modo raccolti [3]. Nel 95, col volume quinto dell' Edizione Nazionale, usciva il testo critico del *Discorso* in questione. Ecco dunque perchè ricerche, anche più diligenti di quelle da noi istituite, non avrebbero, prima di questi ultimi anni, sortito l'effetto di rinvenire l'autografo, che il caso ha oggi fatto tornare alla luce [4].

[1] Galileo Galilei, *Trattato del flusso e riflusso del mare composto ad istanza del Card. Flavio Orsini — in Roma agli 8 di Gennaro 1616.* (*Inventarium Codicum latinorum Bibliothecae Vaticanae.* Tomus X. Pars secunda a n. 8067 ad n. 8471, opera et studio J. B. De Rossi script. linguae latinae, adjutore Odoardo Marchetti an. 1876-1878).

[2] *Index Auctorum quorum scripta notata sunt in Tomo X, Inventarii Codd. Latt.* auspice et curante Jo. Bapt. de Rossi, scriptore Alfredo Monaci, An. 1890-94. — Questo indice porta sul dorso il n. 6 e comprende i codici dal n. 7245 al n. 8471.

[3] Per la Edizione Nazionale delle Opere di Galileo Galilei sotto gli auspicî di S. M. il Re d'Italia. — *Materiali per un indice dei Manoscritti e Documenti Galileiani non posseduti dalla Biblioteca Nazionale di Firenze,* raccolti per cura di Antonio Favaro. Venezia, tip. Ferrari, 1894.

[4] Attendendosi presentemente alla preparazione del volume IX della Edizione Nazionale, destinato a contenere le Opere letterarie di Galileo, si recava a Roma l'Assistente alla cura del testo, prof. Umberto Marchesini, per collazionare le « Considerazioni al Tasso » sul codice Barberiniano. Andato alla Vaticana per collazionarvi un sonetto di Galileo che ivi esiste in copia, egli chiese di vedere il Catalogo per autori; e nel volume esibitogli, che fu quello segnato col n.º 6 contenente lo spoglio dei codici 7245-8471 compiuto nel 1894, trovò un solo manoscritto di Galileo così registrato: « Galilei Galilaeus 8193 (p. 2ª) ». Avuto il manoscritto, riconobbe che, conforme era indicato sulla copertina costituente la car. 516, in esso da car. 517 *r* a car. 526 *t* si conteneva l'autografo del « Discorso del flusso e reflusso del mare ». Il prof. Marchesini credette suo dovere avvertire della scoperta da lui fatta l'Ab. Cozza-Luzi, Vice-Bibliotecario di S. R. C., al quale era stato presentato: questi lo richiese di rilasciargli una dichiarazione da cui risultasse che, secondo il suo parere, quel manoscritto era autografo; e alla richiesta il nostro Assistente assentì. Poche ore dopo il fatto, le gazzette di Roma annunziarono in termini non conformi alla verità, la scoperta dell'autografo vaticano, esaltandone iperbolicamente l'importanza quando non si avevano ancora elementi per farne adequato giudizio; e l'annunzio veniva per tele-

Annunziato da un cenno del P. Ab. Giuseppe Cozza-Luzi, Vice-Bibliotecario di S. R. C., nel Giornale Arcadico [1], veniva per sua cura alla luce, prima ancora che finisse l'anno 1898, il testo del *Discorso* « secondo l'autografo vaticano » [2]; e poichè dalla lettura di esso ci parvero risultare delle inconseguenze inesplicabili, stimammo subito o che la lettura fattane dall' Editore fosse in qualche luogo erronea, o che, investendo talvolta quelle inconseguenze più passi assai notevoli dove non era il caso di sospettare inesatta lettura, il manoscritto dovesse presentare delle singolari anomalie, sulle quali non era possibile il pronunziarsi prima d'averlo preso in esame. E dell'accurato esame che testè ci fu concesso di farne, riferiremo sommariamente il risultato.

Quando noi ci presentammo alla Biblioteca Vaticana, le undici carte costituenti complessivamente il manoscritto erano state tolte dalla parte 2ª del Codice Vaticano Latino 8193 nel quale era stato trovato; e ciò perchè, essendo alcune di esse notevolmente deteriorate, si stava provvedendo alla loro migliore conservazione, anzi, più precisamente, la prima (car. 516), sulla quale si legge il titolo della scrittura vergato d'altre mani, era già stata incollata sopra una cartella contenente le dieci carte (517-526) sciolte dell'autografo galileiano propriamente detto [3].

Portata anzi tutto la nostra attenzione sopra quei luoghi che nel testo edito dal P. Ab. Cozza-Luzi ci avevano maggiormente colpito per le incon-

---

gramma mandato a giornali italiani ed esteri, e riprodotto da una quantità innumerevole di riviste d'ogni colore. Qualunque possa essere il merito d'una scoperta così accidentale, i Curatori della « Edizione Nazionale promossa dal R. Ministero dell' Istruzione Pubblica sotto gli auspicî di S. M. il Re d'Italia » (e non la « Crusca » come venne erroneamente affermato e ripetuto) credono doveroso rettificare il racconto che di tale scoperta fu divulgato.

[1] *L'autografo del Galilei sul flusso e riflusso del mare nuovamente scoperto.* (Giornale Arcadico di scienze, lettere ed arti. Serie III, Anno I, n. 12. Roma, scuola tipografica Salesiana, 1898, pag. 445-450).

[2] Galileo Galilei, *Trattato del flusso e reflusso del mare secondo l'autografo vaticano,* edito da Giuseppe Cozza-Luzi, Vice-Bibliotecario di S. R. Chiesa. (Estratto dalle Memorie della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei, vol. XV). Roma, tipografia della Pace di Filippo Cugiani, 1898. — Al testo del *Discorso* è premesso un « Proemio, nel quale si legge (pag. 13, nota 2), avere io scritto al P. Lais che, all' infuori d'un sonetto, null'altro di Galileo si conteneva nella Biblioteca Vaticana. Ciò non è vero, nè potevo scriverlo io, che nei nn. 929-938 dai miei *Materiali per un indice dei Manoscritti e Documenti Galileiani non posseduti dalla Biblioteca Nazionale di Firenze* (Venezia, tip. Ferrari, 1894, pag. 65-72) avevo descritte tutte le cose galileiane della Vaticana rivelatemi dagli indici dei quali mi era stato concesso l'esame; pare bensì non n' avesse notizia il Vice-Bibliotecario di S. R. C.

[3] È mio dovere esprimere sensi di gratitudine al M. R. P. Ehrle, il quale, non ostante questa circostanza, permise ugualmente che io potessi a tutto mio agio studiare il manoscritto.

seguenze sopraccennate, ci avvedemmo di leggieri essere sfuggito al novello Editore che QUEI PASSI NON SONO DELLA MANO DI GALILEO, ma sostituiti posteriormente agli autografi nel modo che con la maggior possibile chiarezza procureremo di spiegare.

Le dieci carte costituenti l'autografo sono scritte per intero (salvo l'ultima che contiene otto sole righe) sui *recto* e sui *tergo;* ma a sinistra dei *recto* presentano un margine bianco piuttosto ampio, mentre invece sui *tergo* lo scritto occupa quasi interamente lo spazio. Ora l' inchiostro adoperato e che corrose la carta in varii luoghi, deve aver prodotto assai più profondamente tale effetto in un luogo di ciascuna delle tre prime carte, perchè un ignoto (forse lo stesso che premise, come abbiamo veduto, il titolo al *Discorso*) reputò opportuno di rimediare applicando in ciascuno di tali luoghi una toppa, la quale mentre nel *recto*, a motivo dell'ampio margine bianco, viene ad investire soltanto le prime lettere delle parole a capo di linea, di otto righe nella car. 517, di sette nella car. 518 e di nove nella car. 519, nel *tergo* invece investe intere parole delle righe corrispondenti. Si può ancora credere che allorchè tale operazione fu eseguita, le poche lettere corrose del testo fossero ancora abbastanza leggibili nei *recto*, perchè l'operatore le registrò sulla parte inferiore del margine stesso, cancellandole poi così profondamente da bucare la carta, dopo averle aggiunte sulla toppa di sua mano, senza nemmeno curarsi di imitare quella di Galileo. Per il motivo anzidetto il testo galileiano dei *recto* fu conservato inalterato nel manoscritto, meno qualche leggiera variazione. Ma così non avvenne per le più lunghe diciture corrose nei *tergo* delle carte medesime; per le quali è da credere che, dove mancavano anche semplici traccie della scrittura galileiana, colui abbia tirato a indovinare, non curandosi neppure di cercare una copia del *Discorso* per poter così supplire la lezione sincera. E qualche volta indovinò; sia aiutato dalle traccie rimaste e delle quali, per la mancanza del margine, avrà tenuto conto separatamente, sia favorito dalla sua buona stella.

Così è risultato che i tre luoghi anzidetti, i quali diamo qui sotto nella colonna a sinistra secondo la vera lezione fermata nella Edizione Nazionale, vennero cambiati negli altri che si leggono a destra. Scriviamo in corsivo nelle due colonne le parole, o le parti di parola, alle quali si riferiscono le toppe del Codice Vaticano.

« Ora, mentre andiamo discorrendo ap- « pog*giati sopra* sensate esperienze (scorte « sicure nel vero filosofare), vediamo *potersi* « *imprimer* nell' acque alcun movimento « locale in varie maniere: le quali *an-* « *dremo distintamente* essaminando, per « vedere se alcuna di esse può ragionevol- « mente asse*gnarsi per cagion pri*maria del	... « Ora, mentre andiamo discorrendo ap- « pog*giati sopra* sensate esperienze (scorte « sicure nel vero filosofare) vegghiamo *prima* « *le cause che fanno* nell'acque alcun movi- « mento locale in varie maniere: le quali *an-* « *diamo ad una ad una* esaminando, per « vedere se alcuna di esse può ragionevol- « mente asse*gnarsi per cagione pri*maria del

« flusso e reflusso del mare. Ho detto cagion « primaria, *perchè mentre* andremo essami- « nando le tante differenze di accidenti che « intorno *ai flussi e reflussi* dei mari diversi « si scorgono, intenderemo impossibil cosa « essere *che molte* altre cause secondarie « e, come dicono, concomitanti non concor- « rino con la primaria *al* produr tali va- « rietà » [1].

« Come, per dichiarazione, se noi pren- « dessimo un gran vaso *pieno d' acqua,* « qual saria, per esempio, una gran barca, si- « mile a quelle con le quali *vediamo traspor-* « *tarsi* di luogo a luogo per l'acque salse « altre acque di fiumi o di f*onti vedremmo* « *prima* nel tempo che il vaso contenente, « cioè essa barca, stesse ferma, sta*r pari-* « *mente quieta l'*acqua contenutavi dentro; « ma quanto prima si cominciasse a muover « *la barca non* pian piano, ma con notabil « velocità, l'acqua contenuta sì nel vaso, « *ma non come le* altre parti solide di esso « vaso, saldamente a quello collegate, anzi « per la sua *flussibilità* in certo modo « disgiunta... » [3].

« Dal che doviamo primieramente con di- « ligenza avvertire che se bene *l'uno e l'altro* « di questi due movimenti, dico dell'annuo « del centro della Terra per *l'orbe magno* « AFG e del diurno della circonferenza « BCDL in sè stessa intorno al *proprio centro* « *A*, sono ciascheduno per sè stesso ed in sè « stesso equabili ed uniformi, n*ientedimeno* « *dal com*posto ed aggregato di essi ne ri- « sulta alle parti della superficie *terrena un* « *movimen*to molto diseguale, sì che cia- « scheduna di esse parti in diversi tempi « *del giorno si muo*ve con diverse velo- « cità... » [4].

« flusso e reflusso del mare. Ho detto cagion « primaria, *perchè se noi* andremo esami- « nando le tante differenze di accidenti che « intorno *a i flussi e reflussi* di diversi mari « si scorgono, intenderemo impossibil cosa « essere *che le* altre cause secondarie « e, come dicono, concomitanti non concor- « rino con la primaria *in* produr tali va- « rietà ».

« Come, per dichiarazione, se noi pren- « dessimo un gran vaso *pieno d' acqua* « qual sarìa, per esempio, una barca [2] si- « mile a quelle con le quali *sogliono portar-* « *si* di luogo a luogo per l'acque salse « altre acque di fiumi e di f*ontane non è* « *dubbio che* nel tempo che il vaso contenente, « cioè essa barca, stesse ferma, sta *ria* « *ferma ancor l'*acqua contenutavi dentro; « ma quanto prima si cominciasse a muover « *il vaso daria in dietro non* pian piano, « ma con notabil velocità l'acqua contenuta « sì nel vaso, *come anco nelle* altre parti « solide di esso vaso, saldamente a quelle « collegate, anzi per la sua *furia saria* « in certo modo disgiunta... ».

« Dal che doviamo primieramente con di- « ligenza avvertire che se bene *l'uno e l'altro* « di questi due movimenti, dico l'annuo del « centro della Terra per *la circonferenza* « AFG e' l diurno della circonferenza « BCDL in sè stessa intorno al *punto* « *A*, sono ciascuno per sè stesso ed in sè « stesso equabili ed uniformi n*ondimeno* « *per l'op*posto et aggregato di essi ne ri- « sulta alle parti della superficie *un moto* « *assolu*to molto diseguale, sì che cia- « scheduna di esse parti in diversi tempi « *si muo*ve con diverse velocità... ».

Ora, il confronto della lezione vaticana con le lezioni degli altri Codici, cioè delle copie le quali si asseriscono « quanto più dal genuino esemplare

(1) Vol. V, pag. 378, lin. 14-23.

(2) Il P. Ab. Cozza-Luzi legge qui « una gran barca », ma veramente il « gran » manca nell'autografo.

(3) Vol. V, pag. 380, lin. 8-17.

(4) Vol. V, pag. 382, lin. 7-18.

difformi tanto più... riprovevoli, od almeno di ben poco valore » (1) avrebbe dovuto richiamare l'attenzione dell'Editore sopra i luoghi troppo evidentemente corrotti, che egli accettò come genuini galileiani. Aggiungeremo altresì che, prescindendo da parecchie inesattezze, le quali non intaccano la sostanza del testo, ma in una riproduzione fedele avrebber dovuto evitarsi, la scrittura di Galileo in alcuni luoghi non fu esattamente letta, cosicchè in essi il testo, che nella vera lezione è chiarissimo, riesce di interpretazione dubbia ed oscura (2).

Venendo ora a stabilire brevemente i caratteri che l'autografo presenta e le relazioni in cui il testo da esso offerto si trova con quello degli altri manoscritti, diremo innanzi tutto che, a nostro avviso, l'autografo vaticano è una seconda copia nella quale Galileo veniva esemplando da un primo originale: copia però non interamente scevra da certe piccole mende, che l'Autore, rileggendo con attenzione, avrebbe potuto rimuovere. Correzioni, nelle quali alla parola primitivamente concepita segue nella linea stessa quella sostituita, dimostrano che egli nell'atto di copiare andava migliorando: ripetizioni delle stesse parole, talvolta corrette e tal altra no, mostrano che la lettura dello scritto, dopo averlo compiuto, non fu molto accurata. Caratteristica poi in sommo grado ci sembra la particolarità d'una lacuna riempiuta posteriormente dalla mano stessa di Galileo, ma con carattere assai più minuto, perchè alla inserzione di tutte le parole nel carattere ordinario non bastava lo spazio lasciato; la quale inserzione, così completa, non si trova in alcuno degli altri manoscritti fino a noi pervenuti (3).

Che poi si tratti d'una seconda copia esemplata da altra precedente, ci sembra provarlo soprattutto la mancanza di quei molti pentimenti e cor-

(1) Galileo Galilei, *Trattato del flusso e reflusso del mare secondo l'autografo vaticano* edito da Giuseppe Cozza-Luzi, ecc. pag. 10.

(2) Op. cit., pag. 22, lin. 9: « Elittica » per « Eclittica ». Pag. 24, lin. 3-4: « si muovono acquistando verso la sinistra contraposta D »: qui l'Editore non s'avvide che, per quanto corroso, dopo la parola « sinistra » segue leggibilissimo: « le parti », e, non essendosene accorto, per accordare con « sinistra » fece un « contraposta » del « contrapposte » chiarissimo. A pag. 26, lin. 32 legge: « haveva » invece di « haverà ». A pag. 28, lin. 26: « unicamente » invece di « unitamente ». A pag. 37, lin. 21: « parendo », in luogo di « ponendo ». In questi varî luoghi la inesatta lettura turba grandemente il senso.

(3) Nella Edizione Nazionale, vol. V, pag. 390, lin. 29-30, ed identicamente in tutte le copie del *Discorso* a noi note, si legge: « *mentre le acque dei due gran mari* Indico ed Etiopico *che la mettono in mezo devono scorrendo ristrignersi in minor canale tra essa e la costa etiopica.* Ora, nell'autografo, tra *mari* e *che*, scritti, del pari che le parole precedenti e susseguenti, in carattere ordinario, leggesi scritto di carattere assai più minuto: « Indico da oriēte et Etiop.co da Occ.te »: ancora in luogo di *etiopica* si legge « d'Etiopia », presentando anche queste parole gli stessi caratteri di quelle aggiunte posteriormente.

rezioni che d'ordinario s'incontrano nei primi abbozzi galileiani; ed ancora, come si usa chiamarlo nel linguaggio tipografico, un « pesce » il quale altrimenti che col fatto d'una trascrizione mal si potrebbe spiegare ([1]).

Così stando le cose, non pare improbabile che questo autografo sia l'esemplare stesso consegnato da Galileo al Cardinale Alessandro Orsini, a cui il *Discorso* è indirizzato. Aveva il Cardinale mostrato « una singolare inclinazione e disposizione » ([2]) a proteggere e favorire Galileo quando sullo scorcio del 1615 andò a Roma per difender meglio colà la dottrina copernicana, minacciata di condanna da parte del Santo Uffizio; e, come si legge nelle prime linee del *Discorso* medesimo, aveva ricercato Galileo di porgergli disteso in carta quello che a voce gli aveva esposto circa l'esplicazione da lui data degli accidenti del flusso e riflusso del mare. A tenere per maggiormente probabile tale ipotesi sembra concorrere il fatto della firma così specificata quale si legge alla fine del *Discorso*, e che così intera è data da uno soltanto degli altri manoscritti a noi noti.

Presso Galileo sarà dunque rimasto il primo originale, donde la copia consegnata al Card. Orsini era stata esemplata; e da quel primo originale avrà poi fatto trascrivere l'Autore, non senza correggere e migliorare qua e là, altri esemplari, per diffonderli tra gli amici e i conoscenti: i quali esemplari o i derivati da essi, sono i manoscritti fino a noi pervenuti.

Su questi abbiamo noi dovuto stabilire il testo del Discorso sul flusso e reflusso del mare nell'Edizione Nazionale: e dobbiamo confessare che, sebbene approfittassimo di ben tredici manoscritti da biblioteche italiane ed estere, pure, ove avessimo avuto cognizione dell'autografo, la nostra lezione se ne sarebbe in qualche passo avvantaggiata. Ma mentre ciò riconosciamo di buon grado, possiamo anche soggiungere che, nonostante la scoperta dell'autografo, la lezione del testo rimane, in complesso e nella sua sostanza, quella che noi abbiamo criticamente fissata; nè forse dell'autografo ci saremmo giovati altramente, che facessimo in altro caso assai analogo ([3]).

([1]) Nella Edizione Nazionale, vol. V, pag. 381, lin. 33-35, ed identicamente in tutte le copie del *Discorso* a noi note, si legge: « il globo terrestre sia BCDL, intorno al centro A; il moto annuo intendasi esser fatto dal globo terrestre dal punto A verso la parte F »: invece l'autografo salta, con « pesce » evidente, dal primo al secondo A e reca: « il globo terrestre sia BCDL intorno al centro A verso la parte F ».

([2]) Lettera di Galileo a Curzio Picchena, in data di Roma, 6 febbraio 1616 nei Mss. Galileiani presso la Biblioteca Nazionale di Firenze, par. I. t. IV, car. 63.

([3]) Vedasi nel volume VI, pag. 616, dove, a proposito della scrittura sopra il fiume Bisenzio, discutendo delle relazioni tra le copie e la minuta autografa, eravamo condotti alle seguenti conchiusioni: « Queste copie, confrontate con l'autografo, presentano non solo di quelle leggiere differenze fonetiche, grafiche, morfologiche, che è impossibile non incontrare tra manoscritto e manoscritto, ma anche diversità più gravi, concernenti ora la forma ora la sostanza, che dobbiamo considerare come correzioni o modificazioni ed aggiunte introdotte dall'Autore stesso e delle quali l'abbozzo non serba traccia. A noi

Del resto, quanto qui affermiamo avremo occasione di svolgere e dimostrare in un Supplemento che intendiamo aggiungere agli otto volumi, coi quali l'Edizione Nazionale ha ormai compiuta la serie delle Opere scientifiche di Galileo. In quel Supplemento, come renderemo conto di Codici d'altre scritture galileiane, la notizia dei quali ci pervenne durante la stampa dei volumi, così anche di questo vaticano. Ma fin d'ora è a noi cagione di compiacenza, che le nostre continuate ricerche ci abbiano condotto alla scoperta anche di un tale autografo; e ciò non soltanto per il fatto in sè medesimo, ma altresì per la conferma insperata, e d'un'autorità così incontrastabile, che da esso è venuta alla bontà del nostro lavoro.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Luigi Bianchi dà lettura delle seguenti

Notizie sull' opera matematica di Sophus Lie.

La morte di Sophus Lie, avvenuta in Christiania, il 18 febbraio scorso, segna un grave lutto per la scienza e per la nostra Accademia, alla quale egli apparteneva, quale Socio straniero, fino dal 1892.

Nacque S. Lie a Nordfjordeid, in Norvegia, il 17 dicembre 1842, da Johann-Herman Lie pastore. Le straordinarie sue attitudini alle matematiche si rivelarono in lui relativamente tardi; e ancora nel 1865, al termine dei suoi studî Universitarî in Christiania, lo troviamo esitante fra la filologia e le matematiche [1].

Collo studio della moderna geometria, specialmente nelle opere di Poncelet e di Plücker e delle applicazioni dell'analisi alla geometria, nel trattato di Monge, si svilupparono nella mente di S. Lie quei germi fortunati, che la natura vi aveva posto; i quali, quanto più tardi, con tanto maggior vigore portarono i loro magnifici frutti.

Dal 1869, data a cui risalgono le sue prime pubblicazioni, fino alla sua morte egli percorse la splendida carriera scientifica da vero sovrano. La rara penetrazione di un grande ingegno matematico, aiutato da una straordinaria potenza d'immaginazione geometrica; il felice intuito, concesso ai

---

parve pertanto che dovessimo, ripubblicando la lettera sopra il Bisenzio, attenerci, bensì, alla sicura scorta della bozza autografa per tutto quel che risguarda quelle minori varietà, ma accettare, ad un tempo, dalle copie, quanto apparisce frutto di posteriori correzioni attribuibili a Galileo ».

[1] Tolgo queste notizie dal cenno apparso nei Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (27 février) per opera di G. Darboux.

sommi, di presentire e chiaramente vedere le più nascoste verità, assai prima che la luce di un rigoroso ragionamento scopra e rischiari la sicura via che ad esse conduce, si rivelarono all'ammirazione del mondo matematico in una serie incessante di produzioni scientifiche del più alto valore.

Mal si potrebbe in poche pagine, e per me specialmente, parlare di tutti i titoli di gloria, che fanno chiaro il nome di S. Lie. Basti accennare rapidamente ai principali.

Una delle sue più geniali scoperte è quella della teoria generale delle *trasformazioni di contatto*. Per dire di quello che fu, per Lie, il punto di partenza nell'ordinaria geometria, egli considerò quale *elemento* di una superficie l'insieme di ogni suo punto e del relativo piano tangente, o insomma riguardò una superficie come costituita da una doppia infinità di faccette piane, succedentisi con legge di continuità. Sotto questo aspetto anche gli ∞^1 punti di una curva, associati ciascuno ai piani del fascio che ha per asse la tangente, formano una doppia infinità di elementi, da considerarsi sempre insieme a quelli costituenti una superficie. Nelle ordinarie corrispondenze di punto a punto nello spazio, le ∞^2 faccette piane di una superficie si cangiano negli elementi analoghi della superficie trasformata. Ma altre trasformazioni, di diversa natura, godono della medesima proprietà; e così p. e. la corrispondenza di polarità rispetto ad una quadrica (in particolare la trasformazione di Legendre), e così pure la trasformazione *parallela*, nella quale ogni faccetta viene spostata lungo la normale, parallelamente a sè stessa, di un tratto costante. Lie considerò in generale tutte le trasformazioni degli ∞^5 elementi dello spazio (faccette), che trasformano gli ∞^2 elementi di una qualunque superficie in altrettali elementi e queste chiamò trasformazioni di contatto, appunto perchè esse conservano il contatto, fra le superficie. Generalizzò poi la ricerca ad un numero qualunque di variabili, collegandone lo studio al celebre problema di Pfaff e dimostrò tutta l'importanza dei nuovi concetti, rischiarando di nuova luce la teoria dell'integrazione delle equazioni differenziali; in particolare ridusse a singolare perfezione la teoria delle equazioni a derivate parziali del primo ordine.

Nè possiamo passare sotto silenzio una particolare trasformazione di contatto, che fu una delle prime e più ammirate scoperte di Lie. Tutti conoscevano le proprietà fondamentali delle linee di curvatura e delle linee assintotiche di una superficie; ma nessuno aveva sospettato che le proprietà dell'una specie potessero dedursi da quelle dell'altra per mezzo di una trasformazione geometrica. La trasformazione (immaginaria) scoperta da Lie, che cangia le rette dello spazio nelle sfere (propriamente gli ∞^2 elementi piani per una retta negli ∞^2 elementi piani di una sfera), conduce appunto all'accennato risultato, mutando le rette osculatrici in un punto ad una superficie nelle sfere osculatrici della superficie trasformata. Così p. e. le proprietà di una

quadrica doppiamente rigata si trasformano in quelle di una ciclide di Dupin coi due sistemi di linee di curvatura circolari.

Senza attenermi strettamente all' ordine storico, dirò ora delle importanti ricerche di Lie nel campo della geometria differenziale, ricerche che riguardano più particolarmente le superficie d' area minima e le superficie a curvatura costante. La teoria delle superficie minime, per opera specialmente di Bonnet, Weierstrass e Schwarz, sembrava aver trovato il suo assetto definitivo e le antiche formole, complicate d' immaginarî, colle quali Monge aveva dato l' integrale generale della corrispondente equazione a derivate parziali, sembravano quasi dimenticate. Lie ritorna (1876) a queste formole e dimostra come in esse sia contenuta una generazione geometrica ben semplice di queste superficie, come superficie di *traslazione;* le curve generatrici sono curve *minime,* cioè tali che le loro tangenti si appoggiano al circolo immaginario all' infinito. Coll' aiuto di questa generazione geometrica egli studia specialmente le superficie minime *algebriche* e riesce a risolvere il problema di determinare tutte quelle, il cui ordine e la cui classe sono numeri assegnati, e l' altro di trovare tutte le superficie minime inscritte in una data sviluppabile algebrica, supposto che una di esse sia nota.

Nelle sue ricerche sulle superficie a curvatura costante si incontra dapprima in proprietà fondamentali già note per le ricerche di Enneper, Dini e Hazzidakis; dimostra poi come sopra una superficie nota, a curvatura costante, l' integrazione della equazione differenziale delle linee assintotiche e delle linee di curvatura possa eseguirsi con sole quadrature e quest' ultima proprietà estende a tutte le superficie (W), i cui raggi principali di curvatura sono funzioni l' uno dell' altro. Indi si volge (1880) al metodo di *trasformazione* delle superficie pseudosferiche, allora di recente stabilito. Secondo questo metodo, da una superficie pseudosferica nota se ne deducevano ∞^1 nuove conducendo le tangenti ad una serie di geodetiche parallele ed ogni volta cercando la seconda falda della superficie focale per la congruenza di raggi così ottenuta. La ripetuta applicazione del metodo, esigendo la conoscenza delle linee geodetiche della superficie trasformata, sembrava richiedere ogni volta l' integrazione di un' equazione differenziale. Lie dimostra che tutte queste successive integrazioni si riducono a semplici quadrature, ottenendo così una notevolissima semplificazione dei metodi di trasformazione. A lui pure è dovuta l' importante osservazione che la detta trasformazione conserva le linee di curvatura, le linee assintotiche e, in queste ultime, le lunghezze degli archi. Ispirandosi poi ai concetti, che erano a lui famigliari nella teoria delle trasformazioni di contatto, egli pone i risultati del metodo sotto nuova luce, considerandolo come una trasformazione infinitiforme della equazione a derivate parziali che, in coordinate cartesiane, esprime la curvatura essere costante. Queste considerazioni, affatto nuove nella teoria delle equazioni a derivati parziali, furono poi utilizzate, come è noto, da Bäcklund per arri-

vare alla più generale trasformazione delle superficie pseudosferiche che porta il suo nome.

Ma veniamo ormai all' opera colossale del Lie, alla sua teoria dei *gruppi continui di trasformazioni*. La genesi geometrica delle idee fondamentali ci viene descritta dall' inventore stesso nella prefazione al trattato, redatto in collaborazione con Engel (¹), e nelle belle pagine che egli ha dedicato alla memoria di Galois (²). Lo studio delle ricerche di Abel e di Galois avevano mostrato al Lie tutta l' importanza della teoria dei gruppi finiti di operazioni (sostituzioni). Esempî, a lui famigliari, tolti dalla geometria projettiva, dalla geometria delle inversioni per raggi vettori reciproci, dall' algebra delle sostituzioni lineari e dalla teoria delle funzioni, gli facevano presentire come il concetto di gruppo, esteso al caso di un numero infinito di operazioni, sia che queste formino un insieme discreto ovvero un insieme continuo, doveva acquistare in tutte le matematiche un' importanza dappertutto fondamentale.

Lasciando da parte la teoria dei gruppi infiniti ma discontinui (il cui sviluppo, dovuto specialmente ai lavori di Klein e Poincaré, hà avuto il successo che tutti conoscono), egli volse la sua attenzione particolarmente ai gruppi *continui*, a quelli cioè le cui trasformazioni contengono, nella loro espressione analitica, parametri arbitrarî, suscettibili di acquistare una continuità di valori. E concepì l' ardito pensiero di costruire una teoria affatto generale di questi gruppi, pensando che essa dovesse avere in particolare, nelle teorie analitiche della integrazione, efficacia ed importanza del tutto analoghe a quelle della teoria dei gruppi di sostituzioni per le equazioni algebriche. Nel citato elogio di Galois, Lie considera come certo che Galois stesso abbia avuto intenzione di ricercare non soltanto i gruppi di sostituzioni ma anche, da un punto di vista generale, i gruppi di trasformazioni e debba aver pensato a studiarne le applicazioni all' analisi. Questo pure concesso, quale penetrazione non occorreva e quanto indefesso lavoro di una mente, dotata da natura delle più felici risorse, per trionfare di tante difficoltà, per costruire, dietro sì vaghi indizî, una teoria così vasta e di tanta importanza che difficilmente si potrebbe credere opera di un solo?

Le ricerche di Lie si volsero dapprima ai gruppi continui di trasformazioni da lui detti *finiti*, che dipendono cioè da un numero finito r di parametri. Il problema funzionale, dal quale la ricerca dipende, trasformò egli in un sistema di equazioni a differenziali totali, illimitatamente integrabile, a cui soddisfano le funzioni incognite che definiscono la trasformazione, considerate come dipendenti dai parametri. Studiò anche i gruppi *infiniti*, dipendenti da un numero infinito di parametri (o da funzioni arbitrarie), pei quali esiste un analogo sistema di equazioni differenziali definenti il gruppo.

(¹) *Theorie der Transformationsgruppen.* Leipzig-Teubner, 1888-93 (3 volumi).
(²) *Le Centenaire de l'École Normale.* Paris-Hachette, 1895.

La nozione fondamentale di *trasformazione infinitesimale* e l'introduzione di un conveniente simbolo per rappresentarla sono i semplici mezzi coi quali Lie costruisce tutta la teoria. Per bene intendere queste idee fondamentali è utile ricorrere al caso di un gruppo ad un solo parametro, ove questi elementi si presentano, per così dire, spontaneamente. Applicando ai punti dello spazio (a n dimensioni) la trasformazione continua del gruppo, ciascuno di essi percorre una trajettoria determinata. La trasformazione infinitesima del gruppo è quella che fa passare ogni punto dalla sua posizione attuale alla infinitamente vicina e il simbolo Xf, che Lie introduce per rappresentarla, non è altro, in sostanza, che la derivata di una funzione arbitraria delle coordinate presa nel senso della tangente alla trajettoria che il punto descrive. Questa trasformazione infinitesima Xf, generatrice del gruppo, è determinata solo a meno di un fattore costante.

Inversamente una tale trasformazione Xf, presa ad arbitrio (con coefficienti funzioni qualunque delle coordinate) individua un gruppo ad un parametro da essa generato. Pei gruppi a r parametri (essenziali) il passaggio da una trasformazione finita ad una qualunque infinitamente vicina si compie per mezzo di una trasformazione infinitesima Xf che risulta sempre da una combinazione lineare omogenea, a coefficienti costanti, di r trasformazioni infinitesime fondamentali

$$X_1 f, X_2 f, \dots X_2 f,$$

fra di loro linearmente indipendenti.

Queste sono le trasformazioni *generatrici* del gruppo, il quale consta di tutte le trasformazioni finite di gruppi ad un parametro generati da tutte le dette trasformazioni Xf, combinazioni lineari delle fondamentali. Le r trasformazioni infinitesime generatrici non possono essere prese ad arbitrio ma, per generare un gruppo, debbono soddisfare alla condizione che le espressioni alternate con esse formate $(X_i f, X_k f)$ siano combinazioni lineari omogenee, *a coefficienti costanti* C_{iks}, delle fondamentali.

I valori di queste costanti C_{iks} sono della massima importanza per lo studio del gruppo; esse ne determinano la struttura o *composizione*.

Su questi semplici fondamenti Lie ha edificato tutta la teoria dei gruppi continui finiti, teoria che mentre impone per la grande vastità del soggetto offre quell'armonia di parti e quella semplicità di metodi e di risultati, che sono caratteristiche delle invenzioni scientifiche veramente importanti. Ben giustamente dice il Lie che le leggi, da cui i gruppi continui di trasformazioni sono governati, sembrano sotto un certo aspetto più semplici e più intuitive di quelle che reggono la teoria dei gruppi di sostituzioni. La ragione sta visibilmente in ciò che la continuità delle trasformazioni e la nozione di trasformazione infinitesima permettono di applicare allo studio dei gruppi continui i mezzi potenti del calcolo infinitesimale e dell'analisi. Molti concetti

e proprietà dei gruppi di sostituzioni si trasportano del resto, colle dovute mutazioni, nella nuova teoria e così i concetti di transitività ed intransitività, di primitività ed imprimitività, di sottogruppi invarianti e quelli, da cui tutta la teoria è dominata, di composizione e di isomorfismo dei gruppi. Ad investigare la struttura dei gruppi continui servono precipuamente il *gruppo aggiunto* ed i *gruppi parametrici*. Il primo, che può sempre porsi sotto la forma di un gruppo di sostituzioni lineari ed omogenee, ci dà colle sue trasformazioni il modo come le operazioni del gruppo dato si permutano fra loro, quando siano tutte trasformate con una medesima trasformazione del gruppo stesso; il gruppo aggiunto sta col gruppo dato in relazione d'isomorfismo, che può essere del resto oloedrico o meriedrico. I gruppi parametrici danno invece nelle loro trasformazioni la legge secondo cui si compongono direttamente fra loro le operazioni del gruppo; essi sono sempre oloedricamente isomorfi col gruppo dato.

La considerazione del gruppo aggiunto è essenziale in tutte le questioni che riguardano la ricerca dei varî tipi di sottogruppi del gruppo dato; quella dei gruppi parametrici nelle questioni che concernano l'isomorfismo e la composizione dei gruppi.

Un'altra importantissima nozione è quella degl'*invarianti* finiti o differenziali dei gruppi continui. Questo concetto, apparso già, in forma isolata, in molte teorie geometriche ed analitiche, acquista nella teoria di Lie un significato del tutto generale ed una compiuta determinatezza. Lie insegna infatti come per tutti i gruppi continui di trasformazioni, finiti od infiniti, ma governati da un sistema di equazioni differenziali fondamentali, si possono determinare gli invarianti differenziali mediante integrazione di sistemi completi.

Il Lie determinò inoltre tutti i possibili tipi di gruppi finiti continui sopra una, due o tre variabili o, se si vuole, sulla retta, nel piano o nello spazio (in quest'ultimo caso soltanto, in modo completo, pei gruppi primitivi). Similmente determinò tutti i gruppi irriducibili di trasformazioni di contatto sul piano e classi generali di questi gruppi nello spazio a più dimensioni. Nè possiamo tacere del singolare risultato ottenuto da Lie, coi mezzi più semplici, riguardo ai gruppi continui sopra una variabile. Egli dimostra che un tale gruppo contiene al massimo 3 parametri ed è in ogni caso simile (riducibile) al gruppo proiettivo o ad un suo sottogruppo. Importantissime sono anche le ricerche che il Lie ci ha lasciato sulla teoria generale della composizione di gruppi e in particolare la classificazione completa dei possibili tipi di composizione dei gruppi a 3 e 4 parametri, dei gruppi non integrabili a 5 e 6 parametri ecc.

Le applicazioni che il Lie stesso ci ha dato delle sue teorie generali sono molte ed importanti. Per parlare prima delle analitiche, conviene dire delle ricerche sui metodi di integrazione delle equazioni differenziali. I metodi noti, che apparivano prima come isolati e la cui riuscita sembrava come

dovuta a particolari artifizî, Lie coordinò in logica dipendenza fra loro, dimostrando come il successo di quei metodi era dovuto ogni volta alla esistenza di gruppi continui di trasformazioni le quali applicate all' equazione differenziale, la lasciavano invariata. A questo genere di ricerche appartiene pure la bella Memoria del Lie sulla integrazione della equazione differenziale delle linee geodetiche per una superficie di dato elemento lineare, ove egli dà la completa classificazione in tipi degli elementi lineari pei quali il sistema delle linee geodetiche ammette un gruppo continuo di trasformazioni.

Fra le applicazioni geometriche della teoria dei gruppi spicca per la sua importanza, la ricerca sui fondamenti della geometria.

In queste Memorie che valsero all' autore il conferimento del primo premio Lobacevskji, il Lie risolve il problema da lui detto di Riemann-Helmholtz, che consiste nell' assegnare le proprietà caratteristiche dei gruppi di movimenti dello spazio euclideo o noneuclideo (a curvatura costante), che servono a distinguerli da tutti gli altri possibili gruppi di trasformazione degli spazî.

Rettificando gli assiomi ed i ragionamenti di Helmholtz, che in più punti mancavano di esattezza matematica, egli ha dato due diverse soluzioni di questo problema. La prima, fondata sull' ipotesi della completa libertà di movimenti infinitesimali, vale per un numero qualunque di dimensioni; l' altra che si appoggia al contrario, in modo più elementare, sopra ipotesi solo relative al modo di comportarsi al finito, risolve completamente il problema nel caso, più importante, dello spazio a tre dimensioni.

Non entra nel disegno delle presenti notizie di trattare delle applicazioni che, in tempi relativamente recenti, altri matematici hanno fatto delle teorie di Lie, per quanto ve ne siano delle importantissime. Il grande valore delle teorie generali di Lie venne per tal modo sempre più chiaramente riconosciuto e grandemente si accrebbe l' interesse dei matematici per un campo di ricerche nel quale Lie, per lunghi anni, da solo lavorò.

Certamente più fortunato del suo grande compatriota Abel, S. Lie ebbe la ventura di poter con lungo studio perfezionare le sue teorie predilette e la soddisfazione di vedere come in tutto il mondo matematico venisse sempre più riconosciuta l' alta importanza dei suoi lavori. L' aiuto di valorosi collaboratori, i prof. Engel e Scheffers, gli diede agio di diffondere in trattati le nuove dottrine.

La sua attività didattica si svolse dal 1877 al 1886 nell' Università di Christiania, poi a Lipsia dove successe a Felix Klein. Soltanto da sei mesi egli era ritornato a Christiania, dove il governo del suo paese gli aveva riservato un trattamento speciale. Quivi meditava nuove ricerche e preparava gli elementi per la grande opera, a cui più volte egli accennò, che doveva svolgere la teoria generale dei gruppi continui, finiti od infiniti, degli invarianti differenziali e le applicazioni alle teorie di integrazione.

Ma colpito, forse per eccesso di lavoro mentale, da malattia cerebrale, egli cessava improvvisamente, nell' età di 56 anni, di pensare e di vivere.

Il Presidente Beltrami da il doloroso annunzio della morte del Socio straniero Gustavo Enrico Wiedemann, mancato ai vivi il 23 marzo 1899; apparteneva il defunto all'Accademia, sino dal 6 agosto 1891.

Il Segretario Blaserna commemora il Socio Wiedemann colle seguenti parole:

« Gustavo Wiedemann nacque a Berlino il 2 ottobre 1826. Nel 1844 egli entrava in quel laboratorio di Magnus, che modesto di apparenza doveva esercitare un' enorme influenza sulla scienza in Germania. Basta rammentare che Magnus teneva riunioni scientifiche in casa propria, ove intervenivano Helmholtz, Brücke, Du Bois-Reymond, Werner Siemens, Traube, Wiedemann, i quali hanno tenuto tanto alto il prestigio della scienza.

« Nel 1854 il Wiedemann passava all' Università di Basilea, nel 1863 al politecnico di Braunschweig, nel 1866 a quello di Karlsruhe; nel 1871 fu chiamato a Lipsia, a insegnare la Fisico-chimica, e dopo il ritiro di Hankel, nel 1887, egli vi fu incaricato dell' insegnamento della Fisica, ove rimase fino al momento della sua morte.

« G. Wiedemann apparteneva alla nostra Accademia fino dal 1891, in qualità di socio straniero.

« Egli ha eseguito numerosi lavori, quasi tutti nel campo dell' elettricità. Fra questi meritano una singolare menzione quelli sulla rotazione del piano di polarizzazione, prodotta da un campo magnetico, e quello sulla conducibilità elettrica, in cui si stabilisce un interessante parallelismo fra questa e la conducibilità termica. Ma il suo titolo più importante è il classico suo trattato sull' elettricità, in 4 volumi, che ebbe tre edizioni, sempre notevolmente rifatte, e che apparve coll' ultimo volume nel 1898; trattato, che è continuamente nelle mani di noi tutti. Nel 1877, dopo la morte di Poggendorff, egli assunse la direzione di quella importantissima rivista scientifica, che riassume in sè tutto il movimento della Fisica pura in Germania.

« Gustavo Wiedemann è morto, si può dire, sulla breccia. Ancora in data 14 marzo egli mi rispondeva ad un invito, mandatogli perchè intervenisse al Congresso degli Elettricisti, fissato per settembre a Como in onore di Alessandro Volta: che purtroppo i medici gli avevano prescritto un riposo assoluto in quest'anno e mostrandosi molto dolente di non poter assistere alla geniale festa. Nessuno di noi avrebbe certamente pensato, che questa sarebbe probabilmente l' ultima sua lettera e che nove giorni dopo egli dovesse morire. Egli morì, difatti, il 23 marzo u. s., con grande dolore dei numerosi suoi amici, e con grave lutto per il suo paese e per la scienza universale ».

Su proposta del Presidente, la Classe approva unanime che alla famiglia del defunto Socio siano inviate le condoglianze dell'Accademia.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci Taramelli, Foà, Bassani, Pincherle, Auwers, Boussinesq, Lipschitz, e dai signori Bombicci, Cabreira, Socolow, Forir, Jahr.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia d'agricoltura di Torino; la Società Reale di Londra; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la Società di scienze naturali di Emden; la Società geologica di Ottawa; l'Osservatorio di S. Fernando.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

L'Università di Pisa; il Ministero della Guerra di Roma; le Università di Tubinga e di Lund.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 9 aprile 1899.

Auwers A. — Die Venus Durchgänge 1874 und 1872. Bd. I. Berlin, 1898. 4°.
Baggi V. — Trattato elementare completo di geometria pratica. Disp. 61. Torino, 1899. 4°.
Bassani F. — La ittiofauna del calcare eocenico di Gassino in Piemonte. Napoli, 1899. 4°.
Bombicci L. — Le interessanti anomalie dei mirabili cristalli del solfo nativo della Miniera di Cà-Bernardi ecc. Bologna, 1898. 4°.
Boussinesq J. — Aperçu sur la théorie de la bicyclette. Paris, 1899. 4°.
Cabreira A. — Sur la géométrie des courbes transcendantes. Lisbonne, 1896. 8°.
Id. — Sur l'aire des polygones. Lisbonne, 1897. 8°.
Id. — Sur les vitesses. Sur la spirale. Lisbonne, 1898. 8°.
Carta idrografica d'Italia. — Tevere (con atlante). Roma, 1899. 8°.

Dangeard P.-A. — Théorie de la sexualité. Poitiers, 1899. 8.

De Koninck & Loest M. — Notice sur le parallélisme entre le calcaire carbonifère du Nord-ouest de l'Angleterre et celui de le Belgique. Bruxelles, 1886. 8°.

De Puydt M. & Lohest M. — De la présence de silex taillés dans les alluvions de la Méhaigne. Liége, 1885. 8°.

Id. — Exploration de la grotte de Spy. Liége, 1886. 8°.

Foà P. — Beitrag zum Studium des Knochenmarks. Naumburg, 1899. 8°.

Forir H. — Comptes rendus des sessions extraordinaires de la Société géologique en Belgique tenues dans la vallée de l'Ourthe et à Modane du 3 au 6 sept. 1892 et à Huy du 2 au 5 oct. 1897 et à Beauraing et à Gedinne du 17 au 20 sept. 1898. Liége, 1897-98. 8°.

Id. — Notices bibliographiques. V., Liége, 1895. 8°.

Id. — Quelques mots sur les dépôts tertiaires de l'Entre-Sambre-et-Meuse. Les schistes de Matagne etc. Liége, 1898. 8°.

Id. — Sur la série rhénane des planchettes de Felenne de Vencimont et de Pondrome. Liége, 1896. 8°.

Id. et *Loest M.* — Compte rendu de la session extraordinaire de la Société royale malacologique de Belgique et de la Société géologique de Belgique tenue à Liége et à Bruxelles du 5 au 8 sept. 1896. Bruxelles, 1897. 8°.

Jahr E. — Beitrag zur chemischen Wirkung des Magnetismus. I. II. 1899. 4°.

Id. — Die Urkraft oder Gravitation, Licht, Wärme, Magnetismus, Elektricität, chemische Kraft etc., sind secundäre Erscheinungen der Urkraft der Welt. Berlin, 1899. 8°.

Legrand E. — Prismes réitérateurs appliqués au sextant. Montévidéo, 1898. 4°.

Lipschitz R. — Bemerkungen ueber die Differentiale von symbolischen Ausdrücken. Berlin, 1899. 8°.

Lohest M. — Alluvions anciennes de la Meuse. Liége, 1890. 8°.

Id. — Découverte du plus ancien amphibien connu etc. Liége, 1888. 8°.

Id. — De la découverte d'espèces américaines de poissons fossiles, dans le dévonien supérieur de Belgique. Liége, 1889. 8°.

Id — De l'âge de certains dépôts de sable et d'argile plastique des environs d'Esneux. Liége, 1886. 8°.

Id. — De l'âge et de l'origine des dépôts d'argile plastique des environs d'Andenne. Bruxelles, 1887. 8°.

Id. — De la présence du calcaire à Paléchinides dans le carbonifère du nord de la France. Liége. 1896. 8°.

Id. — De la présence du calcaire carbonifère inférieur au bord sud du bassin de Namur etc. Liége, 1894. 8°.

Id. — De la structure héliçoidale de certaines anthracites de Visé. Liége, 1885. 8°.

Lohest M. — De l'origine des anthracites du calcaire carbonifère de Visé. Liége, 1889. 8°.

Id. — De l'origine des terrains secundaires et tertiaires etc. Liége, 1894. 8°.

Id. — Des dépôts tertiaires de l'Ardenne et du Condroz. Liége, 1896. 8°.

Id. — Notions sommaires de géologie à l'usage de l'explorateur au Congo. Bruxelles, 1897. 8°.

Id. — Recherches sur les poissons des terrains paléozoïques de Belgique. Liége, 1888. 8°.

Id. — Recherches sur les poissons paléozoïques de Belgique. Liége, 1888. 8°.

Id. — Sur la lignification des conglomérats à noyaux schisteux des psammites du Condroz. Liége, 1891. 8°.

Id. — Sur le parallelisme entre le calcaire carbonifère des environs de Bristol et celui de la Belgique. Liége, 1894. 8°.

Id. — Sur quelques roches de la zone métamorphique de Paliseul. Liége, 1885. 8°.

Id. — Visite au Musée de la Smithsonian Institution à Washington etc. Liége, 1892. 8°.

Id. et *Braconier J.* — Exploration du trou de l' abîme à Couvin. Liége, 1888. 8°.

Id. et *Forir H.* — Quelques faits géologiques intéressants, observés récemment. Bruxelles, 1898. 8°.

Id. et *Velge G.* — Sur le niveau géologique du calcaire des Écaussines. Liége, 1894. 8°.

Miscarea populatiunei Romȃniei in 1893. Bucuresci, 1898. 4°.

Morandi L. — La nebulosidad en el Clima de Montevideo. Montevideo, 1898. 8°.

Motta-Coco A. — Sul significato diagnostico e pronostico del fenomeno palmo-plantare nelle febbri tifoidee. Torino, 1899. 8°.

Id. e *Drago S.* — Contributo allo studio delle cause predisponenti alla pneumonite crupale. Milano, 1899. 8°.

Passerini N. — Modificazioni al solforatore per botti sceme. Firenze, 1899. 8°.

Id. — Sopra la composizione dei calcari alberesi nelle colline del Fiorentino. Firenze, 1899. 8°.

Id. — Su di un psicometro portatile (psicometro fionda). Firenze, 1899. 8°.

Pecile D. — Sulle carte agronomiche in Friuli. Udine, 1899. 4°.

Pincherle S. — A proposito di un recente teorema del sig. Hadamard. Bologna, 1899. 8°.

Socolow S. — Corrélations régulières du système planétaire avec l'indication des orbites des planètes inconnues jusqu'ici. Moscou, 1899. 9°.

Taramelli T. — Di alcune delle nostre valli epigenetiche. Firenze, 1899. 8°.

Tommassina Th. — Sur un cohéreur très sensible, obtenu par le simple contact de deux charbons; et sur la constatation d'extracourants induits dans le corps humain par les ondes électriques. Paris, 1899. 4°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 23 aprile 1899.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle trasformazioni delle superficie a curvatura costante positiva.* Nota 2ª del Socio LUIGI BIANCHI.

Nella mia Nota precedente (1), utilizzando i recenti risultati ottenuti dal sig. Guichard nella teoria della deformazione delle quadriche di rotazione, ho stabilito un metodo di trasformazione per le superficie a curvatura costante positiva. Dimostrerò ora come l'integrazione del sistema di equazioni differenziali, che si presenta per applicare la trasformazione stessa, si riduca ad un'ordinaria equazione differenziale *lineare.* Alla nuova forma data al sistema differenziale si collega una classe di superficie, che hanno le medesime immagini sferiche delle linee di curvatura delle superficie applicabili sulla sfera e sono integrali di un'equazione di Ampère della forma che si presenta nelle ultime ricerche di Weingarten sull'applicabilità.

Considero poi la relazione delle nuove trasformazioni con quella ben nota (involutoria) dovuta ad Hazzidakis e dimostro che esse sono permutabili con questa.

Da ultimo ottengo una conferma delle previsioni, già enunciate nella Nota 1ª, dimostrando come le trasformazioni in discorso si applicano non solo alle superficie isolate, ma ben anche ai sistemi tripli ortogonali (di Weingarten), contenenti una tale serie di superficie a curvatura costante positiva.

(1) Questi Rendiconti, seduta 5 marzo, 1899.

1. Sia, come nella Nota 1ª:

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2 \tag{1}$$

l'elemento lineare di una superficie S a curvatura $K = +1$, riferita alle sue linee di curvatura u, v, dove θ è una soluzione dell'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta \cosh\theta = 0\,. \tag{2}$$

Indichino W, Φ due funzioni di u, v assoggettate a soddisfare al seguente sistema di equazioni differenziali *lineari ed omogenee*, dove c indica una costante arbitraria:

$$(A)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial u^2} = \coth\theta \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial W}{\partial u} - \operatorname{tgh}\theta \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial W}{\partial v} + c \operatorname{senh}^2\theta W + (c+1)\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\Phi \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = \coth\theta \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial W}{\partial u} + \operatorname{tgh}\theta \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial W}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial v^2} = -\coth\theta \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial W}{\partial u} + \operatorname{tgh}\theta \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial W}{\partial v} + c\cosh^2\theta W + (c+1)\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\Phi \end{cases}$$

$$(B) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial u} = -\coth\theta \frac{\partial W}{\partial u}\,, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial v} = -\operatorname{tgh}\theta \frac{\partial W}{\partial v}\,.$$

Il sistema formato dalle (A), (B) [1] è *illimitatamente integrabile*, a

[1] Si può dare al sistema (A), (B) una forma invariantiva, che vale per qualunque sistema coordinato (u, v). Se diciamo

$$E du^2 + 2F\, du\, dv + G dv^2$$
$$D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2$$

le due forme differenziali quadratiche fondamentali della S, il sistema si scrive

$$(A^*) \quad \begin{cases} W_{11} = cEW - (c+1)D\Phi \\ W_{12} = cFW - (c+1)D'\Phi \\ W_{22} = cGW - (c+1)D''\Phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial u} = \dfrac{GD - FD'}{EG - F^2}\dfrac{\partial W}{\partial u} + \dfrac{ED' - FD}{EG - F^2}\dfrac{\partial W}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial u} = \dfrac{GD' - FD''}{EG - F^2}\dfrac{\partial W}{\partial u} + \dfrac{ED'' - FD'}{EG - F^2}\dfrac{\partial W}{\partial v} \end{cases},$$

i simboli W_{11}, W_{12}, W_{22} denotando le *derivate seconde covarianti* di W. Si osserverà che per $c = -1$ (valore che nelle attuali ricerche è escluso) il sistema (A^*) si riduce a quello noto di Weingarten, che si integra appena note le geodetiche della superficie (Cf. *Lezioni*, pag. 525).

causa della (2), e si possono quindi dare ad arbitrio, per un sistema iniziale di valori delle variabili, i valori di

$$\Phi\,,\ \mathrm{W}\,,\ \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}\,,\ \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}\,,$$

sicchè nell' integrale generale del sistema figurano quattro costanti arbitrarie. In forza delle (A), (B), l' espressione

$$\Delta_1 \mathrm{W} + (c+1)\,\Phi^2 - c\mathrm{W}^2$$

è una costante, che pel nostro scopo conviene rendere nulla, ciò che si ottiene disponendo dei valori iniziali; si avrà quindi

$$\text{(C)} \qquad \Delta_1 \mathrm{W} = c\mathrm{W}^2 - (c+1)\,\Phi^2\,.$$

Il segmento T che devesi staccare sopra ogni normale alla S, secondo la costruzione del n. 2 (Nota 1ª), è dato allora semplicemente da

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{W}}{\Phi}\,.$$

Indichiamo con x, y, z le coordinate di un punto di S e con $(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1)$, $(\mathrm{X}_2, \mathrm{Y}_2, \mathrm{Z}_2)$, $(\mathrm{X}_3, \mathrm{Y}_3, \mathrm{Z}_3)$ rispettivamente i coseni di direzione delle tangenti alle linee $v = \mathrm{cost}^{\mathrm{te}}$, $u = \mathrm{cost}^{\mathrm{te}}$ e della normale alla S. Le formole che dànno le coordinate x', y', z' del punto corrispondente sulla superficie trasformata saranno le seguenti:

$$(3)\quad \begin{cases} x' = x - \dfrac{2\mathrm{W}}{h(\mathrm{W}^2-\Phi^2)}\left\{\dfrac{1}{\mathrm{senh}\theta}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}\mathrm{X}_1 + \dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}\mathrm{X}_2 - \Phi\mathrm{X}_3\right\} \\ y' = y - \dfrac{2\mathrm{W}}{h(\mathrm{W}^2-\Phi^2)}\left\{\dfrac{1}{\mathrm{senh}\theta}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}\mathrm{Y}_1 + \dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}\mathrm{Y}_2 - \Phi\mathrm{Y}_3\right\} \\ z' = z - \dfrac{2\mathrm{W}}{h(\mathrm{W}^2-\Phi^2)}\left\{\dfrac{1}{\mathrm{senh}\theta}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}\mathrm{Z}_1 + \dfrac{1}{\cosh\theta}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}\mathrm{Z}_2 - \Phi\mathrm{Z}_3\right\}. \end{cases}$$

Come conferma, per l' elemento lineare della S' troviamo:

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = \mathrm{senh}^2\theta'\,du^2 + \cosh^2\theta'\,dv^2\,,$$

posto

$$\begin{cases} \mathrm{senh}\theta' = \dfrac{(\mathrm{W}^2+\Phi^2)\,\mathrm{senh}\theta + 2\mathrm{W}\Phi\cosh\theta}{\mathrm{W}^2-\Phi^2} \\ \cosh\theta' = \dfrac{(\mathrm{W}^2+\Phi^2)\cosh\theta + 2\mathrm{W}\Phi\,\cosh\theta}{\mathrm{W}^2-\Phi^2}\,. \end{cases}$$

2. Le superficie a curvatura costante positiva si presentano a coppie di superficie coniugate secondo la trasformazione di Hazzidakis [1]. Sia S_1 la superficie trasformata di Hazzidakis della S; il suo elemento lineare ds_1, riferito alle linee di curvatura, sarà dato da

$$ds_1^2 = \cosh^2\theta\, du^2 + \operatorname{senh}^2\theta\, dv^2 .$$

Volendo ora applicare alla S_1 la nostra trasformazione, avremo un sistema analogo ad (A), (B), che si deduce da questo scambiando W con Φ e cangiando c in $-(c+1)$. Da questa semplice osservazione deriva la conseguenza: *Il segmento da riportarsi sopra ogni normale della trasformata di Hazzidakis* S_1 *è precisamente l'inversa del segmento riportato sulla normale alla primitiva* S.

Ne segue che il luogo Σ' dei termini dei secondi segmenti sarà applicabile sull'ellissoide se il luogo analogo Σ pei primitivi sarà applicabile sull'iperboloide ed inversamente.

Sia ora S′ la superficie a curvatura costante positiva normale ai raggi riflessi sulla Σ delle normali alla S, e similmente S_1' la nuova trasformata della S_1. Sussiste il notevole teorema: *Le due superficie* S′, S_1' *sono ancora trasformate di Hazzidakis l'una dell'altra.*

Questo risultato può anche enunciarsi così: *La trasformazione involutoria di Hazzidakis è permutabile colle nuove trasformazioni.*

3. L'elemento lineare (1) appartiene altresì alla sfera di raggio $=1$; esso è l'elemento sferico rappresentativo della trasformata S′ di Hazzidakis.

Consideriamo ora la superficie $\overline{S}$ inviluppata dal piano parallelo al piano tangente di S′ e distante dall'origine di $p = W$. Si trova che i raggi principali r_1, r_2 di curvatura della $\overline{S}$ soddisfano all'equazione:

$$r_1 r_2 - (c+1)\,p(r_1 + r_2) + (c+1)\,2q = 0, \tag{4}$$

significando $2q$ il quadrato della distanza dell'origine dal punto di contatto del piano tangente di $\overline{S}$. Le superficie (4), che hanno a comune colle superficie applicabili sulla sfera l'immagine sferica delle linee di curvatura, appartengono alla classe, considerata da Weingarten, di quelle superficie che soddisfano ad un'equazione d'Ampère della forma

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + (r_1 + r_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} + r_1 r_2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} = 0 ,$$

avendo qui la funzione φ il valore

$$\varphi = \sqrt{(c+1)\,p^2 - 2q} .$$

[1] Cfr. *Lezioni*, pag. 447.

Ogni superficie della classe (4), trasformata con un'inversione per raggi vettori reciproci col centro nell'origine, dà una superficie della medesima specie. Le superficie a curvatura costante positiva che hanno a comune con queste ultime l'immagine sferica delle linee di curvatura sono precisamente quelle che le nuove trasformazioni fanno derivare dalla primitiva S.

4. Veniamo ora a considerare un sistema triplo ortogonale (u, v, w) contenente una serie di superficie S a curvatura costante positiva $K = +1$. All'elemento lineare dello spazio, riferito ad un tale sistema triplo ortogonale, potremo dare la forma [1]:

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2,$$

dove θ soddisfa alle equazioni a derivate parziali

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0 \\ &\frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2 + \frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 = 1. \end{aligned}\right.$$

Di ciascuna superficie S ($w = \text{cost}^{te}$) prendiamo una trasformata S′, secondo una delle nostre trasformazioni, e sia

$$T(u, v, w)$$

il segmento che dobbiamo riportare sulla normale in ogni punto alla S (Nota 1ª, § 2). Domandiamo di determinare, se è possibile, T in funzione di u, v, w in guisa che le nuove superficie S′ facciano nuovamente parte di un sistema triplo ortogonale. La funzione T deve intanto soddisfare alle due equazioni della Nota 1ª:

$$(\alpha)\quad \frac{1}{(\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{(\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 = cT^2 - (c+1)$$

$$(\beta)\quad \frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v} = \left(\frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta} + \frac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\right)\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} + \\ + \frac{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial u}.$$

La condizione imposta che le S′ facciano parte di un nuovo sistema triplo ortogonale porta poi alla nuova equazione:

$$(\gamma)\quad (c+1)\frac{\partial T}{\partial w} = [cT^2 - (c+1)]\frac{\partial T}{\partial w} - \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\cdot\frac{T}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u} - \\ - \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\cdot\frac{T}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}.$$

[1] *Lezioni*, pag. 530.

Il sistema costituito dalle (α), (β), (γ) ammette, a causa delle (5), un integrale T contenente due costanti arbitrarie, potendosi fissare comunque i valori iniziali di

$$T\,,\ \frac{\partial T}{\partial u}\,,\ \frac{\partial T}{\partial v}\,,$$

purchè legati dalla (α). Per *una* delle superficie S può quindi fissarsi ad arbitrio la trasformata S′ che si vuole considerare e ne risultano allora pienamente determinate le trasformate di tutte le altre. Così adunque: *Da un sistema triplo ortogonale contenente una serie di superficie a curvatura* $K = +1$, *coll' integrazione di un' equazione differenziale ordinaria, si possono far derivare* ∞^3 *nuovi sistemi della medesima specie.*

Aggiungiamo che, procedendo in modo analogo come per le superficie isolate, si potrà dare al sistema da integrarsi la forma *lineare.*

Resterà in fine da considerarsi il caso in cui nel sistema triplo ortogonale la curvatura di ogni singola superficie S è costante (positiva) ma variabile dall' una all' altra, cioè funzione di w. In tal caso la costante assoluta c sarà da sostituirsi con una conveniente funzione di w.

Osservazioni circa le ultime ricerche del sig. Darboux.

Il sig. Darboux, in due recenti comunicazioni all' Accademia delle Scienze di Parigi (¹), si occupa anch' egli dei teoremi sulle deformazioni delle quadriche enunciati dal sig. Guichard. Alla fine della seconda sua Nota si leggono le espressioni seguenti: *Dans une autre Communication, je démontrerai ces propositions par une voie géométrique toute différente et je montrerai que, en ce qui concerne les surfaces à courbure constante, elles ne donnent pas de méthode de transformation distincte de celles de M. M. Bianchi et Bäcklund.*

Il successivo numero 15 dei Comptes Rendus non contiene alcuna nuova comunicazione del sig. Darboux, nè io so quindi come verrà dimostrato il suo asserto. Ma poichè egli sembra qui alludere alle mie ultime ricerche, sebbene non ne faccia menzione, credo opportuno dire qualche parola sull' argomento per spiegare fino da ora in quale senso una tale affermazione può dirsi esatta.

Il sig. Darboux non si preoccupa evidentemente di distinguere il reale dall' immaginario e, sotto questo punto di vista, è certo indifferente parlare delle superficie a curvatura costante negativa, o positiva (o con qualunque altro valore complesso della curvatura), passandosi dalle une alle altre con un' omotetia immaginaria. Ben diversa è la cosa se, collocandoci dal punto

(¹) Seduta del 27 marzo e del 4 aprile (nn. 13, 14).

di vista reale, domandiamo di costruire quante si vogliano nuove superficie *reali* a curvatura costante positiva. Le antiche trasformazioni, direttamente applicate ad una tale superficie reale, danno allora soltanto superficie immaginarie.

Ora sussiste effettivamente la proprietà che le trasformazioni *reali* delle superficie a curvatura costante positiva *da me trovate* possono comporsi ciascuna con due successive trasformazioni *immaginarie* di Bäcklund. È questa certamente un'osservazione interessante; ma non mi sembra che essa diminuisca l'importanza del risultato conseguito.

Invero non era affatto evidente a priori che si potesse applicare ad una superficie reale a curvatura costante positiva una trasformazione immaginaria di Bäcklund, indi alla nuova superficie immaginaria ottenuta un'altra *conveniente* trasformazione immaginaria, in guisa che la seconda trasformata risultasse nuovamente reale [1]. Parmi piuttosto che questo fatto, ora accertato, spieghi appunto la ragione per la quale rimasero così lungo tempo nascoste le nuove trasformazioni reali. Queste sono insomma di natura più complicata delle antiche e possono risolversi in tali trasformazioni più semplici, solo ricorrendo ad opportune trasformazioni componenti immaginarie.

Aggiungerò in fine che, persino per le superficie pseudosferiche, le mie ultime ricerche danno, dal punto di vista reale, risultati essenzialmente nuovi. Le trasformazioni di queste superficie, ottenute per la nuova via, offrono invero tre casi distinti, secondo che la costante, indicata con a nella mia prima Nota del 19 febbraio (§ 5), è $=1$, ovvero >1 o in fine <1.

Se $a=1$, la trasformazione si compone di due successive trasformazioni complementari, come già è dimostrato al § 7 della medesima Nota.

Quando $a>1$, la trasformazione si compone di due trasformazioni *reali* di Bäcklund, nelle quali le corrispondenti congruenze pseudosferiche presentano la medesima lunghezza costante del segmento focale.

Ma, quando $a<1$, la nostra trasformazione reale si può risolvere soltanto in due componenti di Bäcklund *immaginarie*. Dal punto di vista reale essa è quindi una trasformazione *nuova*.

Tutto questo apparirà meglio in un'ampia Memoria che sto preparando per la pubblicazione.

[1] Ciò, dico, era così poco evidente che tentativi diretti, fatti appunto in questo senso da altri e da me, erano rimasti infruttuosi.

Fisica. — *Sui raggi catodici, sui raggi Röntgen e sulle dimensioni e la densità degli atomi* (¹). Nota II di G. Guglielmo, presentata dal Socio Blaserna.

Ammesso che i raggi catodici siano costituiti da particelle esilissime dotate di grandissima velocità, il fatto che esse possono attraversare un corpo solido, liquido o gassoso di conveniente spessore senza essere deviate e senza diminuire di velocità, fornisce la prova più diretta della costituzione atomica della materia e dà un modo diretto e semplice (come dimostrai nella Nota precedente) per determinare, se non la vera grandezza degli atomi, almeno un limite superiore di questa grandezza, molto più approssimato che non cogli altri metodi.

Un modo un po' diverso e più semplice di quello esposto in essa Nota, per ottenere la relazione fra l'assorbimento d'un corpo per i raggi catodici e la somma delle sezioni di tutte le molecole assorbenti, è il seguente.

Un fascio di raggi catodici, semplici, parallelli ed uniformemente distribuiti cada perpendicolarmente ad uno strato piano di spessore d d'una sostanza p. es. gassosa. Sia Q la quantità di questi raggi per cm^2 e per minuto secondo all'entrata nello strato, e sia Q' la quantità di essi per cm^2 e per $1''$ emergenti dallo strato senza aver subìto deviazione da parte delle molecole della sostanza; sia inoltre n^3 il numero di queste molecole per cm^3, e supponiamo lo strato diviso in n strati elementari uguali parallelli alle sue facce; ciascuno di questi conterrà n^2 molecole per cm^2. Se per ciascuna molecola è σ l'area, presa perpendicolarmente ai raggi catodici, che non può essere attraversata da questi senza che essi vengano deviati o fermati, quest'area per ogni strato elementare sarà $n^2\sigma$ per cm^2, ed il numero di raggi catodici che saranno deviati o fermati nell'attraversare il 1° strato elementare sarà $Qn^2\sigma$, mentre il numero di quelli che potranno passare liberamente sarà $Q(1-n^2\sigma)$ per cm^2. Similmente il numero di essi che potranno attraversare liberamente il 2°, il 3°, ecc. strato elementare, sarà rispettivamente, $Q(1-n^2\sigma)^2$, $Q(1-n^2\sigma)^3$ ecc.; ed il numero di quelli che potranno attraversare liberamente tutto lo strato di spessore d, sarà per cm^2:

$$Q' = Q(1-n^2\sigma)^{nd}$$

Questa relazione non differisce essenzialmente da quella trovata nella Nota precedente; difatti essa può scriversi: $Q' = Qe^{nd.\text{lognep}.(1-n^2\sigma)}$, e siccome

(¹) Lavoro eseguito nel Gabinetto fisico della R. Università di Cagliari.

$n^2\sigma$ è una quantità piccolissima, invece di $\log(1 - n^2\sigma)$ si può prendere $-n^2\sigma$ e quindi si ha:

$$Q' = Qe^{-dn^3\sigma} \quad \text{oppure} \quad Q' = Qe^{-sd}$$

indicando con S la somma delle sezioni di tutte le molecole che è $n^3\sigma$ per cm^3 e prendendo come sezione d'una molecola il valore di σ quale fu definito.

Siccome d'altra parte $n.^3d \, . \, 1 \, cm^3$ è il numero delle molecole per cm^2 dello strato che si considera, e questo numero è uguale al quoziente del peso P di esso strato per cm^2, per il peso assoluto $p\varepsilon$ d'una molecola (chiamando ε il peso assoluto d'un atomo d'idrogeno, che secondo la teoria dei gas è circa 10^{-24} gr.) si avrà:

$$Q' = Qe^{-\frac{P}{p\varepsilon}\sigma}$$

L'area σ per un gas, per un liquido o per un solido amorfo deve necessariamente ritenersi (almeno in media) come costituita da uno o più cerchi a seconda che la molecola è composta di uno o più nuclei o atomi che impediscono il libero passaggio dei raggi catodici, poichè non v'è ragione perchè in un corpo amorfo queste aree si estendano piuttosto in una direzione che in un'altra, e se ν è il numero di questi nuclei o atomi, sarà $\sigma = \nu\pi\varrho^2$ essendo ϱ il raggio delle singole aree che impediscono il libero passaggio dei raggi catodici. ϱ rappresenterebbe il raggio d'azione sensibile degli atomi rispetto ai raggi catodici qualora le particelle che questi ultimi costituiscono avessero dimensioni nulle; se però il raggio di queste particelle è ϱ_1, e ϱ_2 quello dell'azione sensibile degli atomi, sarà:

$$\sigma = \nu\pi(\varrho_1 + \varrho_2)^2$$

e quindi

$$Q' = Qe^{\frac{P}{p\varepsilon}\nu\pi(\varrho_1+\varrho_2)^2} .$$

Come già osservai nella Nota precedente, Lenard trovò coll'esperienza che il valore di $Q':Q$ per una data qualità di raggi catodici (e quindi per un determinato valore di ϱ_1) e per un valore qualsiasi ma determinato del peso per cm^2 dello strato assorbente è costante, indipendente quindi dalla natura e dal peso molecolare della sostanza.

Perchè ciò sia è necessario: 1° che ν sia uguale o multiplo costante di p, ossia che una molecola sia composta di un numero di nuclei o atomi isolati e distanti (affinchè le singole aree non si sovrappongono) uguale o multiplo costante del peso molecolare; 2° che questi nuclei o atomi, che hanno quindi anche in corpi diversi lo stesso peso, abbiano anche la stessa sezione in tutte le direzioni, e siano quindi probabilmente identici in tutti i

corpi. Nella Nota più volte citata trovai anche che $\frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2)$ è all' incirca uguale a 10^{-11} e che la densità di questi atomi sarebbe di 80000 Kgr. per cm^3, ammesso che i raggi catodici non attraversino la parte dell' atomo soggetta alla gravità.

Per l' idrogeno Lenard trovò un assorbimento doppio di quello degli altri corpi a pari densità superficiale; si potrebbe credere che questa differenza che presenta il solo idrogeno che ha la massima velocità molecolare, sia dovuta appunto a questa; ma a tal uopo sarebbe necessario ammettere che la velocità dei raggi catodici fosse circa 10^5 cm. per secondo, ciò che non pare ammissibile. Sebbene non paia che J. J. Thomson nel calcolo di questa velocità abbia tenuto conto del calore che le particelle dei raggi catodici nell'urto contro un solido, generano per l'abbassamento di potenziale che esse subiscono, non pare che questa causa d'errore, dato che sia reale e sensibile, possa giustificare l'accennata velocità.

Aumentando la rarefazione e quindi la differenza di potenziale alla quale sono prodotti i raggi catodici, aumenta per uno stesso strato assorbente il valore di $Q' : Q$, sia perchè diminuisca il valore di ϱ_1, sia perchè diminuisca quello di ϱ_2 a causa dell' aumentata velocità dei raggi catodici. Usando un fascio composto di varie specie di raggi catodici e misurando i valori totali di Q e Q' s' avranno per σ valori compresi fra i valori estremi e quindi ammissibili. D'altronde è da notare che nel modo d' operare di Lenard, che determinava la distanza a cui cessava d' esser visibile la luminescenza prodotta dai raggi catodici, questi erano semplici, poichè erano già stati assorbiti quelli più facilmente assorbibili. Così pure col metodo usato dal Röntgen per paragonare il potere assorbente di varie sostanze, riducendo cioè lo spessore di esse, in modo che tutte producessero lo stesso assorbimento, nessun errore notevole può derivare dalla complessità dei raggi, a meno di ammettere un assorbimento specifico che almeno pei raggi catodici non pare che si verifichi.

Il determinare i valori di σ corrispondenti a raggi catodici di diverse e note velocità, come pure il determinare la proporzione dei raggi catodici d' una stessa velocità nota che vengono deviati di angoli determinati, può dare un' idea del modo come varia l' intensità del campo d' azione dell' atomo a varie distanze dal suo centro [1].

[1] Spesso si considerano gli atomi come corpicciuoli a contorni definiti, durissimi, elastici ecc.; tale ipotesi però non ha niente che la giustifichi, poichè non è verosimile e neppure utile. Difatti essa non giova a spiegare l' azione a distanza degli atomi che deve essere intensissima, perchè obbliga le molecole urtantisi a cambiar direzione in un tempo e in uno spazio piccolissimi e perchè produce nelle combinazioni le vibrazioni termiche o luminose che sono certamente rapidissime. L' ammettere poi che queste forze si sviluppino (come nell'urto dei corpi) al contatto dei due atomi, introduce la necessità di indagare la struttura dell' atomo tale da sviluppare tali forze, e conduce quindi ad

L' applicazione dalla formula precedente all'assorbimento dei raggi catodici nei gas non mi pare che possa dar luogo ad obbiezioni; e difatti sin da quando Crookes emise la sua teoria della materia radiante, si fece un calcolo analogo nel caso molto più complicato che le particelle dei raggi catodici avessero la velocità e le dimensioni delle molecole quali risultano dalla teoria cinetica dei gas. Il fatto che l' assorbimento dei gas, quale risulta dalle esperienze di Lenard, conduce a valori della grandezza delle molecole molto più piccoli di quelli che risultano dalla teoria dei gas, si spiega colla grandissima velocità e colle minori dimensioni delle particelle dei raggi catodici rispetto a quella delle molecole, ma specialmente con ciò che i raggi catodici penetrano nell' interno delle molecole passando fra atomo e atomo.

L' uguaglianza dei valori che s' ottengono per il raggio d' azione degli atomi applicando la formula suddetta all' assorbimento prodotto dai gas ed a quello prodotto dai varî solidi, molto diversi per densità e per peso atomico, studiati dal Lenard, è già una prova che quest' ultima applicazione non è erronea; tuttavia essa può dar luogo a varie obbiezioni.

Stokes (1) trovando difficile poter ammettere che particelle materiali possano penetrare nell' interno d' un solido compatto (ciò che risulta necessariamente se si ammettono i valori di σ che s' ottengono pei gas dalle esperienze di Lenard) suppone che i raggi Lenard come i raggi Röntgen possano esser dovuti a perturbazioni dell' etere causate dal subito fermarsi delle particelle cariche di elettricità negativa urtanti contro il solido. Egli suppone altresì che i raggi Lenard possano essere raggi catodici emessi dalla faccia posteriore della foglia d' alluminio, quando la faccia anteriore è percossa dai raggi catodici portanti elettricità negativa.

Goldstein (2) ha osservato che i raggi catodici K_2 urtando le molecole gassose danno origine ai raggi K_3 di natura simile ai raggi K_2 ma diffusi in tutte le direzioni, e nell' urtare le molecole d' un solido danno origine ai raggi K_d pure simili ai raggi K_2 e diffusi in tutte le direzioni; egli non può asserire che i raggi K_2 e i raggi K_3 e K_d siano identici, anzi osserva alcune lievi differenze di colore nelle luminescenze da essi prodotte. Inoltre il Goldstein

---

un problema insolubile, mentre il considerare l' atomo come un centro di forza lascia sperare che determinandone il campo si possa trovarne la causa. Nella vibrazione luminosa d' un atomo, per uno spostamento di esso dalla posizione d' equilibrio di una lunghezza uguale al raggio dell'atomo di idrogeno (10^{-11}) si manifesta un'accelerazione ($a = 4\pi^2 r : T^2$) uguale circa a $1,5.10^{+20}$ cm. per 1''.

(1) Mem. and Proc. of the Manchester liter. phil. Society, 1897. Science Abstracts, I, pag. 476. Nature 58, pag. 445.

(2) Wied. Ann. 67, pag. 84. Goldstein distingue tre strati nelle luminosità presso il catodo; uno strato color giallo (K_1, Kanalstrahlen) che si sviluppa dietro il catodo se questo è forato, uno strato formato di raggi azzurri poco luminosi K_2, ed uno strato di raggi azzurri più luminosi K_3 partenti da tutti i punti delle traiettorie dei raggi catodici.

osserva che i raggi catodici K_2 non attraversano una foglia metallica conservando la loro direzione, ma vi si trasformano in raggi K_d diffusi in tutte le direzioni; difatti la luminescenza prodotta dai raggi catodici attraverso una foglia metallica, è più intensa e limitata all'estensione di essa se la foglia è aderente al vetro, ma diventa più estesa e meno intensa a misura che la foglia s'allontana dal vetro. Qualora i raggi Lenard fossero raggi K_d e non raggi K_2, mancherebbe la base principale al calcolo su esposto.

L'ipotesi che i raggi Lenard siano perturbazioni dell'etere è contradetta dalle esperienze dello stesso Lenard, che dimostrò che i raggi suddetti hanno tutte le proprietà dei raggi catodici ed in ispecie quella di essere deviati in varî gas ed a varie pressioni per effetto d'un campo magnetico. L'altra ipotesi, cioè che i raggi Lenard siano raggi catodici emessi dalla faccia esterna della foglia d'alluminio, è contradetta dal fatto che essi si producono nell'aria atmosferica alla pressione ordinaria, nel vuoto più perfetto, ed anche quando la foglia d'alluminio comunica coll'anodo, tutte condizioni che s'oppongono alla produzione dei raggi catodici [1].

Riguardo alla possibilità che i raggi K_3, K_d e K_2 non siano identici, osservo anzitutto che ciò è senza influenza nell'applicazione della formula dell'assorbimento ai gas. Goldstein (Wied. Ann. 51, pag. 622) ha osservato pel primo che i raggi K_2 attraversano tutto lo spazio dei raggi K_3 e sono osservabili anche nei gas a pressione relativamente grande come nei tubi di Geissler, purchè si guardi attraverso un vetro azzurro che attenua la luce un po' rossiccia dei raggi K_3. I raggi diretti K_2 ai quali solamente può applicarsi la formula suddetta si distinguono inoltre dai raggi K_3 per la proprietà di produrre una viva luminescenza nel vetro.

Per cercare di risolvere il dubbio che i raggi catodici diretti K_2 ed i raggi riflessi K_d siano di diversa natura, ho fatto riflettere i raggi catodici K_2 ed ho osservato se i raggi riflessi venivano deviati per azione d'un campo magnetico. A tale scopo usai un tubo a T, di vetro, nel quale avevo introdotto da un lato un elettrodo d'alluminio piano e perpendicolare all'asse del tubo, e dall'altro lato un elettrodo d'alluminio pure piano ma inclinato di 45° sull'asse. Il primo elettrodo che serviva da catodo si trovava a circa 1 cm. di distanza dall'intersezione col tubo verticale, l'altro elettrodo si trovava sull'intersezione stessa in modo da riflettere verso il tubo verticale i raggi provenienti dal catodo. La chiusura delle estremità laterali del tubo era fatta mediante tappi di sovero ricoperti internamente da uno spesso strato di mastice (colofonia con poca paraffina). Finalmente la sommità del tubo verticale presso l'intersezione era riempita da un cilindro di ebanite lungo 2 cm., nel quale avevo praticato un foro secondo l'asse di 2 mm. di diametro.

[1] Willy Wien, Wied. Ann. 65, pag. 440.

Collocato il tubo sulla pompa e fatto il vuoto, facendo passare la scarica nel tubo, i raggi cadendo sull'anodo inclinato a 45° vi si riflettevano in tutte le direzioni, ed un fascio passando lungo il tubo d'ebanite suddetto penetrava nel tubo verticale rendendo debolmente luminescente la parte inferiore di esso. Collocata un'elettro-calamita a ferro di cavallo presso questo tubo, a varie distanze dal tubo orizzontale coi poli che ora abbracciavano il tubo ora si adattavano longitudinalmente su di esso, facendo passare la corrente d'una Bunsen modello medio per l'elettrocalamita, i raggi catodici vennero deviati di circa 45°, come indicava la macchia fosforescente del tubo. La stessa deviazione osservai allorchè l'anodo era in comunicazione col suolo.

La deviazione osservata non poteva esser attribuita ad uno spostamento dei raggi catodici primarî, ossia del punto ove essi incontravano la lamina riflettente, perchè il cilindro d'ebanite non permetteva il passaggio di raggi molto inclinati sull'asse; inoltre la deviazione dei raggi riflessi si produceva in direzione contraria a quella che sarebbe stata dovuta allo spostamento dei raggi catodici primarî.

La deviazione osservata era quella corrispondente alla carica di elettricità negativa dei raggi, e rimane così provato che anche i raggi riflessi hanno una tale carica, non possono essere prodotti dall'anodo e per il modo di comportarsi in un campo magnetico non differiscono essenzialmente dai raggi diretti. Appare quindi probabile che i raggi riflessi siano dovuti a particelle dei raggi incidenti penetrati nell'interno del corpo riflettente sino ad una profondità più o meno piccola, e deviati per azione degli atomi del corpo senza venire a contatto con essi e quindi senza ceder loro la carica di elettricità negativa.

Finalmente riguardo alla possibilità che i raggi Lenard siano composti unicamente di raggi diffusi (sebbene della stessa natura) e quindi deviati, è da notare che ammettendo i valori di σ trovati per i gas, e che non pare possano lasciar luogo a dubbio, ne risulta che nel caso d'un solido una proporzione piccola ma tuttavia apprezzabile può attraversare uno strato sufficientemente sottile di un solido. Che anche l'aria a pressione ordinaria si comporti come un mezzo torbido e quindi diffonda tutto all'intorno dei raggi, è già stato osservato dal Lenard e quindi tanto più dovrà comportarsi come un mezzo torbido un solido in cui le molecole sono notevolmente più ravvicinate, ma ciò non esclude che esso possa lasciar passare una piccola porzione di raggi non deviati che è facile distinguere dai raggi diffusi.

Il fatto che le particelle dei raggi catodici possiedono una carica elettrica grandissima rispetivamente alla loro massa, rende verosimile che in virtù di essa risentano da parte degli atomi un'azione attrattiva o ripulsiva a seconda della carica che questi, come si ammette generalmente, possiedono, e che quindi queste particelle, come osservai nella Nota precedente, risentano

l'azione degli atomi ad una distanza maggiore di ciò che avverrebbe se essi fossero privi di tale carica. Qualora si ammettesse, come si vuole da alcuni fisici, che i raggi Röntgen siano appunto costituiti da particelle esilissime dotate di grandissima velocità ma prive di carica elettrica, e precisamente siano costituiti dalle particelle dei raggi catodici che urtando contro un solido gli abbiano ceduto la loro carica e siano stati deviati in tutte le direzioni ([1]), questi raggi parrebbero più propri alla determinazione della grandezza degli atomi mediante la formola su esposta, e fornirebbero un valore di essa (o della parte impermeabile di essa) più prossimo al vero.

Tuttavia non pare che all'assorbimento dei raggi Röntgen, pel quale non fu possibile trovare una legge neppure nel caso di varî spessori d'uno stesso corpo, si possa applicare semplicemente l'ipotesi di particelle che passano negli interstizî fra gli atomi. Dato anche che i raggi Röntgen fossero costituiti da particelle materiali e non da perturbazioni dell'etere, il fenomeno dell'assorbimento dovrebbe essere complesso e non calcolabile (eccetto forse qualche caso come p. es. quello dei gas) nel modo indicato.

Riesce difatti inconciliabile colla suddetta ipotesi, che una lamina di platino ed una lamina d'alluminio a parità di peso per cm^2 presentino un così diverso assorbimento pei raggi Röntgen, e più generalmente riesce inesplicabile l'influenza del peso atomico. Se supponiamo ciascun atomo di alluminio e di platino diviso in tante parti quante sono le unità nei pesi atomici rispettivi e supponiamo, ciò che pare molto probabile, che queste parti avendo masse uguali esercitino, se prese isolatamente, azioni uguali, ne risulta che se queste parti fossero isolate e distanti, le due lamine avendo uguali pesi per cm^2 e quindi un ugual numero di queste parti per cm^2, dovrebbero aver la stessa opacità pei raggi Röntgen. Se invece le stesse parti in ogni atomo fossero vicine o raggruppate, la sezione degli atomi e quindi l'opacità della lamina, dovrebbe esser minore per il platino che non per l'alluminio.

Tuttavia non è possibile disconoscere alcune analogie che passano fra le proprietà dei raggi Röntgen e quelle dei raggi catodici. Oltre all'assenza di polarizzazione e di interferenze comune ad entrambi, si ha che per entrambi l'assorbibilità cresce al decrescere del potenziale al quale furono prodotti, ed è da notare che la differenza d'assorbibilità, grandissima pei

([1]) Walther, Wied. Ann. 66, pag. 74. È però da notare come risulti dall'esperienza sopradescritta che i raggi catodici anche riflettendosi sull'anodo conduttore e carico di elettricità positiva, conservano la loro carica, come pure la conservano quando attraversano la foglia d'alluminio pure conduttrice e carica di elettricità positiva. Quindi i raggi Röntgen non potrebbero esser costituiti nè dalle particelle riflesse, nè da quelle che attraversano il corpo, e neppure dalle particelle che urtano più direttamente contro gli atomi a cui cedono la propria carica elettrica, perchè queste dovrebbero perdere in massima parte la loro velocità che, come è noto, si trasforma in calore.

raggi Röntgen e pei raggi Lenard ordinari, diventa molto minore qualora si considerino raggi Röntgen prodotti a piccola differenza di potenziale.

Questa specie di raggi Röntgen non appare nei soliti tubi che invece hanno per iscopo di produrre raggi quanto più è possibile penetranti, e che inoltre hanno una parete spessa sufficiente per assorbire completamente questa specie di raggi qualora essa si producesse. In varî tentativi per ottenere raggi Lenard attraverso foglie d' alluminio e di magnesio preparate da me e perciò non di rado troppo spesse (1 a 2 mgr. per cm^2), ottenni oltre ai raggi Lenard deboli, una notevole quantità di raggi Röntgen. Questi, a differenza di ciò che avviene nei soliti tubi, cominciavano ad apparire quando la resistenza del tubo era equivalente a $\frac{1}{2}$ mm. d' aria atmosferica fra fili di 2 mm. di spessore. Essi poi erano pochissimo penetranti, tanto che due fogli di carta spessa, oppure 8 fogli sovrapposti di carta da filtro pesanti insieme 50 mgr. per cm^2., producevano nello schermo fluorescente pei raggi Röntgen un' ombra abbastanza intensa, mentre è noto che anche spessi libri sono facilmente traversati dai raggi Röntgen ordinari.

L' assorbimento che subiscono questi raggi in varî corpi e l' assorbimento dei raggi Lenard con tubi nei quali la foglia d'alluminio è sostenuta da una reticella sono oggetto di ulteriore studio.

Appendice. *Sull'assorbimento dei raggi luminosi e sulle dimensioni degli atomi.* Credo che forse la relazione fra le dimensioni, il numero degli atomi e l'assorbimento che essi producono, si possa applicare all'assorbimento dei raggi luminosi nel caso p. es. dell'argento che riflettendo la quasi totalità dei raggi incidenti deve essere composto di atomi o gruppi d'atomi opachi, ma che pochissimo assorbono la luce.

Ho determinato col fotometro Bunsen e col metodo usato dal Lenard pei raggi catodici, con luce ordinaria e con luce del sodio la proporzione di luce che può attraversare una pellicola d'argento deposta sul vetro col metodo Böttger. Queste pellicole, sebbene speculari su entrambe le facce, presentavano rari forellini, strie, variegature, e quindi l'argento non s' era deposto uniformemente; tuttavia al microscopio con un ingrandimento di 1500 apparivano continue, ad eccezione dei vari forellini. La proporzione di luce trasmessa risultò circa di 1 : 100 per pellicole pesanti in media 0,15 mgr. per $cm.^2$. L'assorbimento è quindi maggiore di quello che la stessa pellicola avrebbe prodotto nei raggi catodici, ed il raggio dell'atomo risulta dieci volte maggiore. Tale differenza, che potrà aumentare quando si eliminino le varie cause d'errore, non è grande se si considera l'assoluta diversità nella definizione della quantità che si vuol misurare e nel modo di misura.

Farò esperienze possibilmente con altri metalli, e cercherò di estendere la relazione suddetta al caso della luce riflessa da lamine trasparenti sottilissime.

Fisica terrestre. — *Confronti degli strumenti magnetici italiani con quelli degli osservatorî di Parc Saint-Maur e di Kew.* Nota di LUIGI PALAZZO, presentata dal Socio TACCHINI.

Il Comitato permanente di magnetismo terrestre aveva indetto nello scorso anno una Conferenza internazionale magnetica, alla quale erano invitati il direttore Tacchini dell'Ufficio meteorologico centrale italiano e lo scrivente, in qualità di membro del Comitato suddetto. La Conferenza dovevasi tenere a Bristol dal 7 al 14 settembre, contemporaneamente al congresso annuale dell'Associazione britannica per l'avanzamento delle scienze. Il direttore Tacchini, non potendo recarsi colà, e d'altra parte desiderando che a quel congresso fosse rappresentata anche l'Italia, fece pratiche presso il Ministero d'Agricoltura in modo da ottenere che io fossi delegato alla Conferenza di Bristol; ed inoltre fu ottimo pensiero del direttore quello che si dovesse trarre partito dal mio viaggio all'estero, per sottoporre i nostri strumenti magnetici a confronto coi magnetometri degli osservatorî di Parc Saint-Maur e di Kew. Invero siffatti confronti fra gli strumenti adoperati per le misure magnetiche assolute nei varî paesi sono in genere assai raccomandabili; ed anche la Conferenza meteorologica internazionale di Parigi nel 1896 aveva inteso di promuovere simili studî facendone oggetto di speciale voto [1].

[1] La risoluzione che, in seguito a proposta del Mascart, fu votata nella Conferenza di Parigi, suona così: « La comparaison des réseaux magnétiques des différents pays exige que les instruments qui ont servi aux différents levés magnétiques soient comparés entre eux à plusieurs reprises » (*Rapport de la Conférence météorologique internationale.* Réunion de Paris 1896, pag. 35). — In questi ultimi anni, già buon numero di confronti furono effettuati fra i magnetometri di Stati diversi. Limitandomi a riportare il titolo di quelle sole pubblicazioni che ai detti lavori di confronto sono esplicitamente dedicate, menzionerò le seguenti: Van Rijckevorsel, *An attempt to compare the instruments for absolute magnetic measurements at different observatories* (Royal Dutch Meteorological Institute, Amsterdam 1890); Solander, *Vergleichung der Bestimmungen der Horizontalintensität an verschiedenen magnetischen Observatorien* (Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, Upsala 1893); Chree, *Account of a comparison of magnetic instruments at Kew Observatory* (Proceedings of the Royal Society, vol. 62, 1897); Moureaux, *Comparaison des appareils magnétiques de voyage de l'observatoire du Parc Saint-Maur avec ceux de divers observatoires magnétiques étrangers* (Ann. du Bureau central météorologique, Paris 1898); Van Rijckevorsel, *Comparison of the instruments for absolute magnetic measurements at differents observatories* (Meteorological Institute of the Netherlands, Amsterdam 1898).

A noi poi interessava, in particolar modo, paragonare i nostri apparecchi con quelli francesi, a fine di potere allacciare la rete magnetica nella parte nord-ovest della nostra penisola colla rete della finitima Francia, e così pure il rilevamento magnetico della Sardegna con quello della Corsica. A vero dire, non si era mancato per l'addietro, da parte nostra, di cogliere occasioni per stabilire dei termini di paragone fra le due reti; ma questi tentativi, essendo stati fatti per vie indirette e senza l'appoggio delle registrazioni delle variazioni magnetiche in una vicina stazione di base, ci lasciavano molto dubbiosi intorno al vero valore da attribuire alle *equazioni strumentali* dei nostri apparecchi da viaggio rispetto a quelli della Francia.

A raggiungere lo scopo desiderato, si presentava ora propizia l'occasione; epperò, nel recarmi a Bristol passando per Parigi e Londra, portai meco gli strumenti posseduti dal nostro Ufficio per le determinazioni assolute in viaggio, cioè il magnetometro unifilare Dover-Schneider e l'inclinometro Dover n. 51, dei quali mi sono costantemente servito in tutte le mie campagne magnetiche in Italia. Con questi apparati feci dunque le misure comparative negli osservatorî di Parc Saint-Maur e di Kew. Tanto nell'esecuzione delle osservazioni, quanto nel calcolo delle medesime, mi attenni fedelmente ai metodi di procedimento da me usati per l'addietro; sui quali qui non mi trattengo, poichè per tutto ciò che li riguarda, intendo riferirmi alle mie Memorie di magnetismo pubblicate negli Annali dell'Ufficio centrale meteorologico. Avverto solo che, essendosi proceduto nel 1896 ad una nuova magnetizzazione del magnete a collimatore 504 A, che funziona come sbarra oscillante e deviante nel mio magnetometro, il momento d'inerzia ed i coefficienti attuali del 504 A si riferiscono a determinazioni fatte in un'epoca relativamente recente, cioè prima e dopo del mio ultimo giro di esplorazione magnetica, compiuto intorno all'Etna nell'inverno 1897-98. Anche l'asta metrica annessa al magnetometro ricevette nel 1897 una nuova graduazione, incisa nel Laboratorio centrale metrico, ed ivi paragonata col metro campione. Di conseguenza, i valori dei coefficienti del magnete 504 A e dei costanti del magnetometro, in base ai quali furono calcolate le misure di Parc Saint-Maur e di Kew [1], sono i seguenti:

Momento d'inerzia $K = 337{,}875$;
Coefficiente di temperatura medio (fra 20° e 30°) [2] $a = 0{,}000516$;

[1] Noto qui di passaggio che il magnete (il quale, attaccato al filo di sospensione, stava disposto orizzontalmente a Roma, ed anche in Sicilia) senza sussidio d'anello di contrappeso mantenne sensibilmente la sua posizione orizzontale pure a Parc Saint-Maur ed a Kew, nonostante la forte variazione nel valore dell'inclinazione magnetica. Ciò dimostra l'eccellenza della staffa di modello Chistoni, applicata ai magneti nostri.

[2] Dentro questo intervallo restarono difatti comprese le temperature lette durante le determinazioni di oscillazioni e di deviazioni nei due osservatorî esteri.

Coefficiente di induzione $h = 0{,}00631$;
Coefficiente magnetometrico (o costante delle deviazioni) $p = 22{,}95$ [1];
Distanza R_{30} (sull' asta metrica) $= 29^{cm},99968$;
Distanza R_{40} (sull' asta metrica) $= 39^{cm},99924$.

Ed ora passo a rendere conto delle operazioni di confronto eseguite a Parc Saint-Maur ed a Kew.

Parc Saint-Maur. — 25-29 Agosto 1898.

Adoperai i miei apparecchi sul pilastro del piccolo padiglione esente da ferro, che è destinato per le determinazioni assolute. Le ore delle singole osservazioni sotto riportate, sono espresse in tempo medio locale di Parc Saint-Maur. Il signor Moureaux, al quale debbo vivi ringraziamenti per le molteplici cortesie usatemi, ebbe cura di comunicarmi, per le corrispondenti ore, i valori ricavati dalle curve del magnetografo dell' osservatorio, e riferiti alle misure assolute fatte con gli strumenti da viaggio francesi, nei giorni dell' agosto: 25, 28, 30 per la declinazione; 25, 27, 31 per l' inclinazione; 23, 27, 30 per la componente orizzontale.

Le variazioni magnetiche sono state regolari durante il mio soggiorno al Parco; solo nei giorni 27 e 29 agosto si mostrarono alquanto seghettate le curve del bifilare, e, in proporzione molto minore, anche quelle del declinometro differenziale.

Declinazione. — L' azimut astronomico della mira di riferimento (parafulmine sormontante la cupola d' un belvedere, su di un edificio privato a Nogent sur Marne, alla distanza di circa quattro chilometri a nord dell' osservatorio) è $16^{\circ}\,43'\,3''$, contato da N per W. Nei giorni delle mie operazioni, l' immagine della mira al cannocchiale apparve spesso poco nitida, o per causa di nebbia o per sfavorevole illuminazione. Superfluo il dire che la torsione del filo di sospensione del magnete fu accuratamente tolta prima di cominciare le esperienze.

[1] Questo numero si è ottenuto fondendo in un' unica media i valori di p determinati mediante le due serie di apposite esperienze fatte a Roma nell' inverno 1897-98, insieme coi valori di p dedotti utilizzando le stesse coppie di deviazioni (Φ col magnete alla distanza R_{30} e φ col magnete alla distanza R_{40}) osservate nelle operazioni del Parco e di Kew.

Declinazione.

Giorno	Ora	Declinazione misurata con lo strumento di Roma.	Declinazione dedotta dal magnetografo di Parc Saint-Maur.	Differenze Roma-Parco
1898 Agosto	h m	° ′	° ′	′
25	3.10 pm	14.56,3	14.55,9	+ 0,4
	3.31 »	55,7	55,3	+ 0,4
	5.45 »	53,7	52,8	+ 0,9
	6. 3 »	53,5	52,7	+ 0,8
26	9.33 am.	14.53,0	14.52,6	+ 0,4
	9 54 »	54,6	53,9	+ 0,7
	11.51 »	59,0	58,4	+ 0,6
	0.10 pm.	59,2	59,0	+ 0,2
27	8. 3 am.	14.51,2	14.50,1	+ 1,1
	8.38 »	51,1	50,6	+ 0,5
	10.18 »	53,9	53,5	+ 0,4
	10.40 »	55,6	55,4	+ 0,2
			Media differenza	+ 0′,6

Inclinazione. — L'inclinometro Dover n. 51 è provvisto di due coppie di aghi distinti coi numeri 1 e 2, 5 e 6. Negli anni in cui compii i miei primi viaggi magnetici, questi aghi si mostravano tutti egualmente buoni, cioè fornivano normalmente valori quasi identici dell'inclinazione; più tardi invece, forse per leggere avarìe dei perni causate dal lungo uso, essi cominciarono a dare risultati alquanto meno soddisfacenti, e da ultimo io avevo cessato dal servirmi abitualmente di alcuni di essi. Tuttavia, negli attuali confronti all'estero, io ho voluto sperimentarli di nuovo tutti quattro, per ricercare, se possibile, le differenze proprie di ciascuno di essi. Per ogni ago feci un paio di determinazioni.

Inclinazione.

N. d'ordine dell'osservaz.	Ago	Tempo dell'osservazione		Inclinazione misurata coll'inclinometro di Roma	Valori dedotti dal magnetografo del Parco		Inclinazione calcolata pel Parco $i = \text{arc tg} \frac{Z}{H}$	Differenze Roma-Parco	Differenze medie per ciascun ago
		Giorno	Ora		Z	H			
		Agosto 1898	h m h m	° ′			° ′	′	′
1ª	5	26	8.16- 8.45 am.	64.55,8	0,42155	0,19676	64.58,7	— 2,9	— 1,5
5ª		29	8.53- 9.14 am.	64.58,1	0,42138	0,19676	64.58,2	— 0.1	
3ª	6	27	12.21-12.44 pm.	64.55,6	0,42144	0,19679	64.58,2	— 2,6	— 2,3
6ª		29	9.29- 9.51 am.	64.55,7	0,42136	0,19681	64.57,8	— 2,1	
2ª	1	27	11.36-11.56 am.	64.54,1	0,42140	0,19673	64.58,5	— 4,4	— 2,5
7ª		29	10. 5-10.31 am.	64.56,8	0,42134	0,19685	64.57,5	— 0,7	
4ª	2	27	5.34- 6. 2 pm.	64.57,8	0,42162	0,19688	64.58,2	— 0,4	— 1,4
8ª		29	10.46-11.46 am.	64.54,7	0,42133	0,19691	64.57,0	— 2,3	
							Media differenza	— 1′,9	

Intensità orizzontale. — Nelle misure di H, io sono solito ad osservare due volte la durata d'oscillazione e due volte ciascuno degli angoli di deviazione prodotti dal magnete alle distanze 30 e 40 del regolo metrico, intercalando le due serie di oscillazioni fra le due di deviazioni, ovvero queste fra quelle. La prima delle tabelle che vengono sotto, mostra l'ordine seguìto nelle varie operazioni; ed in corrispondenza di ognuna di queste, vi figura il contemporaneo valore di H dedotto dal magnetografo dell'osservatorio. Nel secondo quadro, offro i risultati del calcolo di H, ottenuti mediante le successive combinazioni di ciascuna delle durate d'oscillazione T con ciascuna delle deviazioni Φ o φ, mettendo poi a riscontro degli H così calcolati le medie (geometriche) dei due valori di H del magnetografo corrispondenti a ciascuna coppia di T e di Φ (o φ).

Per calcolare H dalle osservazioni di Parc Saint-Maur ho preparato le formole ridotte:

per le deviazioni alla distanza R_{30}

$$\log H = \bar{1}.701295 - \log T - \tfrac{1}{2} \log \operatorname{sen} \Phi + 0.00011205\,(t - \tau)\,,$$

e *per le deviazioni alla distanza* R_{40}

$$\log H = \bar{1}.511582 - \log T - \tfrac{1}{2} \log \operatorname{sen} \varphi + 0.00011205\,(t - \tau)\,.$$

Esse sono ottenute sostituendo nell'espressione generale di H [1], ai rispettivi simboli, i coefficienti ed i costanti già sopra riportati proprî del magnete e dello strumento, ed inoltre introducendovi:

per l'effetto di torsione del filo corrispondente a 360° di rotazione: $\Delta = 3',0$;

per l'andamento diurno del cronometro, che era un Bréguet di marina, n. 837, battente i mezzi secondi: $s = -3^s,0$ (acceleramento);

per la temperatura media durante le oscillazioni, nella correzione relativa alla dilatazione dell'acciaio del magnete: $t = 23°,85$;

per la temperatura media del regolo metrico durante le deviazioni: $\theta = 22°,5$ e $\theta = 22°,65$, rispettivamente per le deviazioni Φ e φ;

infine per i fattori che entrano nella correzione relativa all'induzione terrestre: H approssimato = 0,1967, medio $\Phi = 25°.37',4$, medio $\varphi = 10°.23',9$.

[1] Cfr. a pag. 17 della Memoria: *Misure di magnetismo terrestre fatte in Sicilia nel 1890* (Ann. Uff. Centr. Meteor. e Geod., vol. XVIII, parte 1ª, 1896).

Schema delle osservazioni.

	Tempi delle osservazioni	Durate d' oscillazione	t	Angoli di deviazione	τ	Valori di H dedotti dal magnetografo di Parc Saint-Maur
1ª Serie. 1898 Agosto 25.	h m h m	s	o	o ′	o	
	Da 3.41-3.54 pm.	T_1 3,88445	23,4			0,19685
	4.15-4.28 »			Φ_1 25.37,5	24,7	0,19685
	4.28-4.45 »			φ_1 10.23,8	25,0	0,19686
	4.49-5. 3 »			Φ_2 25.36,9	24,0	0,19686
	5. 3-5.17 »			φ_2 10.24,1	23,5	0,19688
	5.28-5.40 »	T_2 3,88405	23,4			0,19689
2ª Serie. 1898 Agosto 26.	h m h m	s	o	o ′	o	
	10. 1-10.14 am.	T_1 3,88425	22,6			0,19676
	10.31-10.43 »			Φ_1 25.37,9	24,2	0,19676
	10.43-10.57 »			φ_1 10.23,9	24,8	0,19676
	10.59-11.13 »			Φ_2 25.37,2	24,9	0,19677
	11.13-11.25 »			φ_2 10.23,8	25,7	0,19677
	11.34-11.46 »	T_2 3,8872	26,0			0,19681

Deduzione dei valori dell'intensità orizzontale

	Col magnete alla distanza	Combinazione di	Durata d'oscillazione	Angolo di deviazione	$t-\tau$	H determinato col magnetometro di Roma	H dato dal magnetografo di Parc Saint-Maur	Differenze Roma-Parco
1ª Serie. 1898 Agosto 25.			s	o ′	o			
	R_{30}	T_1 e Φ_1	3,88445	25.37,5	— 1,3	0,19672	0,19685	— 0,00013
		T_1 e Φ_2	3,88445	25.36,9	— 0,6	0,19679	0,19686	— 0,00007
		T_2 e Φ_1	3,88405	25.37,5	— 1,3	0,19674	0,19687	— 0,00013
		T_2 e Φ_2	3,88405	25.36,9	— 0,6	0,19681	0,19688	— 0,00007
	R_{40}	T_1 e φ_1	3,88445	10.23,8	— 1,6	0,19673	0,19685	— 0,00012
		T_1 e φ_2	3,88445	10.24,1	— 0,1	0,19676	0,19687	— 0,00011
		T_2 e φ_1	3,88405	10.23,8	— 1,6	0,19675	0,19688	— 0,00013
		T_2 e φ_2	3,88405	10.24,1	— 0,1	0,19678	0,19689	— 0,00011
						Differenza media nel giorno 25 agosto		— 0,00011
2ª Serie. 1898 Agosto 26.	R_{30}	T_1 e Φ_1	3,88425	25 37,9	— 1,6	0,19669	0,19676	— 0,00007
		T_1 e Φ_2	3,88425	25.37,2	— 2,3	0,19669	0,19677	— 0,00008
		T_2 e Φ_1	3,8872	25.37,9	+ 1,8	0,19671	0,19678	— 0,00007
		T_2 e Φ_2	3,8872	25.37,2	+ 1,1	0,19672	0,19679	— 0,00007
	R_{40}	T_1 e φ_1	3,88425	10.23,9	— 2,2	0,19670	0,19676	- 0,00006
		T_1 e φ_2	3,88425	10.23,8	— 3,1	0,19667	0,19676	— 0,00009
		T_2 e φ_1	3,8872	10.23,9	+ 1,2	0.19672	0,19679	— 0,00007
		T_2 e φ_2	3,8872	10.23,8	+ 0,3	0,19669	0,19679	— 0,00010
						Differenza media nel giorno 26 agosto		— 0,00008
						Differenza media finale		**—0,00009**

Qui torna a proposito ricordare che allorquando feci, nel 1890, le determinazioni magnetiche a Tunisi ed a Malta, avevo cercato di dedurre le differenze fra gli strumenti italiani ed i francesi, riferendomi alle misure eseguite dal Moureaux in quegli stessi luoghi, pochi anni prima. Tali confronti, a cui già sopra ho alluso, diedero le seguenti differenze:

nella declinazione . . .	+ 6′,2	(Roma-Parc St.-Maur)
nell'inclinazione	+ 1′,8	"
nella forza orizzontale.	— 0,00021 [1]	"

Questi numeri sono diversi da quelli trovati ora a Parc Saint-Maur; ma di ciò non è a farsi meraviglia, dovendosi riflettere che le determinazioni mie e del Moureaux a Tunisi ed a Malta, oltre all'essere state fatte in punti, bensì vicini, ma non identici, non furono contemporanee; e perciò io, in mancanza dei dati di variazione precisi forniti da un osservatorio, ho dovuto riportarmi alla medesima epoca delle misure del Moureaux, valendomi di coefficienti di variazione annuale che solo approssimativamente ero in grado di conoscere. Ciò scema di molto la fiducia nei risultati di quei primitivi confronti; mentre nessuna obbiezione può sollevarsi a riguardo delle attuali osservazioni di Parc Saint-Maur.

In un'altra prossima Nota darò i risultati dei confronti di Kew.

Chimica. — *Studi intorno alla costituzione degli alcaloidi del melagrano* [2]. Nota di A. Piccinini, presentata dal Socio G. Ciamician [3].

Le ricerche più recenti sugli alcaloidi della tropina hanno condotto ad una modificazione delle idee che si avevano intorno alla costituzione di questa

[1] V. a pag. 26 della Memoria testè citata, dove, per la differenza in H, sta però scritto il numero — 0,00088. Ma dopo di quell'epoca il Moureaux, in seguito a nuove e più precise indagini sul coefficiente magnetometrico del suo apparecchio ed all'introduzione della correzione per l'induzione ne' suoi calcoli, ha riconosciuto che tutti i suoi valori dati precedentemente per l'intensità orizzontale devono essere diminuiti della quantità 0,00067; il che riduce a solo — 0,00021 la differenza in H risultante dai nostri confronti di Tunisi e di Malta.

[2] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna, marzo 1899.

[3] Le ricerche descritte in questa Nota sono state incominciate dal dott. Silber e da me e continuate poi dal dott. Piccinini, che si è pure assunto il compito di proseguire nello studio di questo argomento in modo da esaurirlo.

Colgo poi questa occasione per rendere noto un fatto che ha qualche interesse per la storia delle basi tropiniche, senza però volere fare in questo modo un reclamo di priorità. Riscaldando l'acido tropinico con acido jodidrico e fosforo, noi abbiamo ottenuto, tempo fa, una base della composizione della piperidina. Questa base non è altro che la n-metilpirrolidina. Noi avevamo riconosciuta la natura di questo alcaloide ancor prima

categoria di alcaloidi; R. Willstätter ha dimostrato alcuni mesi or sono [1] che il chetone derivante dalla tropina, il tropinone, contiene la catena:

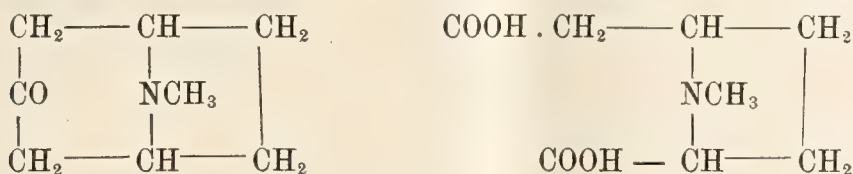
$$— CH_2 — CO — CH_2 — ,$$

e che l' acido tropinico, principale prodotto di ossidazione della tropina, può dare per apertura semplice del nucleo con eliminazione dell' azoto, una catena normale di sette atomi di carbonio.

Questi fatti che non si possono in verun modo accordare colla vecchia formola del Merling, trovano invece una completa spiegazione, quando si ammetta che la molecola degli alcaloidi tropanici contenga un sistema risultante dalla combinazione di un nucleo pirrolidinico con uno piperidinico, coll' azoto e due atomi di carbonio in comune. Lo schema seguente, proposto dal Willstätter, rappresenta appunto un tale sistema e dimostra anche, come la molecola delle basi tropaniche possa considerarsi come derivante da una catena cicloeptanica, contenente un ponte costituito dall'azoto:

$$\begin{array}{ccccc} C & — & C & — & C \\ | & & | & & | \\ C & & N & & | \\ | & & | & & | \\ C & — & C & — & C \end{array}$$

Al tropinone e all'acido tropinico sopracitati, spettano quindi le formole seguenti:

$$\begin{array}{ccccc} CH_2 & — & CH & — & CH_2 \\ | & & | & & | \\ CO & & NCH_3 & & | \\ | & & | & & | \\ CH_2 & — & CH & — & CH_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} COOH . CH_2 & — & CH & — & CH_2 \\ & & | & & | \\ & & NCH_3 & & | \\ & & | & & | \\ COOH — & & CH & — & CH_2 \end{array}$$

È noto che la somiglianza di proprietà esistente tra gli alcaloidi del gruppo tropanico e granatanico è di tal natura da non poter essere spiegata che con formole di costituzione dello stesso genere; queste analogie si sono ora accresciute ancor più pel fatto che in seguito ad esperienze che saranno

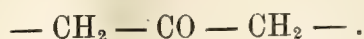
---

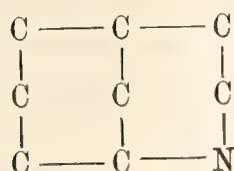
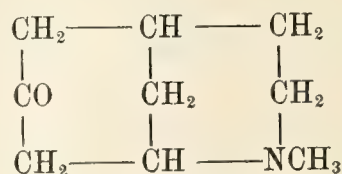
che si sapesse che le basi tropiniche contengono il nucleo pirrolidinico, ma diverse circostanze ci impedirono di pubblicare il risultato definitivo di queste ricerche. Lo facciamo ora anche perchè alla base in questione noi avevamo attribuito da principio una costituzione non bene definita, cioè solamente quella di un' ammina terziaria.

G. Ciamician.

[1] Berl. Ber. *30*, 731, 2679; *31*, 1534. 2498.

descritte in questa Nota, è ormai dimostrato che anche nella *metilgranatonina* esiste la catena caratteristica riscontrata nel tropinone

$$— CH_2 — CO — CH_2 — .$$

Lo schema proposto da Ciamician e Silber per rappresentare la costituzione delle basi del melagrano e la formola stessa da loro attribuita alla metilgranatonina, sono sufficienti a spiegare la reazione ora citata, come risulta dai simboli seguenti [1]:

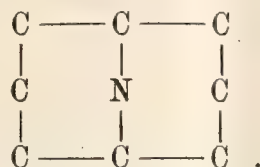
```
C ——— C ——— C          CH2 ——— CH ——— CH2
|     |     |          |       |      |
C     C     C          CO      CH2    CH2
|     |     |          |       |      |
C ——— C ——— N          CH2 ——— CH ——— NCH3
```

Schema delle basi del melagrano. — Metilgranatonina.

In seguito a questi fatti è divenuto però necessario il provare, in modo diretto e semplice, che quella parte della molecola della metilgranatonina che resiste all' ossidazione e trovasi intatta a formare il nucleo azotato dell' acido *metilgranatico* (*omotropinico*), è un nucleo piperidinico e non pirrolidinico.

A questo scopo, onde toglier di mezzo il metile unito all' azoto, che avrebbe posto un grave ostacolo alla trasformazione desiderata, si preparò l' acido *granatico*, ossidando la *granatolina* [2] con acido cromico. Avuto l' acido coll' immino libero, se ne operò la deidrogenazione riscaldandolo con acetato mercurico, secondo il metodo dato dal Tafel, e si ebbe così un acido piridico che per semplice riscaldamento con barite o calce diede la *α-metilpiridina* in quantità notevolissima.

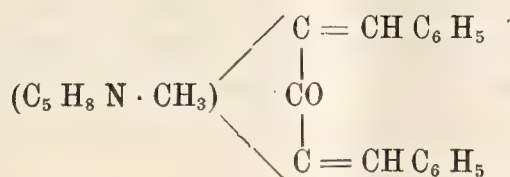
Risultati assai diversi si ottennero invece eseguendo la stessa operazione sull' acido nortropinico, il quale è il perfetto analogo del granatico. Ossidandolo col metodo di Tafel, non si potè trarne alcuna traccia di basi piridiche e si ebbe soltanto una notevole massa di prodotti resinosi di natura manifestamente pirrolica, perchè bolliti con acqua, comunicarono ai vapori di questa la proprietà di arrossare il fuscello d' abete intriso nell' acido cloridrico. Resta quindi dimostrato che gli alcaloidi granatanici debbono considerarsi come derivati piperidinici puri.

Le proprietà così somiglianti delle due serie di basi potrebbero però trovare una rappresentazione schematica più fedele, quando si ammettesse

[1] G. Ciamician e P. Silber. Gazz. Chim. *26*, II, 157; Berl. Ber. *29*, 481.
[2] G. Ciamician e P. Silber. Gazz. Chim. *24*, I, 116.

che il nucleo degli alcaloidi del melograno contenesse lo scheletro rappresentato dal simbolo seguente:

Questa modificazione non è, per dir vero, richiesta dai fatti attualmente noti, i quali possono essere completamente spiegati anche con la formola fino ad ora in uso e citata più sopra parlando della metilgranatonina, ma, se si tien conto delle analogie più volte citate, colle basi tropaniche, si vede che il cangiamento proposto deve corrispondere, con grandissima probabilità, al vero; perciò, allo scopo di decidere la questione, si sono già intraprese, in questo laboratorio, le opportune ricerche. La nuova formola lascierebbe intravedere una quantità di conseguenze interessantissime, tra cui l' esistenza di un anello di 8 atomi di carbonio che farebbe riscontro a quello di 7 già trovato dal Willstätter nella tropina e nei suoi derivati. Essa naturalmente starebbe, al pari dell' antica formola, in perfetto accordo anche colle esperienze crioscopiche eseguite da F. Garelli [1], giacchè le sue relazioni colla naftalina non sono essenzialmente cangiate.

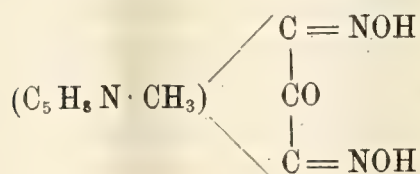
I.

Condensazione della benzaldeide colla metilgranatonina. Dibenzilidenmetilgranatonina.

Saturando con acido cloridrico gassoso una miscela di metilgranatonina (1 mol.) e benzaldeide (2 mol.) sciolte in acito acetico glaciale, si osserva dopo qualche ora la separazione di una massa gelatinosa gialla costituita dal cloridrato del prodotto di condensazione; per iscacciare l' acido acetico eccedente e la benzaldeide, si evapora tutta la massa a b. m. fino a siccità; si scioglie quindi il residuo in alcool e si scompone con la quantità necessaria di soda. Operando a caldo, si ha una soluzione alcoolica del nuovo

[1] Berl. Ber. *29*, 2972; Gazz. Chim. *27*, 384.

prodotto, la quale per concentrazione e raffreddamento deposita dei cristallini prismatici di color giallo chiaro, fondenti a 200°. All' analisi dà numeri corrispondenti alla formola soprascritta. Si scioglie in acido solforico con colorazione rosso ranciato.

Azione del nitrito d' amile sulla metilgranatonina.
Diisonitrosometilgranatonina.

$$(C_5H_8N \cdot CH_3)\begin{cases} C = NOH \\ \vert \\ CO \\ \vert \\ C = NOH \end{cases}$$

Si tratta una soluzione di metilgranatonina in alcool saturo di acido cloridrico, con la quantità calcolata di nitrito d' amile, a freddo. Nei primi istanti si ottiene un liquido limpido colorato in giallo bruno; ben tosto però questa colorazione sparisce, il liquido si intorbida e deposita una abbondante quantità di cristallini microscopici colorati in giallo chiaro. Se si completa la precipitazione aggiungendo dell'etere anidro, in cui il cloridrato del prodotto di condensazione è insolubile, si ottiene un rendimento corrispondente al teorico.

Questo sale si scioglie notevolmente nell' acqua bollente ed alquanto meno a freddo; si ha puro per cristallizzazione dall' alcool bollente diluito, da cui depositasi in prismetti giallicci che si scompongono tra 240°-250° con svolgimento di gas.

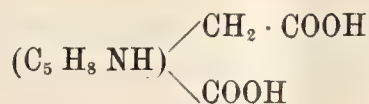
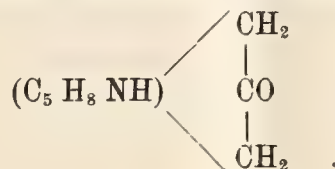
Il derivato diossimico libero ottiensi dal cloridrato, trattandone la soluzione acquosa colla quantità calcolata di acetato sodico. Il liquido imbrunisce e deposita dopo qualche tempo degli aghetti poco solubili nell' acqua a freddo, colorati in giallo vivo. Riscaldati su lamina di platino deflagrano vivamente.

II.

Ossidazione della granatolina con acido cromico. Acido granatico e granatonina.

L' ossidazione della granatolina con acido cromico si svolge più o meno completamente a seconda delle condizioni in cui la reazione si verifica. Il massimo effetto si riscontra impiegando un forte eccesso di ossidante e ri-

scaldando energicamente; per tal modo il prodotto principale è costituito dall' acido granatico:

$$(C_5H_8NH)\begin{matrix} \diagup CH_2 \cdot COOH \\ \diagdown COOH \end{matrix} \quad .$$

Se invece l' operazione si effettua con poco ossidante e lieve riscaldamento, si ottiene di preferenza il termine intermedio tra l' alcool e l' acido, cioè il chetone corrispondente alla metilgranatonina, la *granatonina*:

Quest' ultimo corpo non ha grande importanza relativamente allo scopo della presente ricerca; perciò mi limiterò a dire di esso che è una base fornita di caratteri simili a quelli della piperidina. Il suo cloroplatinato fonde a 240° con scomposizione e il carbonato a 128° circa. Come base secondaria dà un nitrosoderivato fondente a 199°. Anche essa contiene la catena caratteristica della metilgranatonina e del tropinone, e fornisce, per condensazione colla benzaldeide, un derivato *dibenzalico*.

L' *acido granatico* si prepara facendo bollire energicamente per due ore una miscela composta di 16 gr. di granatolina, 64 di anidride cromica, 88 di acido solforico e 1300 di acqua. Completata la reazione si toglie l' eccesso di acido cromico con anidride solforosa e si precipita il cromo con ammoniaca all' ebollizione. I filtrati si concentrano nel vuoto fino a siccità e si sottopone il residuo ben secco ad un' accurata estrazione con alcool assoluto ammoniacale. Si ha così la soluzione alcoolica del sale ammoniacale dell' acido granatico, che si trasforma nel sale baritico, eliminando l' alcool e facendo bollire il residuo, sempre sciropposo e bruno, con acqua di barite. Quando tutta l' ammoniaca è scacciata, si elimina l' eccesso di barite con anidride carbonica e si scompone con la quantità necessaria di acido solforico il sale baritico ottenuto. Il liquido filtrato deposita per conveniente concentrazione, l' acido granatico in cristallini incolori prismatici fondenti a 270° con rammollimento verso 265°.

Nelle acque madri si riscontra sempre una certa quantità di *granatonina.*

Deidrogenazione dell' acido granatico con acetato mercurico.

Si fa una miscela di 1 gr. di acido granatico con 20 gr. di acetato mercurico e si introduce in un tubo resistente con 10 cc. di acido acetico al 40 per cento. Si chiude il tubo e si riscalda a 150°-160° per 6 ore. Dopo

completo raffreddamento, aprendo il tubo si riscontra una lieve pressione e si trova nel liquido un notevole deposito di mercurio. Riprendendo con acqua la massa, trattando la soluzione con idrogeno solforato e filtrando, si elimina tutto il sale minerale; evaporando a b. m. fino a siccità il filtrato, si elimina l'acido acetico; così operando si ottiene finalmente un residuo cristallino deliquescente, che non fonde neppure a 250°, e che deve essere costituito in massima parte da un' acido piridico e in parte da acido granatico inalterato, perchè dà all' analisi dei numeri che si avvicinano soltanto approssimativamente a quelli richiesti dalla teoria per un acido piridin-carbon-acetico. Che questo acido sia realmente contenuto nel prodotto cristallino sopramenzionato non è da porsi menomamente in dubbio, giacchè mescolando tutta la massa ad un eccesso di barite caustica e distillando con precauzione in stortina di vetro, si ottiene un olio basico che ha tutte le proprietà dell' *α-metil-piridina*. Esso si scioglie per intero nell' acido cloridrico e dà con cloruro d' oro un cloroaurato in aghetti gialli fondenti a 186°-188°. Questo cloroaurato fornisce all' analisi i numeri seguenti.

In cento parti di sostanza:

	Trovato	Calcolato per $C_6 H_8 NAu Cl_4$
C. . .	16,46	16,86
H . .	2,28	1,85

Dal cloridrato si può pure ottenere con facilità un picrato cristallizzabile dall' acqua in lunghi aghi gialli fondenti a 165°-166°.

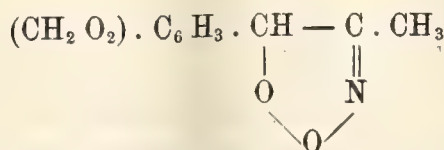
Il cloroaurato di α-metilpiridina fonde secondo Collie e Myers (Journ. of the Chem. Soc. *61*, 727) a 183°-184°; il picrato a 169°-171°, pure secondo gli stessi autori. Ladenburg e Lange trovarono per lo stesso picrato il punto di fusione 165° (¹).

Chimica. — *Sopra alcuni nitrocomposti non saturi*. Nota del dott. A. Angeli, presentata dal Socio G. Ciamician.

Qualche anno fa, partendo dal nitrosito dell' isosafrolo, io ho ottenuto un composto al quale, con grande probabilità spetta la struttura:

$$(CH_2 O_2) . C_6 H_3 . CH = C(NO_2) . CH_3 .$$

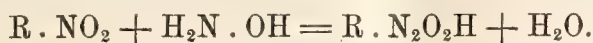
Altre formole quale per es.

```
(CH2 O2) . C6 H3 . CH — C . CH3
                    |    ||
                    O    N
                     \  /
                      O
```

(¹) Lieb. Ann. *247*, 7.

sono da escludersi giacchè la sostanza non è stabile al permanganato (Reazione di Baeyer).

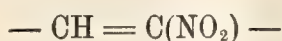
Il suo comportamento è del tutto somigliante a quello dei derivati analoghi che sono stati ottenuti per via sintetica da Priebs e da Erdmann. Per azione degli alcali, a caldo, dà piperonalio ed il liquido alcalino presenta la reazione del nitroetano.

Io ho sottoposto ad un nuovo studio questa sostanza, principalmente per vedere come essa si comportava rispetto all' idrossilammina. A suo tempo io ho fatto vedere che anche i veri nitroderivati, in modo analogo ai chetoni ed alle aldeidi, con l' idrossilammina reagiscono secondo l' eguaglianza:

$$R . NO_2 + H_2N . OH = R . N_2O_2H + H_2O.$$

Secondo la formula prima accennata, anche il composto da me preso in esame si dovrebbe riguardare come un vero nitroderivato, e perciò era da aspettarsi che dovesse reagire con l' idrossilammina. L' esperienza ha dato invece risultato negativo, ed in questa occasione ho potuto notare che il nitroderivato è in grado di fornire sali per conto proprio.

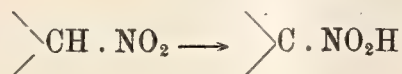
Versando infatti sopra il composto, che è fortemente colorato in *giallo* [1], una piccola quantità di alcool e quindi un po' di potassa, esso si scioglie facilmente in un liquido *incoloro*. Diluendo con molta acqua, nulla precipita ed il liquido si mantiene sempre privo di colore. Se ora si acidifica con qualche goccia di acido acetico, si ottiene un precipitato perfettamente bianco, che si colora intensamente in rosso per azione del cloruro ferrico; col tempo, però, il precipitato bianco assume un colore giallo sempre più marcato, col cloruro ferrico dà la colorazione rossa sempre meno intensa, e dopo qualche minuto si è trasformato nel composto giallo primitivo che fonde a 98° e che non si colora con cloruro ferrico.

Questo risultato interessante dimostra come, molto probabilmente, anche i nitroderivati della forma

$$— CH = C(NO_2) —$$

sono in grado di dare sali, precisamente come fanno i nitrocomposti contenenti l' aggruppamento:

$$\rangle CH . NO_2.$$

Riguardo a questi ultimi, Hantzsch ha stabilito che per azione degli alcali si trasformano nella forma:

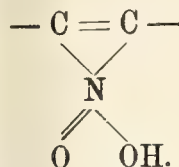
$$\rangle CH . NO_2 \longrightarrow \rangle C . NO_2H$$

dalla quale appunto derivano i sali.

[1] Tale colorazione probabilmente è dovuta alla prossimità del doppio legame al residuo nitrico.

Ora, nel caso da me studiato non si può ammettere lo stesso, giacchè il carbonio cui è unito il residuo nitrico non ha atomi d' idrogeno. Escludendo l' ipotesi, poco probabile, che si tratti soltanto di composti di addizione, è necessario ammettere che prenda parte alla trasformazione un idrogeno attaccato ad uno degli atomi di carbonio vicini, probabilmente secondo lo schema [1]:

$$\begin{array}{c} -CH = C- \\ \quad\;\; | \\ \quad\;\; NO_2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} -C = C- \\ \;\; | \qquad | \\ O - N(OH) \end{array}$$

Anche l' altra forma sarebbe da prendersi in considerazione:

$$\begin{array}{c} -C = C- \\ \diagdown \; \diagup \\ N \\ /\!\!/ \; \diagdown \\ O \quad OH. \end{array}$$

Comunico con tutto riserbo questa Nota preliminare, alla quale farò seguire in breve la descrizione dettagliata delle esperienze.

Cristallografia. — *Per l'anortite del Vesuvio.* Nota I di C. Viola, presentata dal Socio Blaserna.

Per determinare le costanti ottiche dell' anortite del Vesuvio ricevetti dal mio amico prof. E. Scacchi un cristallino ricco di faccie, trasparente e bene sviluppato.

Le dimensioni di questo cristallo sono:

4 mm. sull' asse *a*
5 » » *b*
2 » » *c*.

Le zone più sviluppate sono [010], [100], [101] e $[\bar{1}01]$.

Le 29 faccie da me osservate e già constatate da altri autori sull' anortite del Vesuvio, sono le seguenti:

$(001), (021), (010), (02\bar{1}), (00\bar{1}), (0\bar{2}\bar{1}), (0\bar{6}\bar{1}), (0\bar{1}0), (0\bar{2}1)$.
$(201), (100), (20\bar{1}), (10\bar{1}), (\bar{2}0\bar{1}), (\bar{1}00), (\bar{2}01), (\bar{1}01)$.
$(110), (\bar{1}10), (\bar{1}\bar{3}0), (\bar{1}\bar{1}0), (1\bar{1}0)$.
$(1\bar{1}\bar{1}), (\bar{1}11)$.
$(22\bar{1}), (11\bar{1}), (\bar{2}\bar{2}1), (\bar{1}\bar{1}1), (4\bar{2}\bar{3})$.

[1] Non ammettendo che prenda parte il gruppo metilico.

A queste faccie riferite da G. vom Rath, Marignac, Strüver ecc. (¹) devo aggiungere le tre faccie vicinali:

x' press' a poco nella zona $(00\bar{1}):(\bar{2}0\bar{1})$
l' » » $(00\bar{1}):(\bar{1}\bar{1}0)$.
e m' nella zona $(00\bar{1}):(\bar{1}\bar{1}0)$.

La figura annessa rappresenta fedelmente in projezione obbliqua il cristallo in questione, abbellito nelle faccie e negli spigoli, se lo si immagina orientato come propose Des Cloizeaux.

Benchè il cristallo sia nel suo sviluppo abbastanza uniforme, tuttavia mancano le inverse (061), (130), $(\bar{4}23)$ e quelle rispetto alle vicinali x', l', m'.

Wiik (²) propose di assegnare all' anortite la classe asimmetrica (S_{oo}). A queste idee si associarono Hintze (³) e Groth, e non mi sembra senza fondamento. Intanto l' apparizione delle faccie vicinali da un solo verso del cristallo in esame aggiunge molto valore alle considerazioni teoretiche e conclusioni di Wiik.

Per eliminare gli errori, che possono provenire eventualmente dalla diffrazione e rifrazione della luce, essendo alcune facciette molto sottili, feci

(¹) Gust. Rose, Gilb. Ann. 1823, 73, 197; Abich, Pogg. Ann. 1840, 50, 351; 51, 519; Lemberg, Zeitschr. d. d. geol. Gesell. 1883, 35, 605; A. Des Cloizeaux, *Manuel de Minéralogie*, Paris 1862, pag. 294-298; Hessenberg, Min. Not. 1856, 1, 6; Kokscharow, Mat. Min. Russl. 1862, 4, 207; G. Strüver, *Su una nuova legge di geminazione della Anortite.* Atti R. Accad. di Torino, 1868, IV, 38-42; 1871, VI, 358; G. vom Rath, *Mineralogische Mittheilungen,* Poggend. Ann., 1869, 138, 450; 1872, 147, 22.

(²) Wiik, Zeitschr. f. Krystall., 23, 379.

(³) C. Hintze, Handbuch der Mineralogie, II Bd., 1532.

l'osservazione delle immagini con due diversi angoli di incidenza del cannocchiale del goniometro. Del resto le immagini del segnale colorate sono da escludersi a priori dalle osservazioni.

Faccie piane o sufficientemente piane osservate nell'anortite sono:

(010), $(1\bar{1}0)$, $(0\bar{1}0)$, $(\bar{1}\bar{3}0)$, $(\bar{1}\bar{1}1)$, $(\bar{2}\bar{2}1)$, $(11\bar{1})$, $(22\bar{1})$, $(\bar{2}01)$, $(20\bar{1})$, $(1\bar{1}\bar{1})$, $(4\bar{2}\bar{3})$, $(0\bar{2}1)$, $(0\bar{6}\bar{1})$, $(0\bar{2}\bar{1})$, $(02\bar{1})$, e (201).

Le altre faccie sono incurvate, e danno per conseguenza parecchie immagini. Quelle molto incurvate sono: (110), $(\bar{1}\bar{1}0)$, $(\bar{1}10)$ e $(\bar{1}11)$. Eccone alcune misure [1]:

Zona $[1\bar{1}0]$			
faccie	peso	lettura	media e suo peso
110	½	180°.50'.00"	181°.03'.47" 11½
	½	180 59 30	
	9	181 03 30	
	½	181 06 30	
	½	181 11 30	
	½	181 16 30	
$\bar{1}\bar{1}0$	½	0 18 00	0 52 40 9
	½	0 29 00	
	1	0 38 30	
	1	0 46 00	
	2	0 52 00	
	2	1 01 30	
	2	1 09 30	

Zona $[001]$			
faccie	peso	lettura	media e suo peso
110	2	314°.58'.30"	315° 05'.26" 14
	1	315 02 30	
	8	315 05 00	
	1	315 07 30	
	1	315 12 00	
	1	315 17 00	
$\bar{1}\bar{1}0$	½	133 45 00	134 49 47 10½
	½	134 17 00	
	½	134 29 30	
	½	134 40 30	
	7	134 47 00	
	½	134 54 00	
	½	135 07 30	
	½	135 18 30	
	½	135 35 00	

Come si vede la curvatura delle faccie (110) e $(\bar{1}\bar{1}0)$ è doppia, cioè tanto nella zona $[1\bar{1}0]$ quanto nella zona $[001]$. Oltre a ciò accanto al polo medio $(\bar{1}\bar{1}0)$ si presenta il polo vicinale l', che è determinato dagli angoli

$$l' : (\bar{1}\bar{1}0) = 4^{\circ}.57'.54'' \text{ nella zona } [1\bar{1}0]$$
$$l' : (\bar{1}\bar{1}0) = 3\ \ 36\ \ 40 \quad » \quad [001].$$

[1] Per queste misure mi servii del goniometro a un asse verticale del dott. A. Sella, e per le misure degli indici di rifrazione mi servii dell'apparecchio del prof. Abbe di Jena appartenente all'istituto fisico di Roma. E tanto al prof. Blaserna, quanto al dott. Sella i miei più vivi ringraziamenti.

Il polo vicinale x' dista di appena 2-3 minuti dalla zona [010], e in questa si ha

$$x' : (\bar{2}0\bar{1}) = 4^\circ.34'.21'' \text{ verso il polo } (00\bar{1}).$$

Il polo vicinale m' si trova nella zona [$\bar{1}\bar{1}0$], ed è determinato dall'angolo:

$$m' : (\bar{1}\bar{1}1) = 3^\circ.36'.02'' \text{ verso il polo } (001).$$

Le zone molto utili per la determinazione degli angoli fondamentali del cristallo sono [001] e [010]. Nella prima si trovano le faccie (010), (0$\bar{1}$0), (110) e (1$\bar{1}$0). Le tre faccie (010), (0$\bar{1}$0) e (110) diedero delle immagini bene distinte con un peso d'osservazione relativamente grande; la faccia (110), benchè ricurva, diede tuttavia un piano medio soddisfacente.

Nell'altra zona utilizzabile si dispone di sole due faccie buone, cioè (001) e ($\bar{2}$01); la terza faccia necessaria per il calcolo viene individuata dalla prima zona.

Gli angoli misurati sono:

$$\begin{aligned}(010) : (110) &= 57^\circ.54'.11''\\ (0\bar{1}0) : (1\bar{1}0) &= 62\ \ 38\ \ 58\end{aligned}$$

e quindi

$$(110) : (1\bar{1}0) = 59\ \ 26\ \ 51$$

Di più

$$\begin{aligned}(001) : (010) &= 85^\circ.52'.55'' \begin{pmatrix}85^\circ.56'.30'' & \text{Strüver}\\ 85\ \ 50 & \text{Des Cloiz.}\end{pmatrix}\\ (001) : (110) &= 65\ \ 44\ \ 33\\ (001) : (\bar{2}01) &= 81\ \ 13\ \ 14 \ \begin{pmatrix}81\ \ 13 & \text{Strüver}\\ 81\ \ 14 & \text{Des Cloiz.}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nella zona [001] le due faccie (110) e (1$\bar{1}$0) separano armonicamente le altre due faccie (010) e (100); e con ciò è fissata la posizione della faccia possibile (100). Vale a dire:

$$\text{cotg}\,(010)\hat{}(100) = \tfrac{1}{2}\,\text{cotg}\,(010)\hat{}(110) + \tfrac{1}{2}\,\text{cotg}\,(010)\hat{}(1\bar{1}0)$$

e quindi

$$(010) : (100) = 86^\circ.51'.10''.$$

Inoltre si calcola:

$$\begin{aligned}\alpha &= \ \ 93^\circ.02'.25''\ (\ 93^\circ.13'.22''\ \text{Marignac})\ [1]\\ \beta &= 116\ \ 10\ \ 04\ \ (115\ \ 55\ \ 30\ \ \text{id.}\ )\\ \gamma &= \ \ 91\ \ 28\ \ 45\ \ (\ 91\ \ 11\ \ 40\ \ \text{id.}\ ).\end{aligned}$$

(1) C. Hintze, op. cit. 1532.

Di più si ha:

$$A = 94^\circ.07'.05''$$
$$B = 116\ \ 18\ \ 16$$
$$C = 93\ \ 08\ \ 50.$$

Con questi angoli fondamentali furono indi calcolati i seguenti valori:

	calcolato	misurato	
$(\bar{2}01) : (110) =$	$134^\circ.31'.53''$	$134^\circ.36'.11''$ misurato	
$(001) : (1\bar{1}0) =$	69 02 30	69 08 14	
$(001) : (021) =$	42 28 08	42 39 17	$42^\circ.39'.00''$ Des Cloiz 42 41 25 Strüver
$(\bar{2}01) : (021) =$	84 31 38.		

Gli altri angoli misurati sono:

$(001) : (201) =$	$41^\circ.23'.35''$	$(010) : (021) =$	$43^\circ.13'.38''$
$(001) : (\bar{2}01) =$	81 13 14	$(021) : (001) =$	42 39 17
$(\bar{2}01) : (\bar{2}0\bar{1}) =$	51 23 11	$(001) : (0\bar{2}1) =$	46 43 02
$(00\bar{1}) : (10\bar{1}) =$	51 28 16	$(0\bar{1}0) : (0\bar{6}\bar{1}) =$	18 14 49
$(001) : (110) =$	65 44 33	$(1\bar{1}0) : (11\bar{1}) =$	56 34 30
$(110) : (010) =$	57 54 11	$(1\bar{1}\bar{1}) : (00\bar{1}) =$	54 17 16
$(110) : (1\bar{1}0) =$	59 26 51		
$(0\bar{1}0) : (\bar{1}\bar{3}0) =$	29 27 17	$(110) : (20\bar{1}) =$	45 23 49
$(110) : (22\bar{1}) =$	29 19 40	$(20\bar{1}) : (4\bar{2}\bar{3}) =$	23 42 55
$(22\bar{1}) : (11\bar{1}) =$	27 00 28	$(1\bar{1}\bar{1}) : (0\bar{2}\bar{1}) =$	44 05 12
$(11\bar{1}) : (00\bar{1}) =$	57 55 25	$(0\bar{2}\bar{1}) : (1\bar{1}0) =$	50 18 25

Geologia. — *Osservazioni geologiche sopra i terreni secondarî del gruppo del M. Judica in Sicilia.* Nota del prof. OLINTO MARINELLI, presentata dal Corrispondente DE STEFANI.

Negli anni 1896 e 1897 ebbi opportunità di compiere alcune escursioni geologiche nella interessante e poco nota regione che si stende fra il Dittaino e la Gornalunga (prov. di Catania) e culmina col M. Judica (m. 764).

La regione in parola, per quanto mi è noto, è stata studiata geologicamente in modo dettagliato soltanto dal Gemmellaro, più di 40 anni or sono (vedi: G. G. Gemmellaro, *Cenno geognostico sul gruppo dei terreni di Judica.* Giornale del Gabinetto letterario dell'Accademia Gioenia. Nuova serie, vol. V, fasc. II, marzo-aprile 1859, pag. 90-93. — *Sopra taluni organici fossili*

del Turoniano e Nummulitico di Judica. Atti d. Acc. Gioenia, serie 2ª, vol. XV. Catania, 1860, pag. 269 e seg.) e negli anni 1878-79 dai rilevatori dell' Ufficio Geologico (vedi: Ufficio Geologico, *Carta geologica della Sicilia. Foglio al 100000 « Paternò »*, rilevato dagli ingegneri Mazzetti e Travaglia. Roma, 1885. — Baldacci L., *Descrizione geologica dell' isola di Sicilia.* Memorie descrittive della Carta geologica d' Italia. Roma 1886). La carta geologica dell' Ufficio Geologico e la descrizione del gruppo del M. Judica pubblicata dal Baldacci (pag. 293 dell'op. cit.) sono incomplete e fatte senza tener conto dei precedenti studî del Gemmellaro. Perciò le mie osservazioni riguardano una regione, che meriterebbe di essere ulteriormente studiata da persona che potesse disporre di mezzi e di tempo superiori a quelli di chi, come me, non era in grado, per ragioni d' ufficio, di lasciare Catania, se non nei giorni festivi ed era quindi obbligato ad escursioni soverchiamente rapide.

Prima d' ora non credetti conveniente di dare notizia, nemmeno sommaria, dei risultati di tali escursioni per attendere che fosse convenientemente studiato il più importante materiale paleontologico da me raccolto. Ora tale studio è stato eseguito, nel Gabinetto geologico dell' Istituto Superiore di Firenze, per opera del dott. Bindo Nelli, che presentò già una nota preliminare riguardante i fossili raibliani da me trovati (¹).

Le osservazioni che qui riferisco riguardano principalmente i terreni secondarî, che sono più che gli altri interessanti nella regione.

I terreni secondarî affiorano da quelli terziarî specialmente lungo tre zone quasi parallele, le quali orograficamente si distinguono perchè in generale sono più elevate delle regioni circostanti e perchè presentano speciale *facies* morfologica. Di queste tre zone, dirette presso a poco da est ad ovest, e quindi succedentesi da nord a sud, la centrale è molto più importante ed estesa delle altre e comprende il M. Judica (m. 764), la cima più elevata della regione, oltre ad altri minori rilievi, fra cui gli estremi sono la Rocca Armana (m. 450) ad oriente ed il M. Turcisi (m. 303) ad occidente. La zona settentrionale comprende il caratteriscico rilievo del M. Scalpello (m. 583) e quella meridionale, la meno considerevole, alcune alture senza nome specifico, che si innalzano, specialmente presso C. Cammaneure e C. Juppesi, fino a 341 m.

Calcari selciferi. — L' ossatura dei più importanti rilievi della regione è ovunque formata da *calcari* bianchi o bruni (in generale compatti, ma talora anche brecciati), abbastanza bene stratificati, ricchi di *liste* e *noduli* di *selce* scura. Al M. Scalpello, tanto negli strati superiori di questo calcare (versante

(¹) Bindo Nelli, *Il Raibliano del M. Judica nella provincia di Catania.* Rend. d. Acc. d. Lincei, vol. VIII, 1° sem., serie 5ª, fasc. 2°, 1899.

settentrionale) quanto in quelli inferiori (versante meridionale), rinvenni numerose impronte di *Halobia sicula* Gemm. e *H. lucana* De Lorenzo. L'esame microscopico poi di sottili lamine delle selci comprese nei calcari, mostra come queste ultime sieno formate in gran parte di gusci di *radiolarie.*

I calcari selciferi ad *Halobie* ora indicati, sia litologicamente che paleontologicamente, corrispondono nel modo più perfetto a quelli tanto sviluppati nella Sicilia occidentale e magistralmente studiati dal Gemmellaro [1].

Questi calcari non si possono seguire in modo continuo, nè nel rilievo del M. Scalpello, nè in quelli delle altre due zone accennate, ma sembrano disposti, nelle formazioni clastiche equivalenti, a guisa di *lenti*, talora gigantesche, altre volte di proporzioni più modeste. Perciò la prosecuzione di alcune zone calcaree abbastanza estese (che formano i rilievi più considerevoli), è talora segnata soltanto da isolati spuntoni o scogli di forma abbastanza singolare.

Marne argillose con straterelli di calcite fibrosa. — Nella parte orientale del M. Scalpello, i calcari selciferi accennati vanno man meno assottigliandosi finchè vengono sostituiti da marne argilloso-arenacee, caratterizzate specialmente da *straterelli di calcite fibrosa.* Questi presentano speciale struttura ed aspetto, risultando da numerosi romboedri allungati justaposti, formati da calcite fibrosa cristallizzata radialmente che si potrebbero prendere per *aragonite*, mentre i caratteri ottici, cristallografici ed il peso specifico attestano trattarsi di *calcite.* Gli straterelli che ne risultano presentano in generale una faccia come bitorzoluta, l'altra spianata ed improntata da numerose *Halobie,* spettanti alle due specie dei calcari selciferi (*H. sicula* e *lucana*).

Argille arenacee con brecciole fossilifere. — Accanto alla formazione con straterelli *calcitici* ora accennata, abbiamo intorno al M. Scalpello (specialmente alla estremità), come pure nella zona del M. Judica, ed in quella più meridionale, delle marne, delle argille arenacee ed arenarie, che sono tanto maggiormente sviluppate quanto minore è localmente la potenza dei calcari selciferi che esse sostituiscono.

In questa formazione, specialmente nella zona del M. Scalpello, sono frequenti delle brecciole assai fossilifere. In una località posta ad occidente del M. Scalpello io raccolsi le seguenti forme:

Avicula gea d'Orb.
Cassianella griphaeata Münst.
" *decussata* Münst.
Posidonomya sp. ind.
Leda Biondii Gemm. sp. = *Leda percaudata* Gümbel.
Myophoria vestita Alberti.
" *Goldfussi* Alberti.

[1] *Il Trias nella regione occidentale della Sicilia.* Atti d. Acc. d. Lincei, 1882.

Trigonodus judicensis Nell.
Lucina gornensis Parona.
Coenothynis siculus Nell.
" *Calcarae* Nell.
" *Gemmellaroi* Nell.

In analoghe brecciole a sud-est dello stesso M. Scalpello raccolsi poi:

Trachyceras plicatum Calc. sp. = *Tr. affine* Parona.
Trachyceras ferefurcatum Nell.

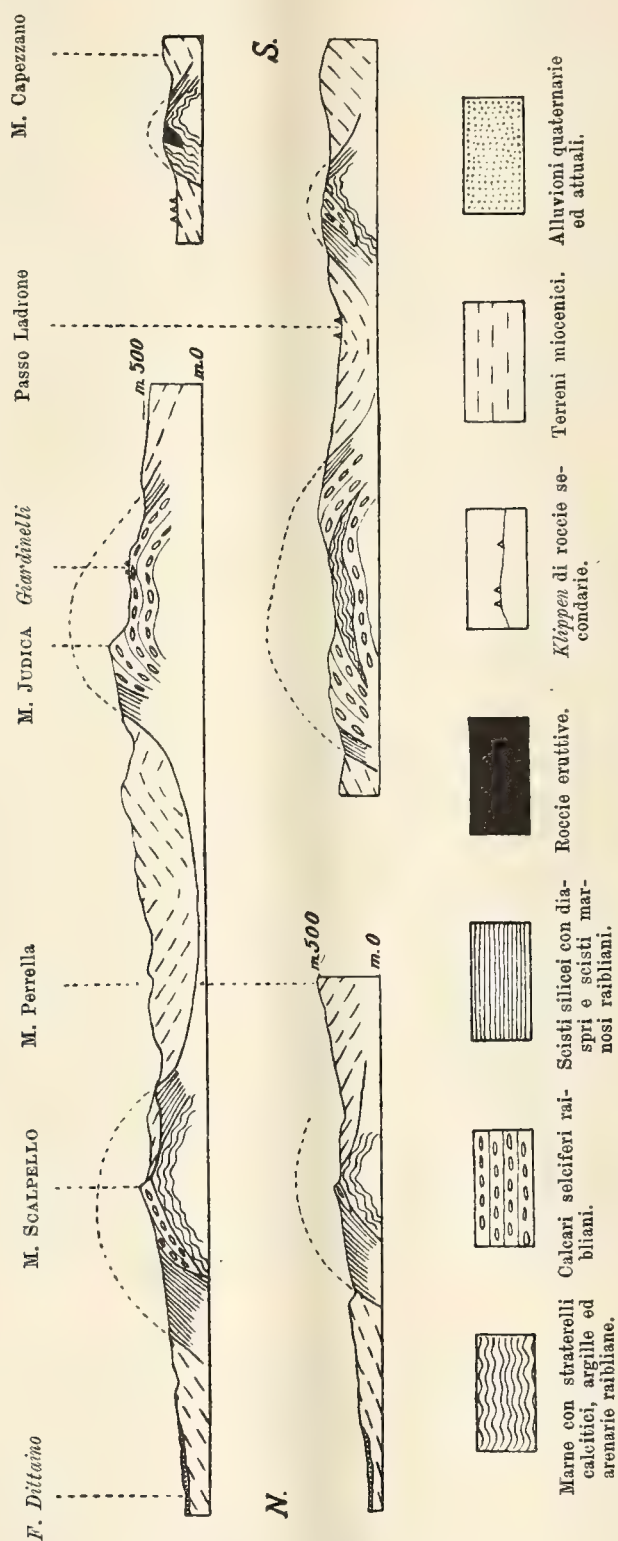
Questa fauna è evidentemente *raibliana*, e dati i rapporti stratigrafici esistenti fra gli strati in cui essa si trova e quelli ad *Halobie* prima indicati, anche quelli si devono ritenere spettanti alla stessa età. Fatto che mi sembra specialmente importante per quanto riguarda i calcari selciferi, poichè, data la loro perfetta corrispondenza con quelli del resto della Sicilia, la conclusione ora esposta non ha valore locale, ma generale per tutta l' isola. Nè credo che le deduzioni tratte dalle nuove mie osservazioni, possano per nulla essere infirmate dalle considerazioni del De Lorenzo (1), che basandosi su paragoni istituiti col Trias della Basilicata, riteneva le formazioni ad *Halobie* della Sicilia *ladiniche*, e non già *raibliane*, come era stato ammesso precedentemente dal Gemmellaro (2) e sostenuto poi dal Mojsisovics (3).

Scisti silicei e diaspri. — Accanto alle formazioni finora indicate si trovano pure molto sviluppati, specialmente nei versanti settentrionali del M. Judica, M. Scalpello e M. Turcisi, degli *scisti silicei*, che sembrano in generale occupare una posizione stratigrafica un po' superiore a quella dei calcari selciferi, per quanto talora alternino con essi e ne sostituiscano la parte più elevata. Questi scisti si osservano poi quasi esclusivamente alle falde dei monti calcarei accennati, essendo stati evidentemente asportati dall' erosione nelle parti più elevate. Essi poi nel diverso loro aspetto ricordano perfettamente quelli sviluppati nei dintorni di Palermo (Gibilrossa, ecc.), che vengono, a quanto credo impropriamente, attribuiti al Lias. Gli *scisti silicei* sono accompagnati da *diaspri varicolori* e da selci che, talora minutamente

(1) G. De Lorenzo, *Bemerkungen über die Trias des südlichen Italien* Verhandl. k. k. Geol. Reichsanstalt. 1895. — Böse und De Lorenzo, *Geologische Beobachtungen in den südlichen Basilicata und nordwestlichen Calabrien.* Jahrb. d. k. k. geol. Reichsanstalt. 1896.

(2) *Sul Trias della regione occidentale della Sicilia.* Atti d. Acc. dei Lincei, 1882,

(3) Mojsisovics, Waagen und Diener, *Entwurf einer Gliederung der pelagischen Sedimente des Trias-Systems.* Sitz.-Ber. d. k. Ak. d. Wiss. Wien. 1895. — Mojsisovics, *Zur Alterbestimmung der sicilischen und süditalienischen Halobienkalke.* Verh. d. k. k. geol. Reichsanstalt. Wien, 1896.

fratturate e rimpastate, costituiscono dei veri conglomerati a cemento siliceo.

Profili geologici attraverso il gruppo del M. Judica.

Scala: 1 : 75000.

Fra altro è notevole una *breccia silicea verde* compattissima. Rinvenni anche

delle selci con struttura minutamente *oolitica* e traccie di *radiolarie.* Queste ultime non mancano nemmeno nelle altre roccie silicee indicate.

Scisti marnosi con fucoidi. — Gli scisti silicei alternano o sono sostituiti localmente da scisti marnosi bianchi o rosso-vinaccia, nei quali si notano impronte di *fucoidi.*

Le due formazioni ultimamente indicate, pure non presentando fossili di valore cronologico, vengono da me considerate, per la loro condizione stratigrafica, triasiche e coeve od appena superiori agli strati raibliani prima esaminati. Aggiungo, come, avendo fatte alcune osservazioni geologiche nei dintorni di Palermo, ne abbia ricavata la convinzione che i caratteristici scisti silicei di Gibilrossa, litologicamente eguali a quelli del M. Judica, devano ritenersi pure equivalenti ai calcari ad *Halobie* e perciò raibliani. Credo anzi che alla stessa conclusione si giungerebbe studiando la posizione di molti degli scisti analoghi, sviluppati altrove in Sicilia e generalmente ritenuti liasici, venendo in tal modo a stabilire una nuova analogia fra il Trias siciliano e quello della Basilicata, studiato dal De Lorenzo.

Roccie eruttive. — Nella più meridionale delle tre zone triasiche della regione del M. Judica, compaiono fra le formazioni marnose e scistose raibliane, delle *roccie eruttive nere*, disposte, a quanto mi sembrò, a guisa di tre filoni isolati, susseguentesi secondo un unico allineamento. Queste roccie a giudicare dall' aspetto esterno si possono ritenere dei *basalti.* Un esame microscopico eseguito dal dott. Pampaloni mostra che sono roccie non lontane dalle Limburgiti e dalla Monchiquite. Queste roccie sono probabilmente triasiche, ma non posso escludere si tratti di intrusioni più recenti, ed in tal caso probabilmente terziarie. Anche qui si ripetono quindi i dubbî che si hanno a proposito dei *Lamprofiri* della Punta delle Pietre Nere (Gargano) [1], dove è pure sviluppato del tipico *Raibliano.*

Conclusioni sul Trias del M. Judica. — Mi sembra che dalle osservazioni via via riferite si possa concludere che i terreni, così diversi per *facies* litologica e paleontologica, da me successivamente passati in rassegna, non hanno fra di loro rapporto di successione, ma *formano un tutto geologicamente unico*, come è indicato dalle locali condizioni stratigrafiche, nonchè dalle non rare transizioni litologiche. Queste transizioni anzi impediscono spesso di fissare chiaramente i limiti fra un terreno geognostico e l' altro. Tuttavia, pure trattandosi di un complesso di terreni che, quantunque di aspetto così diverso, spettano tutti alla stessa età, cioè al *raibliano*, si può notare come in generale gli *scisti silicei* siano specialmente sviluppati, *superiormente* ai calcari selciferi ed alle argille e marne arenacee altrove indicate.

[1] Di Stefano, *Lo scisto marnoso con « Myophoria vestita » della Punta delle Pietre Nere in provincia di Foggia.* Boll. d. R. Com. Geol. 1895.

Dei terreni da me osservati nel gruppo del M. Judica trovano sicuro riscontro nel resto della Sicilia, i *calcari selciferi* ad *Halobie* e gli *scisti silicei*, ma ritengo non improbabile che formazioni marnose ed argillose analoghe a quelle descritte, si trovino pure altrove nell' Isola, ma sieno state trascurate o confuse con formazioni terziarie. Questo dubbio deriva specialmente dal fatto che alcune delle roccie triasiche da me indicate, hanno somiglianza con quelle terziarie circostanti, per cui spesso è facile una confusione, che mi sembra non sia stata evitata dai rilevatori dell' Ufficio Geologico. Sarebbe poi opportuno fare delle diligenti ricerche per vedere se per caso alcune delle roccie di tipo basaltico, diffuse nella Sicilia occidentale, fossero triasiche e corrispondessero a quelle da me osservate nel gruppo del M. Judica.

Formazioni secondarie postriasiche. Klippen. — La serie dei terreni secondarî sicuramente in posto, cessa con le formazioni ora indicate tutte raibliane, poichè non compaiono, per quanto risulta dalle mie osservazioni, la Dolomia Principale, nè terreni del Lias, del Giura o della Creta.

Roccie spettanti a questi ultimi periodi si trovano però nella regione, ma rappresentate unicamente da massi o scogli isolati, perfettamente analoghi ai *Klippen*, dai Carpazi, e di certi luoghi a settentrione delle Alpi. Come quelli sono di dimensioni svariatissime, ma per lo più relativamente piccole; sono costituiti sempre da calcari per lo più corallini o subcorallini, spesso ricchissimi di fossili, si presentano talora in serie allineate, altra volta in gruppi *di roccia analoga*. Credo che la maggior parte e forse tutti i *Klippen* della regione da me percorsa, i quali sono specialmente frequenti nella zona miocenica che si stende a sud del M. Judica, non abbiano connessione con le roccie del sottosuolo, ma sieno solo grandi blocchi circondati anche inferiormente dalle marne ed argille terziarie, tanto è vero che parecchi degli scogli sono stati completamente distrutti da lavori di cava. Questi *Klippen* differiscono poi dagli *spunzoni* triasici altrove indicati, perchè non connessi tetonicamente fra loro, e isolati in mezzo ai terreni terziarî anzichè in quelli secondarî. Riguardo alla origine dei *Klippen* accennati, non mi son formato un concetto preciso, nè saprei quale delle numerose teorie sostenute relativamente ai *Klippen* carpatici, maggiormente possa addattarsi alla regione studiata. Qui avverto soltanto come i *Klippen* analoghi a quelli del gruppo del M. Judica sieno diffusi in gran parte della Sicilia e ne abbia osservato io stesso, nel centro dell' Isola verso Xirbi e in più posti nella provincia di Girgenti. Credo anzi che soltanto quando si sieno studiati comparativamente nella loro natura e distribuzione geografica i *Klippen* della Sicilia, si potrà tentare di formulare qualche idea sulla loro origine. Qui mi limito ad indicare il carattere geologico dei più importanti fra i *Klippen* osservati nel gruppo del M. Judica.

Molto interessante è uno scoglio di *calcare corallino* che si trova presso C. Franchetti, poichè raccolsi in esso una fauna *titonica* abbastanza ricca, che venne studiata dal dott. Nelli, e comprende:

Chaetetes sp.
Moultivaulthia sp.
Stylina sp.
Sphaeractinia sp.
Diadema sp.
Pecten hinnitiformis Gemm.
" *acrorysus* Gemm.
" *subvitreus* Gemm.
" *arotoplicus* Gemm.
Ostrea pseudomultiformis Nell.
Anomia trasversestriata Nell.
Cardita sp.
Itieria Staszycii, Zeuchn.
Ptygmatis Stefanii Nell.
Nerinea sicula Gemm.
" *bicostata* Gemm.
Cerithium Pantanellii Nell.
Pileolus intercostatus Nell.
Phylloceras sp.

Alcuni *Klippen* abbastanza notevoli, che si trovano presso Passo Ladrone, sono costituiti da un calcare ricco specialmente di *orbitoidi*, *radioli d' echino* ecc., che giudico cretaceo.

Della stessa età sono pure alcuni blocchi di calcare scuro, ricco di forme di camacee caratteristiche della creta siciliana.

Altri *Klippen* non mi offrirono dati paleontologici sufficienti per stabilirne l'età.

Eocene. — Poche parole credo conveniente dire sopra i terreni terziarî, che pure sono molto estesi nella regione del M. Judica, tanto più che, nella loro tectonica, sono indipendenti del tutto da quelli secondarî. I terreni eocenici poi affiorano isolatamente in mezzo alle argille mioceniche, senza che sia chiaro nemmeno il loro rapporto con queste ultime. Perciò mi limito a ricordare come gli affioramenti eocenici più importanti sieno: quello di Mandrabianca, dove si osservano sviluppati specialmente dei calcari con brecciole nummulitiche, e quello della regione S. Lucia, dove compaiono delle argille con brecciole contenenti molte specie di *orbitoidi*. (*O. dispensa* Gümbel, *stella* Gümbel, *papyracea* Boub.), accanto a qualche *nummulite*, radioli di *cidaris*, *coralli*, *lithothamnium* ecc.

Miocene. — Le formazioni secondarie e quelle eoceniche sono ovunque circondate da argille, con zone o semplici lenti di arenaria, spettanti certamente al miocene. Esse si trovano discordanti, su tutti i terreni più antichi. Non mi sembra qui il luogo di parlare di questa formazione, ben più estesa nelle regioni contermini, che non in quella da me esaminata, la quale viene generalmente attribuita al *Tortoniano*, tanto più che ben poco potrei aggiungere a quanto è noto per il resto della Sicilia.

Quaternario ed *Attuale.* — Analogamente mi limito unicamente ad accennare all'esistenza, nelle regioni più basse del gruppo del M. Judica, di terreni continentali, rappresentati da conglomerati sciolti quaternarî e da alluvioni sabbiose recenti sviluppate lungo i margini dei corsi d' acqua.

Tectonica. — Chiudo invece questo scritto con due parole sulla tectonica dei terreni triasici. Avverto anzitutto come non sia punto agevole fissare l'andamento di quei terreni, date le loro speciali condizioni, altrove indicate. Infatti non abbiamo che raramente zone della stessa roccia che si possono seguire per lungo tratto, ma continue sostituzioni di un terreno all' altro.

Però mi sembra, che, se non ho interpretata malamente la tectonica della regione, ciascuna delle tre zone triasiche più volte ricordate, risponda ad un *anticlinale.*

Di questi il più importante, è il centrale (del M. Judica), che si presenta però alquanto irregolare.

Il settentrionale (di M. Scalpello) e quello meridionale, non si mostrano completamente, perchè sembra che gran parte di una delle loro gambe, sia stata erosa precedentemente alla deposizione dei terreni miocenici, i quali la mascherano più o meno completamente.

I profili annessi, diretti tutti presso a poco da nord a sud, cioè normalmente alla direzione degli anticlinali, risparmiano qualsiasi ulteriore dilucidazione.

Trovo poi inutile ripetere come per me riescano ancora inesplicabili la presenza dei *Klippen* ed i rapporti fra i terreni eocenici e quelli miocenici. Aggiungo solo come non abbia indicato negli annessi profili alcuni piccoli *rovesciamenti*, che sono frequenti negli scisti silicei esternamente agli anticlinali, vicino al contatto con i calcari selciferi, perchè sono di carattere puramente locale e non hanno valore alcuno per la tectonica generale della regione.

Fisiologia. — *Sulla natura e sulla azione fisiologica del veleno dello Spelerpes fuscus.* Nota del dott. A. Benedicenti e di Oreste Polledro [1], presentata dal Socio Mosso.

Al genere *Spelerpes* (Geotriton, Pseudotriton) appartengono diverse specie. Knauer [2] ne cita cinque, fra le quali lo *Spelerpes fuscus* noto anche coi sinonimi di *Geotriton fuscus* (Bonaparte), *Geotriton Genei* (Tschudi) e *Salamandra Genei* (Schleg). Questa specie è propria dell' Italia centrale e della Sardegna; abita di preferenza i luoghi elevati ed è abbastanza comune nelle colline di Firenze donde provengono gli esemplari che noi abbiamo studiato.

Lo *Spelerpes fuscus* è un tritone lungo da 7 a 11 cm.; ha il muso tronco e piatto, gli occhi sporgenti, la coda rotonda; la pelle è di un colore giallo-bruno variegato con punteggiature, e va sfumando leggermente verso il grigio chiaro sul ventre.

Le glandole velenose nello *Spelerpes* sono distribuite come nella *Salamandra* comune [3]. Poche si trovano nella regione posteriore della testa e sul dorso; numerosissime e ricche di veleno sono sulla faccia dorsale della coda.

Per provocare la secrezione di queste glandole si possono usare diversi metodi. Jourdan [4] otteneva abbondante secreto nella *Salamandra* con iniezioni di muscarina, e Kobert [5] con iniezioni di cloruro di Bario. Capparelli [6] si servì con vantaggio della corrente indotta cha noi pure abbiamo adoperato servendoci di due elementi Leclanchè e della slitta Du-Bois Reymond, distanza dei rocchetti 4-5 cm.

Eccitando l' animale, la pelle si ricopre presto di uno strato notevole di veleno di aspetto bianco, lattiginoso, denso come la panna e simile perciò al veleno del tritone crestato. Come questo, lasciato a sè si rapprende in una massa appiccicaticcia indi essiccandosi diviene trasparente, duro, omogeneo, d' aspetto vitreo, fragile e fendentesi all' aria spontaneamente. L' odore del veleno è viroso e irrita fortemente la mucosa. Il liquido venefico è inoltre dotato di reazione spiccatamente acida. È solubile nell' acqua cui imparte un aspetto opalescente è poco solubile nell' alcool a freddo. La soluzione ac-

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio fisiologico della R. Università di Torino.

(2) Knauer, Naturgeschichte der Lurche, pag. 114.

(3) Lewin, Toxicologie, pag. 414.

(4) Jourdan, Z. Kenntniss. pharm. Gruppe Muscarin.

(5) Kobert, Intoxicationen, pag. 750.

(6) Capparelli, Arch. Italien. Biologie, vol. IV, 1883.

quosa preparata di recente dà un precipitato fioccoso abbondante col tannino, e coll' acido picrico un lieve precipitato di colore giallognolo. Precipita pure, ma assai debolmente col reattivo di Meyer, col reattivo di Marmè, col ioduro di potassio iodurato, col cloruro di platino, col fosfomolibdato sodico.

Abbiamo sottoposto la pelle di venti *Spelerpes* al metodo Stas-Otto per l' estrazione degli alcaloidi triturandola finamente acidificando con acido tartarico e trattando poscia la massa con alcool, in apparecchio a ricadere per 48 ore senza che la temperatura superasse i 75 gradi centigradi.

L' alcool filtrato a freddo, venne distillato a bagno maria sotto pressione ridotta, ad una temperatura inferiore ai 50 gradi. Il residuo acido ottenuto fu estratto con quattro volte il suo volume di etere solforico puro, ridistillato. Dalla evaporazione dell' etere si ottenne un residuo liquido di colore bruno, di odore assai penetrante, che si intorbidava leggermente coi principali reattivi degli alcaloidi. Questo liquido acido non si poteva fissare con una base alcalina come la soda.

Sciogliemmo questo residuo acido del peso di circa $^1/_2$ gr. in 5 cm^3 di acqua distillata e iniettammo 1 cm^3 della soluzione sotto la cute di due passeri. Questi animali presentarono viva agitazione; poco dopo l' iniezione incominciarono a saltellare nella gabbia senza posa, facevano pigolii lamentevoli, avevano respiro frequente e notevole iperestesia. Non presentarono imponenti fenomeni convulsivi, ma al periodo di eccitamento subentrò più tardi uno stato di sonnolenza, interrotta da leggere scosse durante le quali gli uccelli rimasero cogli occhi socchiusi, le ali penzolanti, le piume arruffate. Si trovarono morti nelle loro gabbie al giorno seguente. Alcune gocce del residuo acido vennero pure instillate nell' occhio di un coniglio e si ebbe irritazione della congiuntiva, lagrimazione, leggiera fotofobia.

Il liquido ehe aveva servito all' estrazione acida venne poscia alcalinizzato con carbonato di sodio ed estratto quattro volte con etere. L' etere filtrato, essiccato con cloruro di calcio, evaporato, lasciò un residuo brunastro solubile in acqua. Questa soluzione precipitava coll' acido picrico, col tannino, col ioduro di potassio iodurato, col reattivo di Marmè e di Meyer, ma non aveva proprietà venefiche.

Il veleno dello *Spelerpes* è adunque una sostanza di natura acida simile probabilmente al veleno del *Triton cristatus* studiato da Capparelli. Parecchi veleni di anfibi hanno reazione acida. Calmels [1] attribuì l'acidità del veleno dei rospi all' acido isocianacetico: $CH^2.(NC).COOH$. Nel veleno dei tritoni pensò che esistesse l' acido α-isocianpropionico: $CH^3.CH(NC)COOH$ e un derivato di questi acidi cioè l' isocianetile C^2H^5NC. Nel veleno della *Salamandra* maculata si troverebbe l' isocianamile: $C^5H^{11}NC$. I farmacologi tedeschi negano però a questi derivati cianici una grande tossicità. Anche

[1] Calmels, Compt. rend., vol. 98, pag. 536.

Coppola [1], studiando l'etere etilico dell'acido isocianico e Pohl [2] studiando l'acido cianacetico, vennero alle stesse conclusioni. Noi abbiamo voluto studiare l'azione fisiologica dell'etere cianacetico: $CN.CH^2.CO.OC^2H^5$ di confronto all'azione fisiologica del veleno dello *Spelerpes* per vedere se avessero fra loro qualche punto di contatto.

Abbiamo veduto che nelle rane alla dose di gr. 0.1 sottocutaneamente l'etere cianacetico produce abolizione dei movimenti volontari indi dei riflessi e dei movimenti ioidei in tre o quattro minuti. Le pulsazioni cardiache vanno poco alla volta diminuendo e il cuore si arresta in diastole. Nei conigli alla dose di 0,6 per chilo non è mortale, ma produce un notevole aumento nella frequenza del respiro e stato di agitazione; alla dose di gr. 1,5 per chilo vi ha acceleramento, indi notevole rallentamento nel respiro; si nota una forte risoluzione muscolare, accompagnata da contrazioni fibrillari dei muscoli della faccia e degli arti. Subentra quindi paralisi dei movimenti volontari e riflessi, rallentamento dei battiti cardiaci e infine morte senza convulsioni. Questo quadro finale ricorda molto, come vedremo, quello della morte per veleno dello *Spelerpes* o di altri anfibi. Già nel secolo passato Laurentius [3] descriveva la morte per veleno della *Salamandra* dicendo che gli animali avvelenati « ultimo omnem facultatem motu omittebant et placide moriebantur ». Phisalix Langlois [4], e Gratiolet [5] hanno invece fatto osservare le proprietà convulsivanti della Salamandrina.

Qui non entriamo in altri particolari sull'azione fisiologica dell'etere cianacetico, solamente vogliamo ricordare che anche questo veleno come quello ottenuto dallo *Spelerpes*, agisce sulla crasi sanguigna e distrugge lo stroma dei corpuscoli rossi, mentre allo spettroscopio si trovano ancora le strie della ossiemoglobina.

Allo scopo di ottenere il veleno dello *Spelerpes* allo stato di maggiore purezza, tentammo, anche come Gratiolet, di estrarre il veleno secco con alcool caldo. Perciò facemmo bollire 1,5 gr. di veleno essiccato con 50 cm^3 di alcool in apparecchio a ricadere per 18 ore. Dall'alcool filtrato ed evaporato ottenemmo un residuo oleaginoso del peso di circa 2 decigrammi, dotato di debole proprietà tossica. Questo residuo precipitava col tannino, coll'acido picrico, col reattivo di Lugol e con quelli di Mayer e di Marmè. Lo stesso risultato abbiamo ottenuto sottoponendo il residuo secco alla estrazione con cloroformio.

Il veleno dello *Spelerpes*, e specialmente quello fresco, ha una energica azione locale. Introducendo una goccia di soluziore acquosa nell'occhio di

(1) Coppola, Acc. Lincei, Rendiconti 1889, pag. 380.
(2) Pohl, Arch. f. exp. Path. u. Pharm, XXIV, pag. 148.
(3) Laurentius, Specimen med. exib. Sinop. Reptil. Vienna 1768.
(4) Phisalix e Langlois, Compt. rend., t. 109, pag. 405.
(5) Gratiolet, Compt. rend., t. 34. pag. 629.

un coniglio si ha subito forte iperemia della congiuntiva palpebrale e bulbare, lacrimazione e fotofobia. Poco dopo la congiuntiva si tumefà, l'occhio diviene dolente e l'animale rifiuta di cibarsi. Occorrono circa 24 ore prima di avere la completa restitutio ad integrum. Anche uno di noi ebbe involontariamente a provare l'azione locale del veleno dello *Spelerpes*, essendo casualmente caduta nell'occhio destro una minima particella di veleno recentemente essiccato. Si ebbe iperemia forte della congiuntiva, bruciore, lacrimazione. Dopo una lavatura abbondante dell'occhio questi fenomeni andarono poco per volta scomparendo, ma occorsero circa 5 ore per ottenere una guarigione completa. Un caso simile racconta lo Staderini (1), il quale descrisse una grave oftalmia provocata dalla penetrazione in un occhio di veleno di rospo. Maneggiando gli *Spelerpes* per l'estrazione del veleno, si prova anche un molesto senso di prurito nella mucosa nasale e si ha ipersecrezione di muco e starnutazione frequentissima.

L'azione irritante del veleno dello *Spelerpes* può anche vedersi somministrandolo ad una rana per la via della bocca. L'animale muore con fenomeni di paralisi, e all'autopsia si rinvengono le mucose della cavità orale e dello stomaco straordinariamente iperemiche.

Il veleno dello *Spelerpes* arresta, anche in soluzioni acquose diluite, il movimento delle ciglia vibratili dell'epitelio della mucosa faringea della rana. I piccoli crostacei che vivono nei nostri stagni, le larve acquatiche d'insetti risentono pure molto energicamente l'azione del veleno.

In una soluzione di 0,5 °/₀₀ cessano rapidamente di muoversi e di nuotare, cadono al fondo del recipiente nel quale erano contenuti e muoiono nello spazio di due o tre minuti.

Per brevità tralasciamo di riferire le diverse esperienze eseguite, e citiamo solo come esempio una delle diverse esperienze fatte sulle rane e sulle cavie.

Esperienza I, Rana del peso di 95 gr.:

Ore 15.59. Iniezione sottocutanea del veleno tolto da 14 Spelespes e sciolto in 2 cm^3 di acqua distillata,

» 16.15. I movimenti ioidei i quali nella rana normale erano in numero di 24 in 30″ sono saliti a 33. L'animale è immobile; lasciato a sè si mostra torpido e non cerca di fuggire.

» 17 L'animale messo sul dorso è incapace di risollevarsi; notasi forte ipersecrezione cutanea. La pupilla è ristretta.

» 17.10. I fenomeni di paralisi vanno accentuandosi; l'animale è incapace di camminare e si trascina a stento sul tavolo.

» 17.15. Forte risoluzione muscolare. Abolizione dei movimenti volontari. Rallentamento forte dei movimenti ioidei, i quali sono discesi al disotto del normale e sono 15 in 30″.

(1) Staderini, Annali di Ottalmologia, XVII, 1880, fasc. V.

Ore 17.30. La rana pizzicata reagisce ancora, ma lasciata a sè rimane completamente immobile; il cuore diviene sempre più debole e raro. La pelle dell'animale, come già aveva fatto notare Capparelli, cambia poco alla volta di colore e da verdastra diviene grigio-bruna.

» 18.40. La rana è morta. All'autopsia si rinvengono gli organi splancnici iperemici. Il sangue presenta le strie dell'ossiemoglobina, ma è di colorito un po' scuro.

L'animale lasciato a sè non entra in rigidità cadaverica.

Negli animali a sangue caldo come conigli e cavie gli effetti del veleno si manifestano con affanno ed aumento nella frequenza e profondità del respiro, seguìto subito dopo da diminuzione della frequenza e della profondità; il cuore in principio batte assai celeremente, poscia diviene debole e lento. Si ha inoltre salivazione abbondantissima, risoluzione muscolare spiccata, dilatazione della pupilla e paralisi dei movimenti volontarî. In ultimo si ha abolizione dei riflessi e arresto del respiro e del cuore. Valga come esempio una sola esperienza:

Esperienza II. Cavia normale, assai vispa, del peso di gr. 350. Respiro 40 in 30″.

Ore 17.10. Iniettiamo sottocutaneamente il veleno estratto da 30 *Spelerpes* di media grossezza, sciolto in 5 cm³ di acqua distillata.

» 17.23. L'animale grida, si agita; il respiro sale a 45 in 30″. Emette orina.

» 17.25. Il respiro diviene più frequente e sale a 51 in 30″, è affannoso e rumoroso.

» 17.30. Cominciano i fenomeni di depressione generale. L'animale messo a giacere sul fianco, vi rimane a lungo, indi si rialza lentamente. Perde abbondante saliva dalla bocca; il cuore pulsa con grande frequenza.

» 17.40. La salivazione diviene sempre più abbondante, la respirazione si fa molto profonda; i movimenti respiratorî discendono a 20 in 30″. Si ha forte risoluzione muscolare, le orecchie sono fredde, la temperatura è bassa. Ogni tanto si hanno contrazioni fibrillari nei muscoli della faccia e degli arti, talora scosse e sussulti come se l'animale fosse eccitato da uno stimolo elettrico.

» 17.50. Perdita di saliva assai notevole. Respiro lento e profondo: 14 in 30″. Cuore regolare e frequente.

» 17.55. La cavia respira rantolando. È coricata sul fianco e non riesce a rialzarsi. Messa in posizione normale non si sostiene e poggia col ventre sul tavolo contraendo i muscoli della nuca per tenere il capo sorretto.

» 17.58. L'animale respira abboccando l'aria. Resp. 13 in 30″. Pizzicato reagisce molto prontamente. La pupilla è dilatata. Ogni tanto si nota tremore negli arti e scosse, ma giammai vere convulsioni.

» 18. Respirazioni 8 in 30″. Perdita di feci e di orine. Temperatura assai bassa. Abolizione completa dei movimenti volontarî; diminuzione dei riflessi.

» 18.3. L'animale muore per arresto della respirazione.

All'autopsia si trova il sangue di colorito scuro, che dà però allo spettroscopio, se esaminato colle dovute cautele, le strie di assorbimento dell'ossiemoglobina.

I polmoni sono iperemici con focolai emorragici, il fegato è di colore molto scuro e ripieno di sangue, la vescichetta biliare è enormemente dila-

tata e ripiena di un liquido citrino trasparente. Gli intestini sono iperemici.

Non possiamo per ragioni di spazio dilungarci nel riferire minutamente le altre esperienze eseguite. Diremo solo che la pressione sanguigna negli animali a sangue caldo non è molto influenzata dal veleno dello *Spelerpes*. Riguardo all' azione del muscolo cardiaco, essa si estrinseca con una diminuzione dei battiti cardiaci che conduce all' arresto del cuore in sistole. Applicato sul cuore di rana messo alla scoperto, il veleno determina prima un aumento nella frequenza poi diminuzione delle pulsazioni. Il primo periodo in cui la frequenza del cuore aumenta è molto più visibile negli animali a sangue caldo.

Il veleno agisce, come abbiamo veduto, molto energicamente sulla respirazione. Prima si ha un aumento nel numero delle respirazioni, indi un rallentamento grandissimo fino all' arresto completo. Agisce sui nervi motori non sui muscoli che conservano la loro eccitabiilità. L' azione sui nervi sensibili è minima, poichè la sensibilità dell' animale avvelenato è conservata fino a pochi momenti prima della morte. Anche la coscienza da principio non è disturbata, solo più tardi sopravvenendo i sintomi di paralisi diffusa, l' animale diviene indifferente a tutto ciò che lo circonda e par si abolisca anche la coscienza.

Abbiamo fatto delle esperienze in vitro mescolando del sangue di rane e di cavie diluito con sol. fisiol. di Na Cl, con soluzioni di veleno più o meno concentrate. Abbiamo con queste esperienze acquistata la prova che il veleno altera la crasi sanguigna distruggendo il protoplasma dei globuli rossi. L' emoglobina disciolta nel siero sanguigno non perde però la proprietà di ridursi e di ossidarsi.

Tutte queste proprietà del veleno dello *Spelerpes* concordano esattamente con quelle che Capparelli rinvenne pel veleno del *Triton cristatus*. È quindi probabile che si tratti in entrambi i casi della stessa sostanza.

Giova far notare che questo veleno è dotato di una azione locale molto spiccata. Così forse può comprendersene l' ufficio, ammettendo che serva a questi piccoli animali come mezzo di difesa contro i carnivori notturni che volessero divorarli. Già Phisalix e altri autori fecero pure la stessa osservazione.

Psicologia sperimentale. — *Sul metodo di studiare i sentimenti semplici*. Nota del dott. F. KIESOW, presentata dal Socio MOSSO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Beltrami, levatosi in piedi, pronuncia le seguenti parole:

« Ho il piacere d'annunziare all'Accademia che la Seduta odierna è onorata dalla presenza del venerando suo Socio estero Lord Kelvin, senza contrasto il più insigne rappresentante che la scienza fisica, intesa nel suo più ampio significato, abbia al tempo nostro in tutto il mondo civile.

« Il suo glorioso, versatile e fecondo lavoro data dal 1840 e non accenna ancor oggi a cessare, nè a declinare. Vero e geniale interprete e continuatore del pensiero scientifico di Galileo e di Newton, egli ha sempre fatto camminare di pari passo la più pura e squisita geometria colla più profonda e minuta indagine sperimentale d'ogni classe di fenomeni fisici, dalle ricerche sulle sottilissime ondulazioni dell'etere luminoso, dalle accuratissime analisi elettriche e termiche, fino ai grandiosi problemi della dinamica generale, della trasformazione e della dissipazione dell'energia, dell'equilibrio del nostro pianeta e di quello dello stesso sistema cosmico. Non v' ha dottrina della fisica, teorica o sperimentale, nella quale egli non lasci leggi, formule, apparati che portano e porteranno sempre il suo nome. Senza le sue ricerche razionali e senza i delicatissimi stromenti di misura di cui egli ha dotato a profusione ogni ramo della meccanica e della fisica, ma specialmente la nuova scienza elettromagnetica, non sarebbero state possibili quelle grandi applicazioni che, a cominciare dal primo cavo sottomarino fra l'Europa e l'America, hanno messo la prodigiosa forza elettrica al servizio delle più svariate esigenze della vita sociale.

« Non sono molti anni che, celebrandosi a Glasgow le feste giubilari di questo nostro insigne Collega, la Società italiana delle scienze gli fece pervenire un Indirizzo che si chiudeva con queste parole: « Delle manife-
« stazioni multiformi del Vostro ingegno non si saprebbe decidere chi possa
« meglio avvantaggiarsi, se il filosofo, il geometra, il fisico, il geologo, l'astro-
« nomo o l'ingegnere. Voi avete saputo, con esempio quasi unico, alleare
« insieme le speculazioni più alte della scienza astratta colle applicazioni
« tecniche più utili al civile consorzio. Per tutti questi titoli, non che orna-
« mento della Vostra patria, Voi siete gloria del genere umano e testimonio
« vivente che la Scienza non ha fallito al suo mandato ». Credo d'interpretare il pensiero di tutti gli Accademici lincei, presenti e lontani, affermando che questi sentimenti sono in quest'ora più che mai vivi e ferventi nei nostri cuori, ed è in nome di questi sentimenti stessi che, prima di

riprendere il consueto ufficio accademico, invito tutti i presenti a dare il saluto d'onore al venerando Collega alzandosi in piedi ».

Alle parole del PRESIDENTE, accolte dai presenti con applausi all'eminente scienziato inglese, Lord KELVIN risponde commosso ringraziando per la manifestazione fattagli.

P. B.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 maggio 1899.

E. Beltrami Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Sulla distribuzione in latitudine delle protuberanze solari osservate al R. Osservatorio del Collegio Romano durante il 1° trimestre del 1899.* Nota del Socio P. Tacchini.

Nel primo trimestre dell'anno corrente in causa dell'atmosfera poco favorevole a queste osservazioni e in causa della poca attività solare, il numero delle protuberanze osservate fu soltanto di 119. Dalle latitudini calcolate, ho ricavato le seguenti cifre per la frequenza relativa del fenomeno nelle diverse zone degli emisferi del sole.

1° trimestre 1899.

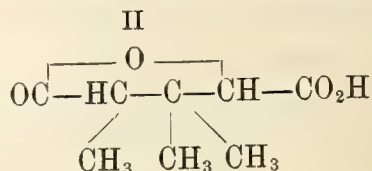
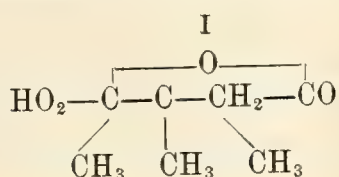
Latitudine	Frequenza relativa	
90° + 80°	0,008	
80 + 70	0,016	
70 + 60	0,016	
60 + 50	0,041	
50 + 40	0,033	0,261
40 + 30	0,008	
30 + 20	0,041	
20 + 10	0,033	
10 . 0	0,065	
0 — 10	0,073	
10 — 20	0,187	
20 — 30	0,146	
30 — 40	0,073	
40 — 50	0,105	0,739
50 — 60	0,057	
60 — 70	0,057	
70 — 80	0,041	
80 — 90	0,000	

Anche in questo trimestre, come in quelli dell'anno precedente, le protuberanze sono state più frequenti nelle zone australi, ed è a rimarcarsi che col diminuire dell'attività solare la differenza fra le frequenze nei due emisferi si è fatta più grande. La maggiore attività al sud risulta anche prendendo in considerazione i risultati per ciascun mese. Il massimo di frequenza per zona si verificò pure al sud fra — 10° e — 30° come nel precedente trimestre.

Chimica. — *Sui prodotti di ossidazione dell'acido canforico.* Nota 10ª del Corrispondente L. Balbiano [1].

Acido 3-dimetil-4-metilpentan(2-5)-olidoico.

L'acido lattonico, che ho ottenuto contemporaneamente all'acido α-$\beta\beta$-trimetilglutarico nella riduzione dell'acido $C_8H_{12}O_5$, prodotto principale dell'ossidazione dell'acido canforico, non era stato finora oggetto di un esame particolare e la sua costituzione, rappresentata da uno dei due schemi

```
              I                                   II
       ┌──────O──────┐                    ┌─── O ───┐
HO2—C—C—CH2—CO                      OC—HC—C—CH—CO2H
    /  |  \                                /  | \
 CH3  CH3  CH3                          CH3  CH3 CH3
```

era dedotta in modo intuitivo piuttosto che sperimentale. Nel corso di esperienze che sto facendo per riuscire alla sintesi di un'acido della costituzione eguale a quella che il Bredt ammette per l'acido canforico, ho dovuto studiare quest'acido lattonico ed in questa Nota rendo conto dei risultati ottenuti, che mi portarono alla conclusione che esso è rappresentato dallo schema II.

I.

Trasformazione dell'acido lattonico in acido α-$\beta\beta$-trimetilglutarico.

Prima di tutto era necessario dimostrare che l'ossatura degli 8 atomi di carbonio dell'acido lattonico era identica a quella dell'acido α-$\beta\beta$-trimetilglutarico. Perciò gr. 5 di acido lattonico si riscaldarono in tubo chiuso per 10 ore a 140-150° con 25 cm.³ di acido jodidrico bollente a 127°. All'apertura del tubo non si osservò pressione e dal liquido, fortemente colorato pel jodio separatosi, si estrasse con etere l'acido organico, che, salificato esattamente con idrato sodico, si convertì in sale di calcio quasi insolubile nell'acqua a caldo. Questo sale di calcio dette all'analisi i seguenti risultati concordanti colla formola $C_8H_{12}O_4Ca \quad 2\,{}^1/_2\,H_2O$:

	trovato	calcolato
H_2O	17,27	17,50
Ca	18,90	18,86

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica farmaceutica della R. Università di Roma.

L'acido estratto da questo sale cristallizza dall'acqua in prismetti aggruppati, fondenti a 88-89° e presenta tutti i caratteri dell'acido α-$\beta\beta$-trimetilglutarico.

Analisi:

	trovato	calcolato per $C_8H_{14}O_4$
C	55,00	55,17
H	8,09	8,04

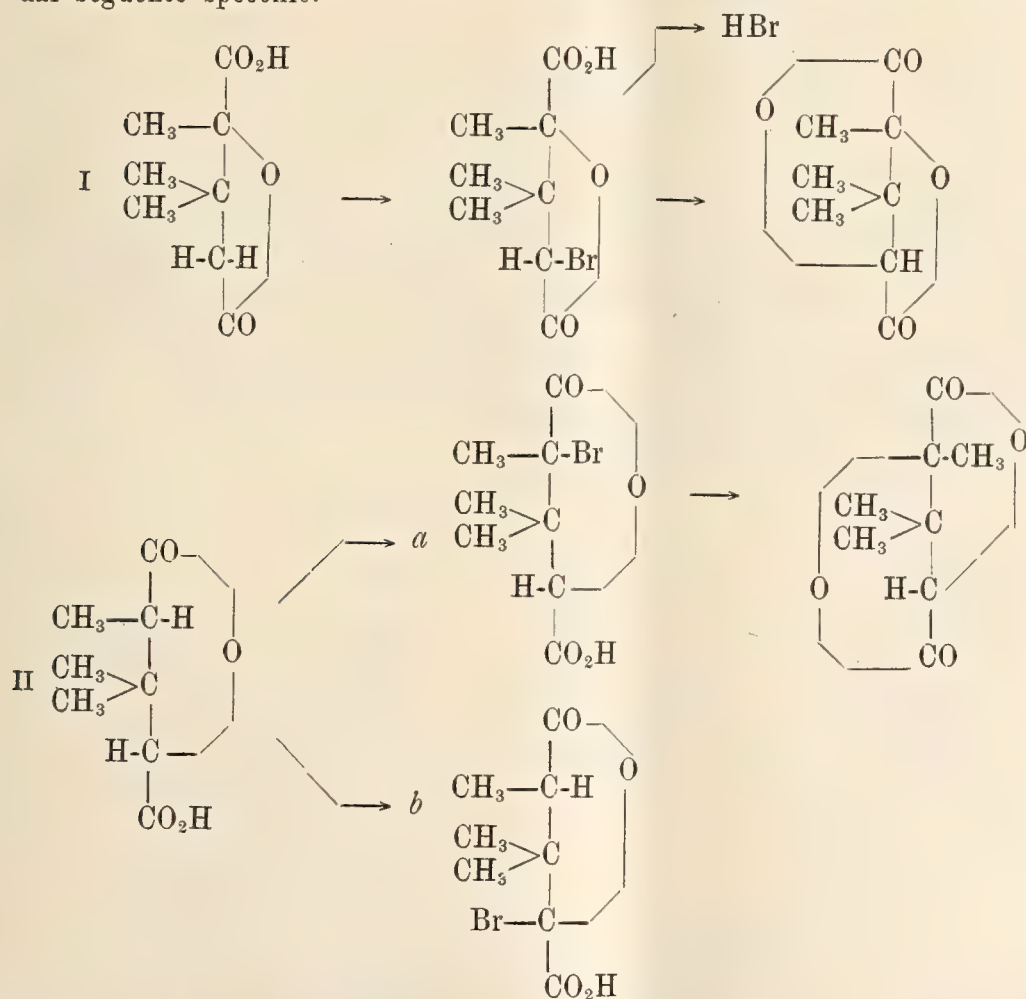
Da 5 gr. di acido lattonico ho ottenuto gr. 6 di sale di calcio $C_8H_{12}O_4Ca\ 2^1/_2H_2O$ invece di gr. 7,4, quindi 81 % di acido lattonico si è trasformato in acido α-$\beta\beta$-trimetilglutarico.

II.

Azione del bromo sull'acido lattonico.

L'ottenere in questa azione un derivato bromurato stabile dimostra che l'acido lattonico è rappresentato dallo schema II, perchè un acido lattonico rappresentato dallo schema I darebbe un dilattone, come si deduce facilmente dal seguente specchio.

```
         CO2H               CO2H  ——→ HBr          ————CO
          |                  |                   O       |
I  CH3—C\                CH3—C\                  CH3—C\
   CH3>C  O    ——→       CH3>C  O     ——→        CH3>C  O
   CH3 |  |              CH3 |  |                CH3 |  |
      H-C-H|               H-C-Br|               \————CH |
       | /                  | /                       | /
       CO                   CO                        CO

                          CO—\                      CO—\
                           |                         |   O
                       CH3—C-Br |                /———C-CH3
                           |    O     ——→        CH3>C   |
          CO—\   ——→ a CH3>C    |                CH3 |   /
           |           CH3 |   /                 O  H-C/
   CH3—C-H |             H-C—/                   |   |
   CH3 |   O               |                     \———CO
II CH3>C   |             CO2H
      |   /
    H-C—/                 CO—\
      |                    |   O
    CO2H      \——→ b  CH3—C-H |
                      CH3>C   |
                      CH3 |   /
                       Br—C—/
                          |
                        CO2H
```

Inoltre fissa anche la posizione del bromo, perchè è soltanto la posizione indicata dallo schema *b* che permette di spiegare l'esistenza di un prodotto

bromurato che non si converta subito in dilattone. Anche il caso, poco probabile, di sostituzione dell' idrogeno di uno dei tre metili resta escluso, perchè il bromo sarebbe sempre in posizione γ o δ coll' idrogeno del carbossile e dovrebbe quindi anche dare un dilattone eliminandosi acido bromidrico.

Gr. 10 di acido lattonico e cm³. 3,2 di bromo si riscaldarono in tubo chiuso per 4 ore alla temperatura di 120°, indi, dopo apertura del tubo per diminuire la pressione interna dell' acido bromidrico formatosi, si riscaldò nuovamente il tubo chiuso per 6 ore a 150-160° per completare l' azione.

La massa cristallina della reazione si sciolse a caldo in benzina secca; col raffreddamento cristallizzò l' acido bromolattonico.

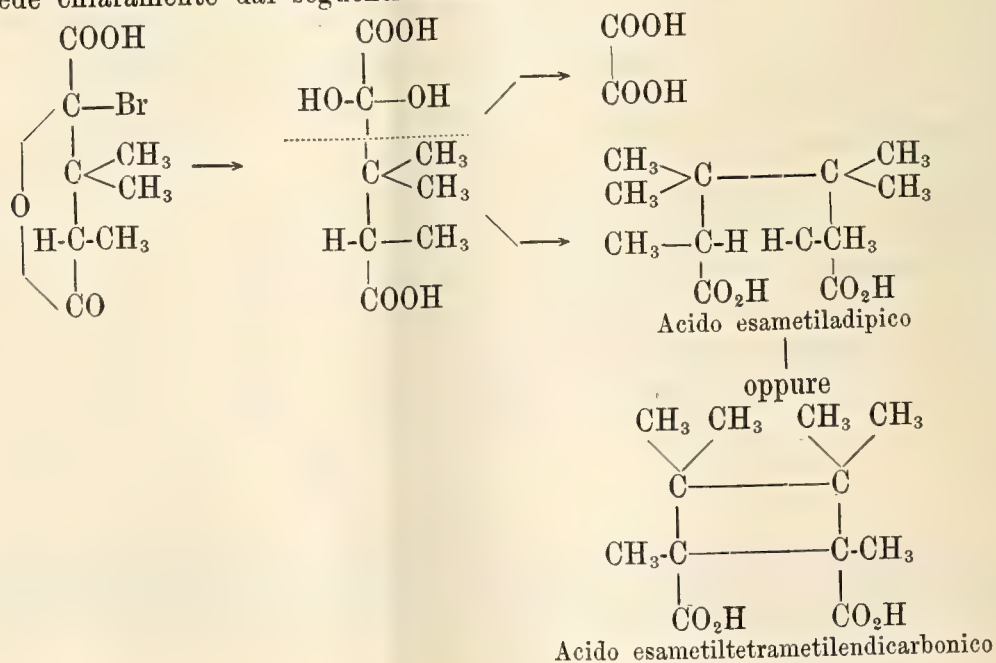
L' analisi dette il seguente risultato:

	trovato	calcolato per $C_8 H_{11} Br O_4$
Br °/₀	32,07 — 31,91	31,87

L' acido bromolattonico cristallizza dalla benzina in piccoli prismi aggruppati, bianchi, splendenti. Riscaldato in tubicino di vetro comincia a raggrumarsi a 120° e fonde tra 142-145°.

Il bromo è contenuto in questo composto in forma molto labile, perchè coll' acqua si trasforma in acido bromidrico.

L' acido bromolattonico riscaldato cogli idrati alcalini o coll' idrato baritico si decompone in acido ossalico ed in un acido bibasico, molto volatile, che cristallizza in belle laminette di splendore vitreo, fusibili a 67-69°. Di quest' acido non ho finora potuto stabilire con sicurezza la formola, cioè decidere se è un acido esametiladipico $C_{12} H_{22} O_4$ od un acido esametiltetrametilendicarbonico $C_{12} H_{20} O_4$. In ogni caso la formazione sia dell' uno che dell' altro di questi due acidi non fa che confermare quanto sopra ho scritto per la posizione del bromo nella molecola dell' acido bromolattonico, come si vede chiaramente dai seguenti schemi:

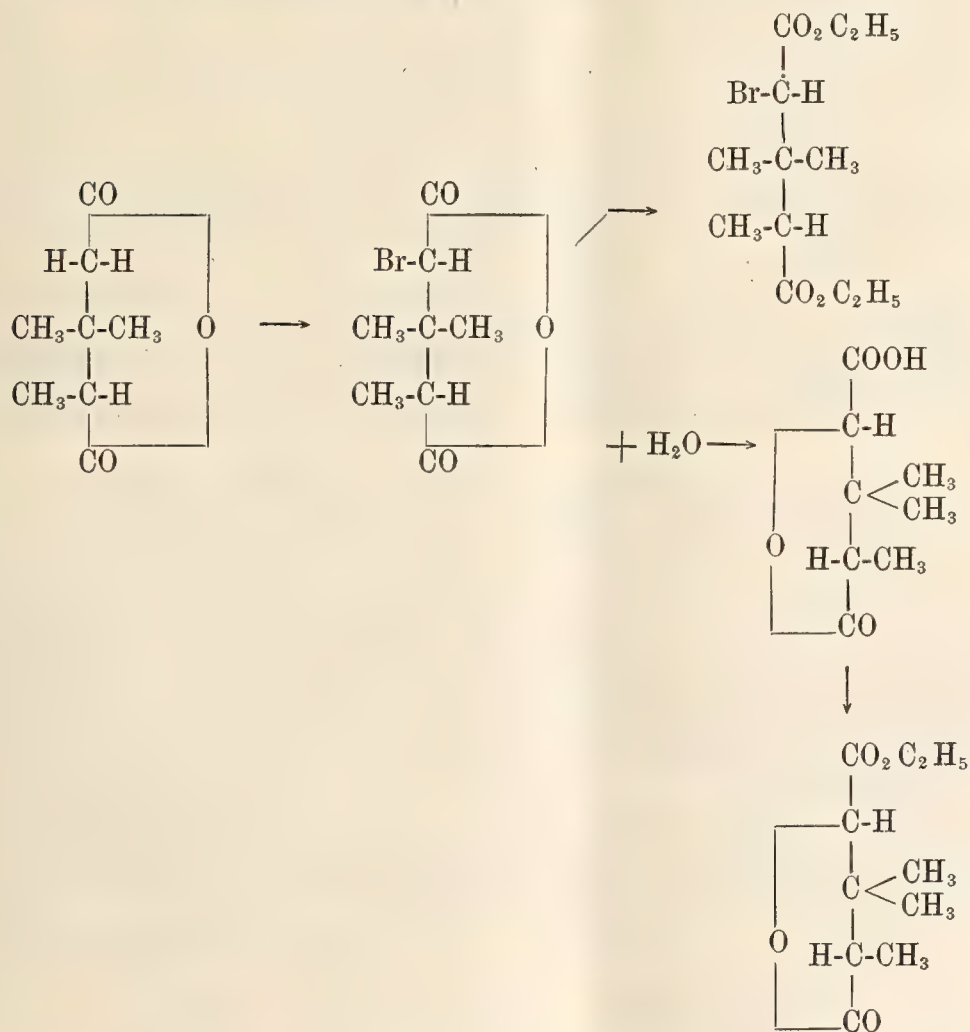
```
    COOH               COOH                    COOH
     |                  |              ──→      |
   ╱ C—Br          HO-C—OH        ╱            COOH
  ╱  |           .......|.......
 |   C<CH3   ──→        C<CH3                  CH3>C ——— C<CH3
 O   | CH3              | CH3                  CH3       |    CH3
 |  H-C-CH3          H-C—CH3       ╲──→    CH3—C-H   H-C-CH3
 |   |                  |                       |         |
  ╲ CO                COOH                    CO2H      CO2H
                                            Acido esametiladipico
                                                    |
                                                  oppure
                                          CH3 CH3    CH3 CH3
                                            ╲ ╱        ╲ ╱
                                             C ——————— C
                                             |         |
                                        CH3-C ——————— C-CH3
                                             |         |
                                           CO2H      CO2H
                                 Acido esametiltetrametilendicarbonico
```

Da queste esperienze concludo quindi che l'acido lattonico è, secondo la nomenclatura di Ginevra, l'acido *3-dimetil-4-metilpentan(2-5)olidoico.*

III.

Trasformazione dell'acido α-ββ-trimetilglutarico nell'acido 3-dimetil-4-metilpentan(2-5)olidoico.

L'anidride α-ββ-trimetilglutarica reagisce facilmente col bromo dando un monobromoderivato, quando le due sostanze si adoperino nei rapporti dei pesi molecolari. L'anidride bromurata trattata con alcool assoluto dà l'etere dietilico dell'acido bromotrimetilglutarico, l'acido 3-dimetil-4-metilpentan(2-5)-olidoico e forse il suo etere etilico.

Riassumo nel seguente specchietto i passaggi suindicati:

```
                                                     CO2 C2 H5
                                                      |
                                                    Br-C-H
                                                      |
                                                  CH3-C-CH3
  CO______             CO______        /-->           |
  |       |            |       |                  CH3-C-H
 H-C-H    |          Br-C-H    |                      |
  |       |            |       |                    CO2 C2 H5
CH3-C-CH3 O  --->  CH3-C-CH3   O                  COOH
  |       |            |       |                    |
CH3-C-H   |          CH3-C-H   |      + H2O --->  ___C-H
  |_______|            |_______|                 |   |
  CO                   CO                        |   C<CH3
                                                 |   |  CH3
                                                 O  H-C-CH3
                                                 |   |
                                                 |___CO
                                                     |
                                                     v
                                                   CO2 C2 H5
                                                     |
                                                  ___C-H
                                                 |   |
                                                 |   C<CH3
                                                 |   |  CH3
                                                 O  H-C-CH3
                                                 |   |
                                                 |___CO
```

Gr. 10 di anidride dimetilglutarica si riscaldarono per 2 ore in tubo chiuso a bagno maria in ebollizione tranquilla con cm³ 3,5 di bromo; la reazione è completa ed il contenuto del tubo, dapprima liquido, si solidifica all'apertura diminuendo la tensione dell'acido bromidrico formatosi. Il pro-

dotto della reazione si scioglie nel benzolo a freddo, e la soluzione benzolica, addizionata poco a poco di eteri di petrolio, precipita una sostanza bianca fioccosa, che tosto diventa cristallina. Questa sostanza è l' anidride bromotrimetilglutarica.

	trovato	calcolato per $C_8H_{11}BrO_3$
Br °/₀	34,47	34,04

Cristallizza in aghetti bianchi, molli appiccicaticci, solubilissima nel benzolo, quasi insolubile negli eteri di petrolio. Riscaldata in tubicino di vetro comincia a raggrumarsi a 178° e fonde lentamente a 186-188° in un liquido denso vischioso.

Se si discioglie l' anidride bromurata in un eccesso di alcool assoluto, si riscalda in seguito la soluzione a ricadere per mezz' ora, indi si distilla l' alcool a bagno maria ed il residuo oleoso si scioglie in etere ed infine la soluzione eterea si agita con soluzione di carbonato sodico indi si svapora, rimane un liquido oleoso, denso, che distilla alla pressione di 54 mm. di mercurio per la massima parte fra 200 e 205°.

L' analisi di questo prodotto dimostra ch' esso è l' etere dietilico dell' acido bromotrimetilglutarico, mescolato però ad una certa quantità di etere dell' acido lattonico; infatti contiene soltanto 20,4 °/₀ di bromo mentre l' etere bromotrimetilglutarico ne dovrebbe contenere 25,89 °/₀. Le acque alcaline contengono in soluzione bromuro di sodio e decomposte con acido solforico lasciano depositare a freddo un acido solido, cristallino, che ricristallizzato dall' acqua bollente fonde a 162-164° ed all' analisi dette il seguente risultato:

	trovato		calcolato per $C_8H_{12}O_4$
C	55,45 —	55,46	55,81
H	6,98	6,97	6,97

Per dimostrare che l' acido in questione è veramente l' acido lattonico sopranominato, se ne preparò il sale di calcio saturandolo con carbonato di calcio. D' altra parte si preparò coll' acido lattonico il sale di calcio nello stesso modo e dal confronto delle proprietà dei due sali si dedusse l' identità dei due acidi.

Il sale di calcio cristallizza dalla soluzione acquosa concentrata in piccoli aghi solubili che contengono 2 mol. di acqua di cristallizzazione.

	trovato		calcolato per $(C_8H_{11}O_4)^2Ca\ 2H_2O$
	I	II	
H_2O °/₀	8,73	8,59	8,61
Ca	10,61	10,72	10,47

L' analisi I è del sale proveniente dall' acido dalla bromoanidride; la II da quello preparato direttamente.

Caratteristico dell'acido lattonico è il suo sale di piombo, che si ottiene aggiungendo alla soluzione del sale di calcio 1 : 10 una soluzione concentrata di nitrato di piombo. Concentrando la miscela delle due soluzioni, che si conserva limpida, cristallizza col raffreddamento il sale di piombo in aghi prismatici splendenti, solubili nell'acqua. Questo sale contiene 2 mol. di acqua di cristallizzazione. Il sale idrato riscaldato in tubicino di vetro fonde a 130-136° sviluppando vapor d'acqua; se invece si disidrata prima nella stufa ad acqua e si riscalda in seguito in tubicino di vetro, principia a rammollirsi a 168° ed a 174° è fuso e col raffreddamento si rappiglia in una massa vetrosa trasparente. Esperienze fatte di confronto coi sali di piombo dell'acido lattonico e coll'acido ottenuto dalla bromoanidride hanno stabilito l'identità dei due prodotti.

Le analisi hanno dato i seguenti risultati:

	trovato		calcolato per $(C_8H_{11}O_4)^2 Pb\, 2H_2O$
	I	II	
H^2O %	6,12	6,18	6,15
Pb %	37,40	36,81	37,67

L'analisi segnata I è del sale dalla bromoanidride, quella segnata II è del sale avuto direttamente dall'acido lattonico.

Mineralogia. — *I giacimenti minerali di Saulera e della Rocca Nera alla Mussa in Val d'Ala.* Nota del Socio G. Struever.

Nell'estate 1898, durante un lungo soggiorno a Balme in Val d'Ala, ebbi occasione di visitare e studiare due giacimenti minerali della Mussa non menzionati, perchè a quell'epoca non conosciuti, nel mio breve lavoro [1] sui minerali di quella vallata ben nota ai mineralisti sino dalla fine del secolo scorso. Distinguerò i due giacimenti coi nomi di « Saulera » e « Rocca Nera n. 2 ». Di Saulera ebbi i primi splendidi cristalli di epidoto giallo nell'inverno 1872-73, epoca della scoperta, dal compianto Antonio Castagneri, la celebre guida alpina che perdette poscia la vita in una ascensione al Monte Bianco partendo da Courmayeur. Più tardi, nel 1880, in una visita fatta alla Mussa, partendo da Groscavallo in Valle-Grande per il Ghicet d'Ala, potei acquistare, pochi giorni dopo la scoperta del secondo giacimento, i primi campioni di questo.

(1) *Sui minerali delle vallate di Lanzo* (Circondario di Torino). Memorie del R. Com. Geol. d'Italia. Vol. I, Firenze, 1871, 4°, pag. 38 segg.; *Die Minerallagerstätten des Alathal's in Piemont.* Neues Jahrbuch für Mineralogie etc. Anno 1871, fasc. 4°, pag. 337 e segg. Stuttgart, 1871, 8°.

In ripetute visite posteriormente fatte sul luogo e mediante numerosi invii fattimi da quei solerti cercatori di minerali di Balme, ho potuto un po' alla volta, mettere assieme una ricca collezione, e, non constandomi che altri nel frattempo abbia parlato di quei giacimenti, mi sia ora permesso di esporre brevemente le osservazioni eseguite sul posto e sulla copiosa serie di esemplari che è nelle mie mani.

1. Giacimento di Saulera.

Dal lato meridionale del piano della Mussa, sulla sinistra del torrente che in splendida cascata si precipita in basso dal piano dell'alpe Saulera, su in alto, è intercalato, concordantemente, negli schisti verdi cloritici e talcosi, tagliati a picco, un banco potente più d'un metro, costituito ora quasi da solo epidoto compatto giallo-chiaro, ora da una miscela di granato, diopside, clinocloro e di epidoto verde-pistacchio e giallo-verde. L'epidoto qua e là, accanto al grosso banco, alterna cogli straterelli dello schisto, come non di rado dal banco stesso si staccano delle vene più o meno sottili e composte dei su menzionati minerali per penetrare nella roccia incassante attraversando gli strati in senso prossimamente normale alla schistosità. Laddove l'epidoto e la miscela di esso cogli altri minerali assumono struttura più distintamente cristallina, si osservano geodi irregolari le cui pareti, al pari di quelle delle numerose screpolature attraversanti il banco in tutti i sensi, sono tappezzate da cristalli di granato, epidoto, diopside, clinocloro, apatite, titanite e calcite. Qua e là, massime verso il contatto del banco cogli schisti si vedono anche piccole masserelle di calcopirite.

Il minerale più vistoso, trovato a Saulera, è, senza confronto, l'epidoto. Questo, nella parte del banco esclusivamente, o quasi, costituito da esso, presentasi in cristalli trasparenti di color giallo-vinato e giallo-rossiccio-chiaro, allungati nel senso dell'asse di simmetria e appiattiti, ora più, ora meno distintamente, in senso normale alla base.

I cristalli, semplici o geminati con asse normale alla base, raggiungono notevoli dimensioni, sino a 5 centimetri di lunghezza su 2 di larghezza, mentre ordinariamente non superano 1 o 2 centimetri, e scendono talora anche a quasi microscopiche dimensioni. Del resto, per quanto riguarda la loro forma, rimando alla Memoria di La Valle [1] ove di essa si tratta alle pagine 51-52.

Nella parte del banco ove il granato, il diopside e il clinocloro predominano sull'epidoto, questo assume sovente tinte più verdognole, identiche a quelle di molti epidoti del colle del Paschietto (o Pasciet) sotto la Torre

[1] *Sull'epidoto di Val d'Ala.* Roma, 1890, 4°, con tre tavole. Tipografia della R. Accademia dei Lincei.

di Ovarda, talchè si può dire impossibile distinguere allora i cristalli provenienti dai due giacimenti.

Il granato di Saulera è poco appariscente, di color rosso-giacinto forse in generale un po' più scuro che alla Testa Ciarva, ma da confondersi con quello proveniente da questa ultima che sta sul lato opposto, settentrionale, del piano della Mussa.

L'analogia è resa completa dalla forma dei cristalli che a Testa Ciarva, come a Saulera, è quasi esclusivamente data dalle combinazioni }211{ }110{ e }211{ }110{ }321{ in cui per lo più domina l'icositetraedro a faccie striate nel senso della loro maggior diagonale. I granati di Saulera sono generalmente piccoli.

Anche il diopside si può dire identico a quello della Testa Ciarva. Misto agli altri minerali, nella massa compatta del banco, presenta la varietà detta mussite di color grigio-verdognolo, in masse lamellari e bacillari, in cui i singoli individui incompleti sono piegati in tutte le maniere e attraversati non di rado dai ben noti numerosi piani di separazione paralleli alla base che si sogliono chiamare piani di scorrimento. I cristalli terminati ricordano perfettamente quelli di Testa Ciarva. Anche qui, a Saulera, sono chiari nella parte inferiore, verdi nella parte superiore; essi presentano le stesse combinazioni, la stessa geminazione secondo }100{, la stessa striatura a ventaglio su }100{ e le medesime faccie curve tra (100) e le faccie (111) e $(1\bar{1}1)$, la base per lo più appannata; insomma, non si può immaginare una maggiore analogia perfino nei più minuti dettagli. Cristalli di diopside, molto allungati nel senso [001], accompagnano anche l'epidoto giallo nella parte del banco da esso quasi esclusivamente costituito.

Il clinocloro tanto fa parte della miscela compatta del banco, quanto s' incontra in cristalli poco netti, ora tabulari, ora prismatici, ora a forma simile all'elminto, precisamente come a Testa Ciarva.

Numerosi sono i cristallini di apatite sparsi sulle pareti delle screpolature ricoperte da piccoli individui di granato, di diopside e di clinocloro. In un campione, sopra una superficie di circa un decimetro quadrato, potei contare più di cinquanta individui quasi uniformemente distribuiti. Sono appiattiti secondo la base e mostrano tutte le forme semplici da me altra volta ([1]) indicate per i cristalli della Corbassera presso Ala.

Ai minerali suddetti si aggiunge qualche raro cristallo di titanite color giallo di cera e qualche masserella di calcite spatica.

Dalle poche cose sovra esposte risulta l' interesse particolare che il giacimento di Saulera ha in confronto degli altri di Val d'Ala. Esso forma, per così dire, l' anello di congiunzione tra i banchi di granato di Testa Ciarva e quelli di epidoto al colle del Pasciet. In ambedue i luoghi, assai lontani

([1]) Cfr. Atti della R. Acc. di Sc. di Torino, 8°, 29 Dic. 1867.

l'uno dall'altro, troviamo granato, diopside e clinocloro, ma, a giudicare dalla mia personale esperienza, acquistata dal 1865 al giorno d'oggi in ripetute visite ai giacimenti e studiando molte migliaia di campioni da me raccolti e ora in parte conservati nelle collezioni della Scuola degli Ingegneri e dell'Università di Torino, come in quella della Università di Roma, manca a Testa Ciarva l'epidoto e anche la titanite, mentre al Pasciet non si trovano l'apatite e l'idocrasio. Ma ora questa differenza che permetteva di distinguere con sicurezza i campioni del Pasciet da quelli della Mussa, resta assai diminuita dal giacimento di Saulera. Sul posto si scorge a colpo d'occhio una notevole differenza, difficile a descriversi con semplici parole, fra i tre giacimenti, ma per quanto riguarda i singoli campioni da collezione, io non mi sentirei di distinguerli con certezza in tutti i casi.

Dissi sopra che il giacimento in discorso fu scoperto nell'inverno 1872-73, ma il confronto dei campioni d'epidoto con altri della stessa specie nelle antiche collezioni e massime nella collezione Spada conservata nel nostro Museo Mineralogico di Roma, mi fa ritenere per lo meno assai probabile che la località fosse nota nella prima metà del secolo ai cercatori di minerali e poscia stata abbandonata a causa della difficoltà di darvi delle mine senza danno dei prati sottostanti e senza grave pericolo per gli uomini e per il bestiame pascolante. Gli antichi campioni in quistione sono così perfettamente identici ai nuovi e portano le solite indicazioni vaghe od anche a colpo sicuro sbagliate riguardo alla loro provenienza, che la mia ipotesi mi sembra quasi sicura, benchè non potessi più accertare nulla di assolutamente preciso interrogando i vecchi minatori ancora vivi. Il giacimento, del resto, è alla portata degli abitanti estivi della Mussa assai più di quello del Pasciet, e per il secondo giacimento da descriversi ora, è fuor di dubbio che nel 1880 fu soltanto riscoperto.

2. Giacimento della Rocca Nera n. 2.

Nel serpentino compatto della Rocca Nera, la quale anch'essa sovrasta al piano della Mussa dal lato meridionale, ma alquanto più a ponente del giacimento surriferito, al di sopra del posto inaccessibile, dal quale si staccarono i massi in cui si rinvengono, oltre ad altri minerali, sovratutto i granati gialli e verdi conosciuti sotto il nome di topazolite, è intercalato un potente banco costituito da granato, clinocloro, diopside e di epidoto, in cui furono trovati splendidi campioni cristallizzati massime di granato, non che di apatite, idocrasio bruno e calcite. Seppi l'anno scorso sul posto, che quando nell'estate 1880 vi si rinvennero i primi campioni da me acquistati, erano visibilissime ancora le tracce di antiche lavorazioni, talchè è certo che minerali provenienti da questo giacimento si trovano nelle antiche collezioni confusi coi minerali della Corbassera presso Ala, dai quali, a dir vero, non

è possibile distinguerli, tanto è grande e perfetta l'analogia dei due depositi così lontani l'uno dall'altro.

Nel nostro banco, che, per distinguerlo dal giacimento della topazolite, chiamo giacimento della Rocca Nera n. 2, abbonda il granato color rosso-giacinto cupo in cristalli di svariatissima forma e di dimensioni che da meno di un millimetro salgono a 4-5 centimetri di diametro nel senso degli assi di simmetria tetragonale.

Tulle le forme semplici da me altre volte indicate per i granati rossi di Val d'Ala, si trovano su questi cristalli della Rocca Nera, cioè {110} {211} {321} {210} {332} {100}, nonchè, benchè di rado, la forma {111}. Esse formano svariate combinazioni, fra le quali le più frequenti, a giudicare da un notevole numero di cristalli studiati, sono:

{110} {211}; {110} {211} {321}; {110} {211} {100} {210};
{110} {211} {332}; {110} {211} {321} {100} {210} {332}.

Non è privo d' interesse l' aspetto fisico delle varie forme.

Le faccie più lucenti e più perfette sogliono essere quelle del rombododecaedro, mentre quelle dell' icositetraedro {211} sono più sovente meno lucenti e striate più o meno finamente nel senso della diagonale maggiore ossia parallelamente agli spigoli di combinazione colle due faccie adiacenti del rombododecaedro. L'esacisottaedro {321} si presenta in faccie sempre strette ma lucenti. Assai comunemente si osservano in combinazione con {110} {211} le faccie del tetracisesaedro {210} e del cubo, ora tutte ruvide e prive affatto di splendore, ora tutte liscie e lucentissime, ora quelle del cubo lucenti, quelle di {211} ruvide e appannate. Anche le faccie del triasisottaedro {332} sono ora lucenti ora appannate, e lo stesso dicasi di quelle dell'ottaedro, assai rare del resto. Qualche volta una medesima faccia è in parte ruvida e appannata, in parte lucente, ma ciò dipende evidentemente da sovrapposizione, avvenuta posteriormente, di un sottile strato di granato lucente sovra la faccia prima interamente ruvida. Difatti, massime laddove nel banco compaiono anche l' idocrasio bruno e l'apatite, si trovano numerosi cristalli di granato che rivelano chiaramente due periodi di formazione; rombododecaedri bruni, a superficie ruvida, come corrosa, sono stati ricoperti, in parte o interamente, da uno strato sottile di granato giallo o quasi rosso-giacinto lucentissimo, della combinazione {110} {211} e anche {110} {211} {332}.

Non di rado vi ha, tra il cristallo interno e la crosta, un distinto distacco, talchè la crosta è unita al cristallo racchiuso solo in alcuni punti. Anche in questo dettaglio il nostro giacimento ricorda in modo sorprendente quello della Corbassera presso Ala.

Mentre molti dei cristalli del granato rosso-giacinto-cupo mostrano una regolarità quasi ideale, abbondano però ancora gli individui assai irregolar-

mente sviluppati da simulare combinazioni dimetriche o romboedriche o trimetriche, secondochè o quattro faccie di }110{ parallele ad un medesimo asse di simmetria tetragonale, o sei faccie di }110{ parallele ad un medesimo asse di simmetriaa trigonale, o quattro faccie di }211{ e due di }110{ tutte sei parallele ad un medesimo asse di simmetria binario, predominano notevolmente sulle altre faccie. E come vi sono quindi cristalli allungati nel senso di un asse di simmetria o tetragonale o trigonale o binario, così sono abbastanza comuni anche cristalli raccorciati fortemente nel senso di uno di tali assi. Risultano così, quando l'asse raccorciato è a simmetria binaria, cristalli tabulari secondo due faccie di rombodocaedro, i quali, per irregolare sviluppo delle altre faccie assumono anche abito monoclino o triclino; quando invece l'asse raccorciato è a simmetria tetragonale, sono maggiormente sviluppate le faccie collocate alle estremità di quest'asse, mentre le intermedie o sono interamente soppresse o ridotte a striscie strettissime. In questi ultimi cristalli si osservano molto sviluppate le faccie di }100{ e di }210{, talora più di quelle delle forme semplici più comuni.

Spesso si vedono numerosi cristalli aggruppati in posizione più o meno perfettamente parallela, ora a faccie piane ora a faccie più o meno curve, aggruppamenti affatto analoghi a quelli altra volta da me menzionati nei giacimenti presso Ala.

Assai meno abbondante del granato è l'idocrasio bruno, per colore identico al cosidetto idocrasio manganesifero della Corbassera. Esso forma, nel banco, piccole masse a struttura bacillare miste talora ad individui bacillari di diopside, e sovente è impiantato in cristalli allungati terminati cogli altri minerali sulle pareti delle geodi e delle screpolature. Qualche volta è terminato alle due estremità.

Le sole forme che vi potei sino ad ora determinare, sono i due prismi a sezione quadrata }110{ e }100{ e la base, ma solo in pochi casi i prismi sono netti, essendo le faccie della zona prismatica d'ordinario fortemente striate nel senso [001].

Il diopside presenta poco di notevole. Esso si trova tanto nella massa compatta del granato, sovente in individui bacillari allungati, separati gli uni dagli altri, e in posizione parallela fra di loro, quanto in cristalli terminati nelle geodi. Questi ultimi, per sviluppo e colore, rassomigliano ancor essi più al diopside della Corbassera che non a quello della Testa Ciarva e di Saulera. Non di rado si vedono nelle geodi aggruppamenti allungati di individui finamente aciculari.

Il clinocloro si trova, in lamelle e in vene sovente ripiegate, nella massa del granato non solo, ma anche in cristalli ora a forma di lamine esagonali ora a forma prismatica. Esso è di color verde più cupo di quello della Testa Ciarva, e anche sotto questo aspetto vi ha notevole analogia tra il nostro giacimento e quello della Corbassera.

Forse il minerale più interessante alla Rocca Nera è l'apatite. Qua e là l'incontrai nell'interno della massa compatta del banco mista agli altri minerali, ma sovratutto poi nelle geodi in numerosi cristalli. Questi sono ora di abito tabulare secondo la base, ora di abito prismatico. Ora l'apatite costituisce cristalli isolati, ora aggruppamenti sovente in posizione perfettamente parallela, del diametro anche di 2-3 centimetri.

Riservandomi di dare più tardi notizie particolareggiate sulla forma dell'apatite di questa località come di Saulera e di Testa Ciarva, fo notare per ora che vi potei constatare la presenza di tutte le forme semplici altra volta descritte sui cristalli della Corbassera, aggiungendo che alla Rocca Nera le due forme $\}3\bar{1}\bar{2}\{$ Miller o $\infty P \frac{2}{3}$ Naumann e $\}510 . 43\bar{1}\{$ Miller o $\frac{3}{2} P \frac{3}{2}$ Naumann si trovano talora con sviluppo oloedrico, ad analogia di ciò che v. Rath e Hessenberg [1] osservarono nei giacimenti di Pfitsch e del Wildkreuzjoch nel Tirolo. I cristalli sono pieni di inclusioni di liquido.

Mentre tutti i minerali sinora menzionati si possono dire formati all'ingrosso contemporaneamente, poichè sono non solo mescolati nella massa compatta ma si racchiudono l'un l'altro o si trovano impiantati a vicenda gli uni sugli altri, la calcite è certamente posteriore. Il giacimento subì evidentemente dei movimenti che in qualche parte, e pare precisamente laddove esistevano le più vaste geodi coi più voluminosi cristalli, lo ridussero a breccia, la quale fu poscia cementata da calcite spatica, cristallizzata, nei vani rimasti, in romboedri $\}11\bar{1}\{$ a superficie alquanto ruvida. In questa breccia a cemento calcareo cristallizzato sono inclusi frammenti di grossissimi cristalli di granato e di apatite, come cristallini quasi interi degli stessi minerali e di idocrasio bruno, clinocloro e diopside.

A complemento di ciò che scrissi in anteriori pubblicazioni sulla Testa Ciarva, aggiungerò alcune poche parole relative a questo giacimento racchiuso dal serpentino compatto.

Quella parte del banco di granato che in passato fornì tanta copia di splendidi campioni specialmente di granato, diopside e di idocrasio in cristalli assai allungati e per lo più parzialmente bruni, si può dire quasi abbandonata, non tanto perchè i minerali vi siano esauriti, quanto per la difficoltà di lavorarvi ulteriormente con profitto. Invece più in alto e più verso ponente, sempre nella stessa Testa Ciarva, si rintracciò un banco analogo che potrebbe anche essere la continuazione del primo, e in questo luogo da qualche tempo si rinvengono pure il granato rosso-giacinto, il diopside, il

[1] G. v. Rath, Pogg. Ann. 1859, vol. 108, pag. 353; Hessenberg, Min. Not. 1858, II, pag. 13 e 1862, IV, pag. 15.

clinocloro, l'idocrasio, l'apatite e la calcite. Per ora noterò soltanto che vi è assai comune, più di certo che nell'antico banco, nei cristalli di granato la combinazione }110{ }211{ }332{ a faccie tutte splendenti, che la calcite vi è in cristalli }11$\bar{1}${ a superficie ruvida, e che l'apatite presenta ancora le stesse forme come alla Corbassera, a Saulera e alla Rocca Nera.

È a mio avviso abbastanza importante insistere ancor una volta sulla grande analogia fra i singoli giacimenti sinora noti di Val d'Ala. Se facciamo astrazione dai banchi intercalati negli schisti del colle del Pasciet, ove non mi consta la presenza della apatite, tutti gli altri giacimenti di granato, clinocloro e diopside, della Testa Ciarva, di Saulera e della Rocca Nera alla Mussa sopra Balme, e della Corbassera presso Ala, sono piuttosto ricchi di apatite, e quello che è più singolare, presentano in essa la medesima forma da me incontrata la prima volta alla Corbassera e non citata in altri luoghi, voglio dire la piramide $\frac{3}{2}$ P $\frac{3}{2}$ ossia }510 . 43$\bar{1}${. Vi si potrebbe aggiungere la forma costante di }11$\bar{1}${ nella calcite ove questa è cristallizzata.

Di altri giacimenti e minerali di Val d'Ala dirò dopo essere ritornato sul posto a fare più minute indagini.

Zoologia medica. — *Ulteriori ricerche sulla malaria.* 4ª Nota preliminare del Socio B. Grassi, A. Bignami e G. Bastianelli.

Abbiamo continuato le ricerche, rivolgendo la nostra attenzione principalmente ai seguenti punti:

I. Verificare quali altre specie di zanzare e zanzaroni siano ospiti dei parassiti malarici dell'uomo.

II. Completare lo studio dei varî stadî di sviluppo nel corpo dell'*Anopheles claviger* [1], ricercando sopratutto lo sviluppo delle spore brune.

III. Confermare o rifiutare l'ipotesi dell'infezione ereditaria, alla quale inclinavano specialmente due di noi.

Riassumiamo in breve i risultamenti principali delle nostre osservazioni.

Non abbiamo ancora potuto sperimentare sull'*A. pseudopictus*; abbiamo invece compiuto una serie di esperimenti sull'*A. bifurcatus* [2]. Gli individui, che furono adoperati tendevano alla varietà *nigripes*. Abbiamo sperimen-

(1) In queste nuove ricerche abbiamo avuto occasione di servirci con felice risultato anche di *Anopheles* neonati (vedi più avanti).

(2) Dopo l'esame di un certo numero di individui, raccolti in differenti località, ritengo col Ficalbi che l'*A. nigripes* sia una semplice varietà dell'*A. bifurcatus*, giudizio che mi riserbo di confermare coll'esame di moltissimi individui, nonchè delle larve e delle uova.
B. Grassi.

tato con questi insetti sopra un caso di infezione semilunare e sopra casi di terzana comune. Tanto per l' infezione semilunare, quanto per l' infezione terzenaria, abbiamo ottenuti risultati positivi. I varî stadî di sviluppo osservati nelle pareti dell' intestino degli *A. bifurcatus* corrispondevano perfettamente a quelli a noi già noti nell' *A. claviger*, tenuto nelle stesse condizioni di temperatura ed esaminato alla stessa distanza dal momento della puntura.

DUNQUE TUTTE LE SPECIE DEL GENERE *ANOPHELES*, DA NOI SPERIMENTATE, SI MOSTRARONO CAPACI DI PROPAGARE LA MALARIA UMANA.

Qualora si provi, ciò che speriamo di poter fare tra breve, che anche lo *pseudopictus* si comporta nello stesso modo, si potrà affermare che tutto il genere *Anopheles* d' Italia propaga la malaria.

Che l' *A. bifurcatus* dovesse avere un' importanza per la propagazione della malaria era del resto già stato supposto da uno di noi in seguito ad osservazioni comparative fatte in Calabria, e più specialmente a S. Eufemia.

Sui *Culex* finora le osservazioni ci hanno dato reperto negativo, ma oltrecchè su di essi abbiamo esperimentato molto meno, essi si prestano molto meno bene per il nostro studio; perciò continuiamo nelle nostre ricerche.

Nella nostra seconda Nota preliminare abbiamo detto che gli sporozoi di origine semilunare nelle pareti dell' intestino dell'*Anopheles*, dopo due giorni, appaiono subrotondi od ovoidi, di rado rotondi. Queste osservazioni si riferivano ai corpi che si rinvengono 48, o 50 ore dopo la puntura, tenendo l' insetto nel termostato a 30°.

Quando si abbiano preparati corrispondenti a 40 ore o poco meno, si vedono di raro corpi ovoidi o subrotondi; per lo più invece corpi fusati pressocchè identici all' esame a fresco, per la forma e per l' aspetto, ai corpi fusati che si vedono nel sangue umano, salvo il volume maggiore e la disposizione del pigmento.

Nei preparati colorati ([1]), questi corpi mostrano un grosso nucleo, con un ammasso di cromatina centrale rotondo od allungato: il protoplasma è già vacuolizzato.

Risulta adunque che lo sporozoo semilunare conserva, nei primi stadî, dentro lo spessore dell' intestino, la forma fusata ed è anche per questo carattere facilmente distinguibile dagli stadî corrispondenti della terzana e della

([1]) Il Ross lamenta di non aver potuto ottenere buoni preparati stabili. Noi invece ne abbiamo ottenuti di ottimi in tutti gli stadî, sia preparando l' intestino medio isolato, dal quale si può staccar via l' epitelio intestinale, sia sezionando gli *Anopheles* intieri. Come metodo di conservazione è molto raccomandabile il sublimato, e come metodo di colorazione l' ematossilina, sopratutto quella ferrica. Le sezioni *in toto* fanno vedere il parassita al di fuori dell' epitelio intestinale e della membrana anista sottostante, e sporgente dalla muscolare in mezzo al corpo adiposo, rendendo così più esatto il concetto che si può formare del parassita col semplice esame dell' intestino.

quartana. Per ciò che riguarda le spore brune, ecco quanto ci risulta dalle nostre osservazioni.

Facendo le culture metodiche delle semilune in qualche individuo rimasto in vita per molti giorni, abbiamo veduto, accanto alle capsule piene di sporozoiti ed alle capsule vuote, delle capsule raggrinzate, contenenti dei corpi bruni allungati e ricurvi, del tutto eguali a quelli disegnati dal Ross per il *Proteosoma* nella tav. I, fig. 20 del suo *Report*.

Negli *Anopheles*, presi in vita libera nelle case abitate da infermi per infezione malarica, si sono rinvenute anche capsule di varia grandezza, alcune molto grandi, con la parete molto distesa, contenenti corpi giallo-bruni, di dimensioni diverse, o rotondi od ovali o a salsicciotto, formati come di strati (2?) concentrici e al centro più trasparenti.

Evidentemente tutti questi reperti si riferiscono ai parassiti della malaria umana.

Nella seconda Nota abbiamo accennato che la irregolarità dei suddetti corpi bruni o giallo-bruni era tale da far pensare a processi degenerativi. Osservazioni dirette ulteriori e comparative su altri parassiti ci confermano in questa idea, e non solo per la irregolarità della forma e del volume di questi corpi, ma anche per il loro speciale aspetto stratificato siamo indotti a ritenerli come alterazioni regressive dello sporozoo. Uno di noi ne ha ingoiato una grandissima quantità in differenti epoche senza risentirne alcun effetto.

Ma oltre ai corpi in discorso che certamente appartengono al ciclo dei parassiti malarici, si possono rinvenire attorno all' intestino ed al vaso dorsale ammassi per lo più tubulari, od ampolliformi di spore, secondo ogni verosimiglianza appartenenti a sporozoi. Per lo più un certo numero di esse si presenta di color giallo-bruno, venendo a rassomigliare molto ai corpi suddetti appartenenti indubbiamente ai parassiti malarici e si possono seguire i varî stadî di formazione della membrana oscura, come si è già detto nella nostra seconda Nota. Allora non avevamo criterî sufficienti per stabilire se avessero o no rapporti col parassita malarico; lo sospettavamo però inducendolo dalla rassomiglianza suddetta: facevamo però notare che non avevamo potuto seguire il loro modo di sviluppo.

In seguito a moltissimi esami, non essendo mai riusciti a dimostrare che derivino dal parassita malarico, riteniamo ora che siano un parassita a sè, indipendente da quello della malaria. Così pure non abbiamo potuto riscontrare alcun stadio intermedio tra i parassiti malarici e le spore con otto sporozoiti che abbiamo scoperto nelle uova. Riteniamo pertanto che anch' esse rappresentino una specie a sè di parassiti.

Nella nostra seconda Nota si era accennato alla possibilità che il parassita malarico potesse trasmettersi dagli adulti alla prole, cossicchè gli *Anopheles*

potessero essere infetti prima di pungere, ossia nascere già infetti. Si fecero perciò moltissime ricerche sulle larve e sugli alati, sia appena sviluppati, sia sviluppati da molti giorni e nutriti con sangue di individui sani. Queste ricerche riuscirono finora negative non ostante che le condizioni fossero molto opportune, essendo gli esemplari da noi esaminati provenienti da madri prese nelle abitazioni di malarici. Queste madri, presumibilmente almeno in parte, dovevano essere state infette nell'autunno e nella prima metà dell' inverno. Notiamo in particolare che lo studio delle ghiandole salivari degli *Anopheles* neonati non ci ha rilevato alcun sporozoito.

Nella nostra seconda Nota abbiamo descritti, oltre ai tipici sporozoiti nelle ghiandole salivali, certe figure che a noi parve allora si potessero interpretare, quantunque con molta riserva, come sporozoiti, che non espulsi dalle ghiandole salivari, andassero incontro ad un processo di degenerazione.

Imagini in gran parte eguali a quelle allora descritte si vedono però anche nelle ghiandole salivali degli *Anopheles* neonati, e si possono con sicurezza riferire al processo di secrezione delle cellule ghiandolari, parzialmente anche ad artificio di preparazione. Occorre perciò modificare la nostra precedente interpretazione.

A S. Spirito si è sottoposto volontariamente alle punture degli *Anopheles* neonati un individuo che non ebbe mai febbri malariche. Esso è stato punto molte volte dal 30 marzo al 29 aprile da numerosi *Anopheles*, sviluppatisi in una camera dell' ospedale di S. Spirito [1]. Ciò nonostante ha goduto e gode di buona salute.

Nel laboratorio di Anatomia Comparata dopochè il direttore (prof. Grassi) si convinse che le zanzare neonate non possono essere infette, e ciò anche in seguito a molte osservazioni fatte sopratutto nelle Paludi Pontine, cinque persone appartenenti al laboratorio, tra le quali il Grassi stesso, si sottoposero volontariamente alle punture di moltissimi *A. claviger* nati in laboratorio da larve adulte, o da ninfe prese in punti differentissimi della campagna (a Maccarese, ad Ostia, a Porto, a Fiumicino, a Palidoro, a Tortreponti ecc.), in luoghi vicini ad abitazioni, dove la malaria ha infierito. Le prime punture datano dal 10 aprile. Le cinque persone continuano a farsi pungere tutti i giorni senza andar incontro a malaria. Abbiamo notato che gli *Anopheles* mostrano una strana preferenza per due delle cinque persone suddette. A queste due producono dei pomfi che durano per parecchi giorni: nella terza persona un piccolo pomfo compare soltanto dopo uno o due giorni. La cute delle due altre persone quasi non risente alcun effetto. Una di queste due (il Grassi) vien punto

[1] Le madri di questi *A. claviger*, provenienti da case di regioni molto malariche avevano deposte le uova nella seconda metà di febbraio. Le prime ninfe si videro dopo 15 a 20 giorni; i primi alati il 19 marzo. Questi punsero tre o quattro giorni dopo che si erano sviluppati. L'ambiente era a temperatura costante di 22°.

raramente soltanto da Anofeli affamati, a cui egli per lo più deve avvicinare la mano per attirarli.

È assai difficile pronunciarsi definitivamente su dati negativi; *finora però* si deve dire che quegli *Anopheles*, i quali non hanno punto individui malarici non sono infetti, ossia non sono capaci di inocularci la malaria e che l'unico modo di trasmissione della malaria umana è quello da noi scoperto e precisato nelle nostre Note preliminari. Noi però continuiamo negli esperimenti e nelle osservazioni su questo punto fondamentale del problema malarico, ben sapendo che un sol fatto positivo potrebbe mutare del tutto la questione.

Zoologia medica. — *Sui germi del pyrosoma nelle glandole salivari dei giovani Rhipicephalus.* Nota del Socio B. Grassi.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle funzioni reali di una variabile.* Nota di Paolo Straneo, presentata dal Socio Blaserna.

Un interessante problema di idrostatica condusse il prof. Somigliana alla considerazione del seguente problema di analisi [1].

Data una serie di numeri disposti arbitrariamente

$$a_1, a_2, a_3 \dots a_n, \tag{1}$$

è sempre possibile disporli in un nuovo ordine

$$a'_1, a'_2, a'_3 \dots a'_n, \tag{1'}$$

in modo che sia:

$$a'_i \leq a'_{i+1}.$$

Sia data ora una funzione $f(x)$ reale, ad un valore, sempre finita ed avente un numero finito di oscillazioni nell'intervallo finito da $x=a$ ad $x=b$. Si vuol trovare una nuova funzione della variabile x, la quale assuma tutti i valori della $f(x)$, sia sempre crescente nell'intervallo (a, b) ed inoltre abbia rispetto alla funzione data proprietà analoghe a quelle della serie (1′) rispetto alla serie (1).

Il prof. Somigliana dimostrò in generale l'esistenza della funzione *ordinata* cercata ed indicò un procedimento, che in alcuni casi può servire alla sua costruzione. Ora, appoggiandomi al teorema di esistenza della funzione

[1] Vedi questi Rendiconti, vol. VIII, pag. 4.

ordinata, io mi propongo di svolgere brevemente nella presente Nota un metodo generale per la sua determinazione analitica.

§ 1. *Proprietà della derivata prima della funzione ordinata per rapporto alla variabile.* Noi abbiamo supposto che la funzione data abbia nell' intervallo (a, b) un numero finito di massimi e minimi. Indichiamo con $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ le ordinate corrispondenti ad essi e con $f(x_1), f(x_2)$, $f(x_3) \ldots f(x_n)$ i valori corrispondenti della funzione.

Sia y' un valore qualunque di $f(x)$; ad esso corrisponderanno uno o più valori della variabile indipendente che indicheremo con $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots x'_m$, ove per la natura del problema si ha: $1 \leq m \leq n+1$. Indichiamo con $y' + \Delta y'$ un altro valore della funzione poco differente da y' e con $x'_1 + \Delta x'_1$, $x'_2 + \Delta x'_2$, $x'_3 + \Delta x'_3, \ldots x'_m + \Delta x'_m$ i corrispondenti valori della variabile indipendente, in cui le quantità $\Delta x'_1, \Delta x'_2, \Delta x'_3, \ldots \Delta x'_m$ possono essere alcune positive, altre negative.

Secondo la definizione della funzione ordinata $\mathrm{O}f(x)$, l' intervallo $\Delta x'$ corrispondente al passaggio della funzione $\mathrm{O}f(x)$ dal valore y' ad $y' + \Delta y'$, sarà uguale alla somma dei valori assoluti di tutti gli intervalli $\Delta x'_1, \Delta x'_2$, $\Delta x'_3, \ldots \Delta x'_m$; cioè si avrà l' eguaglianza:

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta \mathrm{O}f(x)}\right)_{\mathrm{O}f(x)=y'} = \frac{|\Delta x'_1| + |\Delta x'_2| + |\Delta x'_3| + \cdots + |\Delta x'_m|}{(\Delta f(x))_{f(x)=y'}}.$$

Passando al limite e ricordando che nelle condizioni in cui ci siamo posti la funzione $\mathrm{O}f(x)$ possiede evidentemente una derivata, avremo:

$$\left(\frac{dx}{d\mathrm{O}f(x)}\right)_{\mathrm{O}f(x)=y'} = \left(\left|\frac{dx}{df(x)}\right|\right)_{x=x'_1} + \left(\left|\frac{dx}{df(x)}\right|\right)_{x=x'_2} + \cdots + \left(\left|\frac{dx}{df(x)}\right|\right)_{x=x'_m},$$

ossia

$$\left(\frac{d\mathrm{O}f(x)}{dx}\right)_{\mathrm{O}f(x)=y'} = \frac{1}{\left(\left|\frac{dx}{df(x)}\right|\right)_{x=x'_1} + \left(\left|\frac{dx}{df(x)}\right|\right)_{x=x'_2} + \cdots + \left(\left|\frac{dx}{df(x)}\right|\right)_{x=x'_m}}.$$

Da questa formula si deduce facilmente: 1° che la derivata della funzione ordinata si annullerà ogni volta che questa assumerà valori eguali ai massimi e minimi della funzione data; 2° che se la funzione $f(x)$ ammette una derivata continua in tutto l' intervallo (a, b), la funzione ordinata ammetterà a sua volta una derivata, la quale sarà in generale discontinua solo per i valori di $\mathrm{O}f(x)$ eguali ai valori di $f(x)$ corrispondenti ai limiti $x = a$ ed $x = b$; si deve eccettuare solo il caso in cui la $f(x)$ possieda in questi punti una derivata nulla, al quale caso corrisponderà una derivata della $\mathrm{O}f(x)$ continua in tutto l' intervallo (a, b).

§ 2. *Espressione analitica della derivata* $\frac{d\mathrm{O}f(x)}{dx}$ *e deduzione della funzione ordinata.* Rappresentiamo con $\mathrm{F}_1(x)$, $\mathrm{F}_2(x)$, ... $\mathrm{F}_{n+1}(x)$ funzioni che per valori di $f(x)$ compresi fra $f(a)$ ed $f(x_1)$, $f(x_1)$ ed $f(x_2)$, ... $f(x_n)$ ed $f(b)$ assumano rispettivamente i valori del modulo di $\frac{dx}{df(x)}$ in ognuno di questi intervalli e si annullino per ognuno degli altri valori di $f(x)$.

Similmente indichiamo con $\mathrm{OF}(x)$ una funzione che assuma nell' intervallo (a, b) i valori della funzione $\frac{1}{\frac{d\mathrm{O}f(x)}{dx}}$ e si annulli fuori di esso.

Allora avremo evidentemente l' equazione:

$$\mathrm{OF}(x) = \mathrm{F}_1(x) + \mathrm{F}_2(x) + \cdots + \mathrm{F}_{(n+1)}(x),$$

dalla quale si potrà dedurre $\frac{d\mathrm{O}f(x)}{dx}$ e quindi integrando la $\mathrm{O}f(x)$ cercata. La costante di integrazione si determinerà evidentemente in modo che per $x = a$ la funzione $\mathrm{O}f(x)$ assuma il valore minimo assoluto della funzione $f(x)$.

Le funzioni $\mathrm{F}_1(x)$, $\mathrm{F}_2(x)$, ... $\mathrm{F}_{n+1}(x)$ si potranno formare rispettivamente, o moltiplicando il modulo della derivata $\frac{dx}{df(x)}$ per quantità (in generale per integrali definiti) che abbiano il valore *uno* nel corrispondente intervallo e *zero* fuori di esso, oppure usando qualcuna delle note rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile data arbitrariamente in un intervallo ed annullantesi fuori di esso.

In entrambi i casi bisognerà analizzare in modo speciale le singolarità che in generale avvengono ai limiti di queste rappresentazioni. Se si fa uso dell' integrale di Dirichlet $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos(\varphi y)\,dy$, oppure del doppio integrale di Fourier, ai limiti la funzione rappresentata avrà un valore uguale alla metà di quello che dovrebbe realmente avere; nel nostro caso però corrispondendo ai valori limiti $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... $f(x_n)$ valori infiniti della derivata $\frac{dx}{df(x)}$, potremo limitare la nostra ricerca particolare ai valori $f(a)$ ed $f(b)$.

L'estensione del metodo esposto ai casi di discontinuità considerati dal prof. Somigliana non presenta alcuna nuova difficoltà.

§ 3. Proponiamovi di determinare come esempio semplice la relazione generale fra una funzione $f(x)$ simmetrica rapporto all' ordinata in $\frac{a+b}{2}$, sempre crescente fra a ed $\frac{a+b}{2}$ e sempre decrescente fra $\frac{a+b}{2}$ e b, e la

sua corrispondente funzione ordinata. Questo esempio differisce poco da quello scelto dal prof. Somigliana al fine della sua Nota.

Noi avremo dunque per definizione l'identità:

$$f\left(\frac{a+b}{2}+x\right)\equiv f\left(\frac{a+b}{2}-x\right)$$

e derivando per rapporto ad x:

$$(\alpha) \qquad f'\left(\frac{a+b}{2}+x\right)\equiv -f'\left(\frac{a+b}{2}-x\right).$$

Per costruire le $\mathrm{OF}(x)$, $F_1(x)$ ed $F_2(x)$ facciamo uso dell'integrale di Dirichlet:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos(\varphi y)\, dy$$

il quale ha costantemente il valore 1 per $-1<\varphi<1$, il valore zero per $-1>\varphi>1$ ed il valore $\frac{1}{2}$ per $\varphi=\pm 1$. Potremo evidentemente assumono per le $F_1(x)$, $F_2(x)$ e $\mathrm{OF}(x)$ le espressioni:

$$F_1(x)=\frac{1}{f'(x)}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos\left(y\cos\frac{x-a}{\frac{a+b}{2}-a}\pi\right)dy\,,$$

$$F_2(x)=-\frac{1}{f'(x)}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos\left(y\cos\frac{x-\frac{a+b}{2}}{b-\frac{a+b}{2}}\pi\right)dy\,,$$

$$\mathrm{OF}(x)=\frac{1}{\frac{d\mathrm{O}f(x)}{dx}}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos\left(y\operatorname{sen}\frac{2x-a-b}{b-a}\frac{\pi}{2}\right)dy\,.$$

Facciamo nel primo integrale $x=\frac{a+b}{2}+\lambda$, nel secondo $x=\frac{a+b}{2}-\lambda$ e sommiamo. Avremo:

$$F_1(x)+F_2(x)=\frac{1}{f'\left(\frac{a+b}{2}+\lambda\right)}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos\left(y\cos\frac{b-a+2\lambda}{b-a}\pi\right)dy-$$

$$-\frac{1}{f'\left(\frac{a+b}{2}-\lambda\right)}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos\left(y\cos\frac{2\lambda}{b-a}\pi\right)dy\,.$$

Serviamoci della identità (α) e mutiamo $f'\left(\frac{a+b}{2}-\lambda\right)$ in $-f'\left(\frac{a+b}{2}+\lambda\right)$.

Si avrà:

$$F_1(x)+F_2(x)=\frac{1}{f'\left(\frac{a+b}{2}+\lambda\right)}\cdot\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen} y}{y}\left[\cos\left(y\cos\frac{b-a+2\lambda}{b-a}\pi\right)+\right.$$
$$\left.+\cos\left(y\cos\frac{2\lambda\pi}{b-a}\right)\right]dy\,.$$

Applicando ripetutamente la formula di trasformazione trigonometrica: $\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma).\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ si giunge facilmente alla formula:

$$F_1(x)+F_2(x)=\frac{2}{f'\left(\frac{a+b}{2}+\lambda\right)}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos\left(y\operatorname{sen}\frac{b-a+4\lambda}{b-a}\frac{\pi}{2}\right)dy.$$

Poniamo finalmente $\lambda=\frac{x-b}{2}$ ed avremo:

$$F_1(x)+F_2(x)=\frac{2}{f'\left(\frac{x+a}{2}\right)}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos\left(y\operatorname{sen}\frac{2x-a-b}{b-a}\frac{\pi}{2}\right)dy\,.$$

Ma $F_1(x)+F_2(x)=OF(x)$; quindi quest'ultima espressione deve essere identica a quella assunta per $OF(x)$, donde segue:

$$\frac{dOf(x)}{dx}=\frac{1}{2}f'\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

e quindi:

$$Of(x)=f\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

essendo nulla la costante di integrazione.

Matematica. — *Sopra alcune formole fondamentali relative alle congruenze di rette.* Nota del dott. P. Burgatti, presentata dal Socio Cerruti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Confronti degli strumenti magnetici italiani con quelli degli Osservatorî di Parc Saint-Maur e di Kew.* Nota di Luigi Palazzo, presentata dal Socio Tacchini.

Kew. — 2-3 Settembre 1898.

Le operazioni furono quivi compiute nel padiglione speciale, detto « *magnetic house* » del giardino dell'osservatorio. Installai il teodolite magnetico sul pilastro di mezzo, e collocai invece l'inclinometro sul pilastro laterale ad est del primo, appunto come usano di fare gli osservatori di Kew. Per la lettura dei tempi, fu messo a mia disposizione un cronometro di marina (Bréguet n. 3194), a mezzi secondi, regolato sul tempo medio di Greenwich, avanzante solo di 1^s al giorno. Il direttore sig. Chree (dal quale, nonchè dal primo assistente sig. Baker, io ricevetti molte gentilezze ed aiuti) mi fece conoscere più tardi, per i tempi delle mie esperienze, i valori rilevati al magnetografo dell'osservatorio e tradotti in misura assoluta mediante apposite determinazioni eseguite cogli strumenti normali di Kew, nei giorni 29 agosto e 6 settembre.

I confronti fatti durante il 2 settembre corrispondono ad una situazione magnetica relativamente calma, ma nella sera sopraggiunse una perturbazione abbastanza rilevante, la quale si estese a quasi tutto il successivo giorno 3, come ho appreso dai magnetogrammi inviatimi da Kew.

Declinazione. — L'azimut della mira, che è un segno impresso sul basamento di un piccolo obelisco alla distanza di 400 metri, vale 2° 48',7 contati da N ad E. L'immagine della mira, a causa delle correnti d'aria ascendenti dall'interposto terreno erboso assai soleggiato, appariva alquanto tremolante. — Il filo di sospensione era totalmente privo di torsione.

Declinazione.

Giorno	Ora	Declinazione misurata con lo strumento di Roma	Declinazione dedotta dal magnetografo di Kew	Differenze Roma-Kew
1898 Settembre	h m	° '	° '	'
2	9.58 am	17. 2,4	17. 3,2	— 0,8
	10.20 »	17. 3,2	17. 3,7	— 0,5
	0.46 pm.	17. 8,8	17. 9,7	— 0,9
	1. 6 »	17. 9,2	17. 9,8	— 0,6
3	2. 9 pm.	17. 9,5	17.10,0	— 0,5
	2.32 »	17. 8,3	17. 9,4	— 1,1
	5. 3 »	17. 1,1	17. 1,6	— 0,5
	5.22 »	17. 0,6	17. 1,2	— 0,6
			Media differenza	— 0',7

Inclinazione. — Anche a Kew mi sono valso di tutti e quattro gli aghi dell'istrumento, facendo due determinazioni per ciascuno.

INCLINAZIONE.

N. d'ordine dell'osservaz.	Ago	Tempo dell'osservazione: Giorno	Tempo dell'osservazione: Ora	Inclinazione misurata coll'inclinometro di Roma	Valori dedotti dal magnetografo di Kew: Z	Valori dedotti dal magnetografo di Kew: H	Inclinazione calcolata per Kew $i = \text{arc tg}\frac{Z}{H}$	Differenze Roma-Kew	Differenze medie per ciascun ago
		Settemb. 1898	h m h m	° ′			° ′	′	′
1ª	5	2	3.18- 3.40 pm.	67.14,9	0,43850	0,18373	67.16,0	— 1,1	— 1,8
7ª	5	3	11.45 am.- 0.8 pm.	67.16,8	0,43834	0,18316	67.19,4	— 2,6	
3ª	6	2	4.30- 4.56 pm.	67.14,3	0,43858	0,18368	67.16,5	— 2,2	— 0,6
6ª	6	3	10.50-11.18 am.	67.20,2	0,43833	0,18318	67.19,2	+ 1,0	
4ª	1	2	5.12- 5.42 pm.	67.16,1	0,43859	0,18373	67.16,2	— 0,1	— 0,2
5ª	1	3	9.38-10.13 am.	67.19,8	0,43824	0,18299	67.20,2	— 0,4	
2ª	2	2	3.52- 4.18 pm.	67.15,2	0,43856	0,18378	67.15,8	— 0,6	— 0,2
8ª	2	3	0.22- 0.44 pm.	67.20,0	0,43840	0,18312	67.19,8	+ 0,2	
							Media differenza	—0,′7	

Intensità orizzontale. — Le osservazioni di H a Kew furono calcolate con una coppia di formole analoghe a quelle sopra riportate per Parc Saint-Maur; solo ne è risultato leggermente modificato il logaritmo del primo termine (costante) delle formole, così:

$\bar{1}.701288$ *per le deviazioni alla distanza* R_{30},

$\bar{1}.511574$ *per le deviazioni alla distanza* R_{40},

essendosi applicati, nei termini di correzione, i valori costanti o medî proprî delle misure di Kew:

$\Delta = 3',3$; $s = -1^s$; medio $t = 24°,65$; H appross. $= 0,1835$;
medio $\Phi = 27°\ 36',75$ col corrispondente medio $\theta = 23°,85$;
medio $\varphi = 11\quad 9,5$ » » $\theta = 24,3$.

SCHEMA DELLE OSSERVAZIONI.

	Tempi delle osservazioni	Durate d'oscillazione	t	Angoli di deviazione	τ	Valori di *H* dedotti dal magnetografo di Kew
1ª Serie. 1898 Settembre 2.	h m h m Da 10.31-10.44 am.	s T_1 4,01925	° 19,3			0,18342
	11. 8-11.27 »			° ′ Φ_1 27.41,4	° 21,1	0,18347
	11.27-11.42 »			φ_1 11.11,2	21,5	0,18349
	11.45-12. 0 »			Φ_2 27.39,6	21,9	0,18356
	0. 0- 0.17 pm.			φ_2 11.10,6	22,2	0,18357
	0.29- 0.42 »	T_2 4,02005	22,6			0,18363
2ª Serie. 1898 Settembre 3.	h m h m 2.43- 2.56 pm.	s T_1 4,0309	° 28,4			0,18326
	3.16- 3.32 »			° ′ Φ_1 27.33,8	° 28,0	0,18347
	3.32- 3.46 »			φ_1 11. 8,2	28,2	0,18358
	3.52- 4. 4 »			Φ_2 27.32,2	28,4	0,18362
	4. 4- 4.20 »			φ_2 11. 8,1	28,3	0,18358
	4.30- 4.43 »	T_2 4,02705	28,3			0,18361

Deduzione dei valori dell'intensità orizzontale.

	Col magnete alla distanza	Combinazione di	Durata d'oscillazione	Angolo di deviazione	$t - \tau$	H determinato col magnetometro di Roma	H dato dal magnetografo di Kew	Differenze Roma-Kew
			s	° ′	°			
1ª Serie. 1898 Settembre 2.	R_{30}	T_1 e Φ_1	4,01925	27.41,4	− 1,8	0,18338	0,18344	− 0,00006
		T_1 e Φ_2	4,01925	27.39,6	− 2,6	0,18344	0,18349	− 0,00005
		T_2 e Φ_1	4,02005	27.41,4	+ 1,5	0,18350	0,18355	− 0,00005
		T_2 e Φ_2	4,02005	27.39,6	+ 0,7	0,18356	0,18360	− 0,00004
	R_{40}	T_1 e φ_1	4,01925	11.11,2	− 2,2	0,18335	0,18345	− 0,00010
		T_1 e φ_2	4,01925	11.10,6	− 2,9	0,18340	0,18349	− 0,00009
		T_2 e φ_1	4,02005	11.11,2	+ 1,1	0,18347	0,18356	− 0,00009
		T_2 e φ_2	4,02005	11.10,6	+ 0,4	0,18351	0,18360	− 0,00009
Differenza media nel giorno 2 settembre								− 0,00007
2ª Serie. 1898 Settembre 3.	R_{30}	T_1 e Φ_1	4,0309	27.33,8	+ 0,4	0,18334	0,18337	− 0,00003
		T_1 e Φ_2	4,0309	27.32,2	0,0	0,18341	0,18344	− 0,00003
		T_2 e Φ_1	4,02705	27.33,8	+ 0,3	0,18351	0,18354	− 0,00003
		T_2 e Φ_2	4,02705	27.32,2	− 0,1	0,18358	0,18361	− 0,00003
	R_{40}	T_1 e φ_1	4,0309	11. 8,2	+ 0,2	0,18334	0,18342	− 0,00008
		T_1 e φ_2	4,0309	11. 8,1	+ 0,1	0,18334	0,18342	− 0,00008
		T_2 e φ_1	4,02705	11. 8,2	+ 0,1	0,18351	0,18359	− 0,00008
		T_2 e φ_2	4,02705	11. 8,1	0,0	0,18352	0,18360	− 0,00008
Differenza media nel giorno 3 settembre								− 0,00005·5
Differenza media finale								**−0,00006**

RIEPILOGO.

Il seguente specchietto riassume i risultati medî dei nostri confronti nei due istituti esteri.

	Differenze strumentali	
	Roma-Parc St. Maur	Roma-Kew
Per la declinazione	+ 0′,6	− 0′,7
Per l'inclinazione	− 1′,9	− 0′,7
Per l'intensità orizzontale	− 0,00009	− 0,00006

Risalta subito dal quadro che le differenze ivi notate cadono tutte quante al disotto di quei ragionevoli limiti di precisione a cui i magnetologi si prefiggono di arrivare, e che essi credono nel fatto di poter conseguire cogli abituali strumenti. Tali limiti sarebbero: ± 1′ nella declinazione, ± 2′ nell'inclinazione (1), ± 0,0001 C.G.S. nell'intensità orizzontale (2).

(1) Spesso si palesano anzi differenze notevolmente maggiori di 2′, non solo fra aghi od inclinometri diversi, ma perfino fra aghi della stessa lunghezza e fra inclinometri del medesimo modello, come ha constatato il Rijickevorsel.

(2) I numeri esprimenti H nel sistema C. G. S. si scrivono di consueto fino alla quinta cifra decimale, ma è noto come in misura assoluta non si possa garantire l'esat-

Se poi lasciamo di considerare le differenze medie finali, e riportiamo invece la nostra attenzione sulle tabelle precedenti, passandone in rassegna i singoli risultati, l'esito dei nostri confronti ci appare, per nuovi motivi, molto lusinghiero.

Infatti, nelle serie delle differenze in declinazione Roma-Parc St. Maur e Roma-Kew, si trova che il parallelismo fra i risultati delle osservazioni dirette ed i dati dei rispettivi magnetometri si mantiene quasi perfetto, cioè a meno di circa $\pm 0',2$ intorno alla differenza strumentale media; una sola volta lo scostamento di un'osservazione isolata dal medio finale ha raggiunto il valore massimo $0',5$, quantità tuttavia piccola [1], se si pensa che i nonî del cerchio orizzontale del nostro teodolite permettono solo di leggere, ed in modo non del tutto sicuro, i $20''$.

In quanto all'inclinazione, rilevasi una maggiore saltuarietà nella successione dei valori delle differenze, poichè, come già ho avvertito, qualcuno de' miei aghi lascia a desiderare. Tuttavia, posso pur dire che l'esito ha superato la mia aspettativa, dal momento che la massima divergenza presentatasi fra una determinazione isolata d'inclinazione ed il risultato medio della rispettiva serie, fu di soli $2',5$ (v. l'osservazione 2ª fatta al Parco); ora, è da tutti ammesso che col metodo dell'inclinometro, l'inclinazione da una sola osservazione non si possa avere che entro 2 o $3'$ d'esattezza.

Nell'intensità orizzontale, si manifesta nuovamente la migliore corrispondenza fra le osservazioni mie dirette e le successive posizioni segnalate ai magnetografi. Gli scarti delle singole osservazioni dalla differenza strumentale media si elevano a non più di 4 unità della quinta decimale di H; in altri termini, col mio magnetometro io ho seguito di pari passo, a meno di $\pm 0,00004$, tutte le variazioni che si verificarono nell'intensità orizzontale, anche se queste furono piuttosto rapide e forti, come nella perturbazione del 3 settembre a Kew [2].

---

tezza più in là della quarta decimale, il che corrisponde ad un'incertezza relativa $dH:H = \pm 0,0005$ circa. Un accordo fra magnetometri diversi che si spinga fino ad 1 unità della quarta decimale di H, deve apparire già ben grande a chi consideri, per esempio, la grave incertezza che trae con sè la determinazione del momento d'inerzia per causa della inomogeneità dei corpi di sopracarico (anelli o cilindri), ovvero rifletta alle non lievi difficoltà che si oppongono ad ottenere il coefficiente magnetometrico con quell'eccellenza di precisione quale si esige.

[1] Giova rammentare a questo proposito che il Rijckevorsel, a pag. 7 del suo lavoro del 1890 (v. citazioni in principio), dice che l'incertezza di un minuto d'arco è all'incirca il grado di precisione che si può aspettare da una buona osservazione di declinazione, ed egli ammette inoltre un altro minuto d'incertezza come proveniente dallo spoglio delle curve fotografiche.

[2] Si sarà tuttavia notata, nelle determinazioni col magnete deviante a R_{40}, una certa tendenza a dare sistematicamente valori di H un pochino più bassi di quelli ottenuti dalle deviazioni col magnete a R_{30}. La differenza è in media di 3 unità della

Non potevasi dunque augurare un più confortante successo per le nostre determinazioni comparative di Parc Saint-Maur e di Kew; laonde è giustificato asserire che sotto ogni riguardo (cioè: — sia per la precisione assoluta che sembra spettare ai nostri risultati medî, qualora si considerino come capisaldi i dati forniti da quei due importantissimi osservatorî europei, — e sia per la piccolezza degli errori proprî delle nostre osservazioni isolate) l'attendibilità e la bontà delle misure fatte cogli strumenti e coi metodi adottati dall'Ufficio Centrale Meteorologico Italiano sono poste fuori di discussione [1].

Fisica terrestre. — *Sopra alcune obbiezioni sollevate contro il sismometrografo a registrazione veloce-continua.* Nota di A. Cancani, presentata dal Socio Tacchini.

Una recente Nota del mio amico e collega prof. G. Agamennone, *sopra un sistema di doppia registrazione negli strumenti sismici* [2] mentre mi costringe a rispondere a varie obbiezioni da lui sollevate contro l'apparecchio a registrazione veloce-continua, da me costruito per l'osservatorio geodinamico di Rocca di Papa e descritto in questi rendiconti, [3] mi dà occasione di far cenno del modo con cui, in questi pochi mesi di esperienza, l'apparecchio medesimo si è comportato.

L'Agamennone, dopo aver notato come, nell'apparecchio a doppia registrazione da lui costruito, *non resterebbe che a lamentare la mancanza di registrazione rapida sia dei tremiti precedenti il movimento un po' più sensibile — quello appunto che deve iniziare lo scorrimento della carta affumicata — sia degli ultimi tremiti che precedono il ritorno del suolo al suo*

---

quinta decimale, quantità che in pratica è davvero insignificante. Io non saprei indicare ove risieda la vera causa di questa differenza; può darsi che a produrla concorra anche l'influenza residua di quei termini superiori dello sviluppo in serie che, nella formola delle deviazioni, vengono trascurati.

[1] È lungi però da noi il pensiero di esagerare la portata del presente saggio, poichè non sappiamo se, tornando a ripetere i confronti in altra occasione, si troverebbe che le differenze strumentali si sono mantenute, o meno, le medesime. Le prove in questo senso, fatte da altri sperimentatori, non sono troppo rassicuranti. E così, se noi proviamo a dedurre le differenze *Roma-Kew* dalla combinazione delle nostre attuali *Roma-Parco* con quelle *Parco-Kew* stabilite dal Moureaux nel 1897, ci risultano valori alquanto differenti da quelli trovati adesso per via diretta a Kew; ma è altresì vero che a noi mancano gli elementi per giudicare se dal 1897 al 1898 non vi sia stato nulla di cambiato nelle condizioni relative agli strumenti del Parco e di Kew.

[2] Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. VIII, seduta del 19 febb. 1899.

[3] Ibid. Seduta dell'8 genn. 1899.

abituale riposo, così si esprime: *Il Cancani, col proporre di far scorrere rapidamente, giorno e notte, la carta affumicata sotto gli stili dello strumento, avrebbe cercato di colmare la lacuna da noi ora accennata. Ma se il problema è in se stesso indubitatamente importante ed a prima vista seducente, credo però che sia ancora ben lontano dall'essere risoluto in modo pratico col registratore veloce-continuo del Cancani.* A ciò rispondo che credo di non aver solamente cercato di colmare la lacuna accennata, ma di averla effettivamente colmata, e di aver risoluto il problema in modo pratico. Espongo infatti tutte le obbiezioni fattemi dal collega, passandole in rassegna ad una ad una.

1ª obbiezione. *Anzitutto la velocità adottata (di 6 metri all'ora, corrispondente a 10 cm. al minuto soltanto) è del tutto insufficiente per un' analisi completa dei moti rapidissimi, e pe' quali forse neppure basterà la velocità più che doppia adottata nei miei strumenti.*

Il periodo di questi modi rapidissimi, quando anche fosse di un decimo di secondo, si può perfettamente discernere colla registrazione a nero fumo, e si può ben misurare, occupando sulla zona la lunghezza di mm. 0,16. Questa lunghezza, oltre che si distingue ad occhio nudo, si discerne comodamente col sussidio di una lente. La velocità sarebbe insufficiente, se facessi uso della registrazione ad inchiostro, ma colla registrazione a nero fumo, colla quale si ottengono dei tracciati di una nitidezza estrema, e colla velocità di 6 metri all' ora, rimangono perfettamente distinte le ondulazioni di un decimo di secondo di periodo, come rimarrebbero anche distinte, se ve ne fossero, ondulazioni di periodo assai più breve.

2ª obbiezione. *Il Cancani considera il solo caso di due stili mentre l'adozione di un terzo, per la componente verticale, non può oramai essere rimandata più a lungo.*

Io non ho considerato il caso di un determinato numero di stili, come dice il collega, ma ho studiato il problema di una registrazione continua a grande velocità. Il numero degli stili da adottarsi è questione del tutto indipendente dal sistema di registrazione. Ritengo che sia preferibile un apparecchio separato per la componente verticale, ma se si volesse ritornare all' antico sistema Brassart, e registrare sulla medesima zona anche la 3ª componente, non si dovrebbe far altro che aumentare la larghezza della zona medesima. E se la larghezza del cilindro del mio apparecchio è insufficiente si può aumentare a piacere.

3ª obbiezione. *Egli cerca fare a meno di un quarto ago destinato a segnare il tempo.*

L' ago destinato a segnare il tempo, che trovavasi negli antichi apparecchi Brassart, fu abbandonato da me e dal collega Agamennone, per gl' inconvenienti gravi che presentava. Da me si ricorse all' espediente semplicissimo del sollevamento degli stili, che, coll' esperienza di sei anni, ho trovato

assai utile e comodo, dal mio collega si ricorse invece più tardi all'espediente di uno spostamento laterale brusco della zona per segnare le ore e le frazioni di ora. Io apprezzo moltissimo il sistema del mio collega, ma non l'ho adottato, 1° per mantenere la semplicità del mio sistema, 2° perchè avrebbe reso più costoso il mio apparecchio, 3° perchè l'apparecchio stesso non si prestava a questa adozione. Volendo inscrivere il tempo ad ogni minuto e non prestandosi facilmente il mio apparecchio allo spostamento della zona, si possono adottare tanti altri metodi che è facile escogitare, come, ad esempio, imprimere automaticamente un piccolissimo urto laterale all'estremità capillare degli stili, tracciare dei piccoli tratti trasversali a distanza costante dalla estremità degli stili, ecc.

4ª obbiezione. *Il margine lasciato all'escursione massima di ogni stilo mi sembra troppo piccolo (appena 2 cm.), specie se si tratti di uno strumento a grande moltiplicazione.*

Questo margine di due centimetri, è bensì uno dei margini della zona, quando questa trovisi ad uno od all'altro degli estremi della sua corsa laterale, ma gli stili possono uscire dalla zona, oscillare liberamente e rientrarvi senza perturbazioni, dopo avere compiuto una grande escursione. Ora quando la formazione del diagramma avvenga in prossimità di uno dei bordi della zona si potrà perdere una parte del tracciato delle grandi oscillazioni; ma che cosa importa perder in questi casi eccezionali quella parte del diagramma quando se ne ha la parte simmetrica completamente tracciata? Può dirsi che, in sostanza, nulla si perde.

5ª obbiezione. *Questo è l'inconveniente ancor più grave, lo spostamento laterale della striscia di carta ad ogni intero giro della stessa mi sembra troppo insignificante (1mm.) perchè non si debba con ragione temere — specie in occasione d'un terremoto un pò lungo ed intenso — che si confondano maledettamente gli uni cogli altri i numerosi tracciati d'ogni stilo quasi interamente sovrapposti.*

L'inconveniente grave della confusione maledetta, come la chiama il mio collega, non esiste menomamente. Ed infatti, se il diagramma è di piccola larghezza, e quindi anche di breve durata, la sovrapposizione non avviene, è chiaro, per doppia ragione; se il diagramma poi è di larghezza tale da far temere una sovrapposizione dopo il 1° giro, la persona incaricata della sorveglianza degli apparecchi viene chiamata, sia da un tromometro avvisatore, sia da una suoneria comandata dall'istesso sismometrografo, e, con tutto agio, imprime un conveniente spostamento laterale al tamburo motore della zona, evitando così qualsiasi pericolo di sovrapposizione o confusione dei tracciati. A tal fine il sostegno del tamburo motore della zona è disposto in maniera da potersi spostare lateralmente scorrendo fra due regoli di acciajo. Fa meraviglia veramente, il vedere come il collega Agamennone abbia potuto supporre, che io non avessi preveduto l'inconveniente scaturito dalla sua imma-

ginazione, o che non avessi saputo trovare un modo tanto semplice per evitarlo. L'esperienza del resto mi ha dimostrato che si ottengono diagrammi di una chiarezza meravigliosa, senza confusione di sorta, di 5^{mm} di larghezza e di un metro di lunghezza, senza che siasi trovato necessario lo spostamento della zona.

6ª obbiezione. *S'aggiunga a tutto ciò la noia di dovere immancabilmente mattina e sera cambiare la carta affumicata e fissare i tracciati ottenuti in ragione di due al giorno.*

In quanto alla noia che deve avere l'inserviente di un osservatorio, nel cambiare immancabilmente mattina e sera la carta affumicata, non mi pare sia il caso di preoccuparsene, poichè questa noja non importa che la perdita di tempo di un paio di minuti al più la mattina e la sera; in quanto al fissare i tracciati è da tener presente che questi si fissano solo quando contengano qualche diagramma, altrimenti si cancellano per utilizzare nuovamente la zona.

La zona di carta laccata che ora adotto, è di 16^{cm} di larghezza, poichè i rotoli di questa carta che trovansi in commercio, e che hanno la larghezza di 50^{cm}, si vengono a dividere in tre parti che hanno approssimativamente quella larghezza. Non so comprendere come il mio collega abbia visto la necessità che avrei di ricorrere a striscie *per lo meno della larghezza di un metro!*

Concludendo posso asserire che l'apparecchio da me costruito, per la sua semplicità, per la mitezza estrema delle spese di costo e di manutenzione che importa, e per tutti i dettagli che è in grado di fornire, risolva molto semplicemente tutti i problemi più interessanti della sismologia.

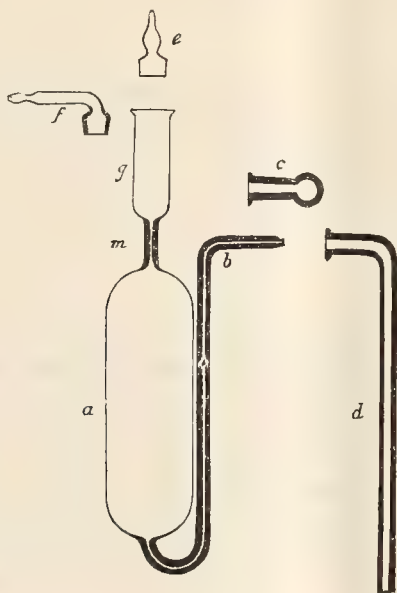
Non intendo con ciò disprezzare o disapprovare gli apparecchi ed i metodi escogitati con tanto zelo ed intelligenza dall'Agamennone, ma anzi faccio voti che, in tutti gli osservatorî di prim'ordine, il mio apparecchio possa trovarsi accanto a quelli del mio amico e collega.

Chimica fisica. — *Di una modificazione al picnometro di Sprengel* [1]. Nota del dott. A. Minozzi, presentata dal Corrispondente R. Nasini.

Avendo lo scorso estate intrapreso lo studio sull'energia degli acidi in solventi diversi dall'acqua col metodo volumchimico e dovendo perciò eseguire molte determinazioni di densità di liquidi assai dilatabili, volatili ed igroscopici, mi trovai imbarazzato nella scelta di un picnometro che mi convenisse completamente.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova.

Quello usato dall' Ostwald (1) e dal Ruppin (2) nei loro studî volumchimici presenta, a differenza di quello originale di Sprengel (3), una facilità e rapidità di riempimento che lo fa preferire; ma se la temperatura a cui avviene la pesata è, anche di poco, superiore a quella del bagno, il liquido dilatandosi esce dal picnometro. Il Perkin (4) ha già proposto una sua modificazione per ovviare a questo inconveniente e per facilitare la messa al punto, ma il suo picnometro non presenta nel maneggio alcun vantaggio sull' originale di Sprengel. Inoltre, se si tratta di una soluzione con un solvente abbastanza volatile ed igroscopico, con tutti questi picnometri si può incorrere in cause di errori non trascurabili durante il riempimento.

Perciò pensai di apportare al picnometro usato dall' Ostwald, e che non è altro che una modificazione di quello di Sprengel, delle leggere aggiunte in modo che esso accoppiasse tutti i vantaggi e rispondesse alle condizioni delle mie esperienze.

La figura annessa rappresenta il mio picnometro circa a $^1/_3$ del vero.

Il suo contenuto è di circa 50 cm. dal segno *m*, inciso sul tratto di tubo capillare verticale, all' estremità della branca *b*. Il calibro dei tubi in questi due punti è un po' minore del resto, percio l' errore dovuto al menisco è ridotto al minimo.

Il suo riempimento avviene facilmente mediante assorbimento con un mezzo qualunque, dopo aver adattati i pezzi accessori *f* e *d* alle sue estremità. La squadra *d* attraversa un tappo a due fori che chiude un matraccino con-

(1) Journ. prak. Ch. *18*, pag. 328.
(2) Zeit. phys. Ch. *14*, pag. 467.
(3) Pogg. Ann. *150*, pag. 459.
(4) Journ. prak. Ch. *31*, pag. 486.

tenente il liquido o la soluzione da esperimentare; l'altro foro del tappo porta un'altra piccola squadra a cui è unito un tubo disseccante. La squadra a tappo *f* è congiunta ad una pompa o meglio ad un apparecchio a bilico avente il mercurio come liquido.

Il riempimento può esser fatto benissimo mantenendo il matraccino ed il picnometro nel bagno; si avvantaggia così del tempo che si perderebbe in una seconda determinazione aspettando che il contenuto del picnometro raggiungesse la temperatura voluta.

Si mette poi il liquido al punto, assorbendo il liquido eccedente con una listarella di carta bibula appoggiata all'estremità della branca *b*, indi si adatta a questa estremità la capsulina a smeriglio *c* e si chiude l'altra col tappo *e*.

Se la temperatura ambiente è più alta della temperatura del bagno, il liquido del picnometro dilatandosi non può uscire dalla branca *b*, ma s'innalza nel prolungamento *g* dove trova spazio sufficiente.

Fisica. — *Sopra la forza elettromotrice di alcuni sistemi di pile a concentrazione e di pile rame-zinco con solventi organici.* Nota preliminare di ROBERTO SALVADORI, presentata dal Corrispondente R. NASINI.

Riferisco alcuni dati sperimentali di forza elettromotrice fino dall'anno scorso ottenuti con diversi sistemi di pile a concentrazione ad elettrodi di zinco, e con alcune pile rame-zinco adoperando invece dell'acqua alcuni dei solventi organici più usati. Quantunque non siano che esperienze preliminari e incomplete pure credo opportuno di comunicarle egualmente poichè vedo che già si annunziano come prossimi lavori sistematici su questo argomento; è inutile che io dica che non intendo affatto con ciò riservarmi questo campo di ricerche e sarò anzi contento se anche altri ci lavoreranno.

Non credo di dover stabilire per ora delle considerazioni sui risultati ottenuti, sembrandomi troppo presto e azzardato ed aspettando di farlo quando su questo argomento, del quale adesso mi occupo, avrò raccolto un maggior numero di dati esperimentali. Così pure mi astengo dal riferire la letteratura, veramente non molto estesa, su questo argomento.

Determinai col metodo della compensazione, con un galvanometro a specchio, la forza elettromotrice che si stabilisce con una pila rame-zinco e acido cloridrico secco sciolto rispettivamente nell'etere, nel benzolo, nell'acetone; ma mentre in questi casi l'attacco dello zinco è fortissimo, come si può rilevare da una abbondante quantità di idrogeno che si sviluppa, non si ha invece nessuna corrente elettrica, nessuna forza elettromotrice, eccettuato qualche piccola cosa per l'acetone.

Ripetei l'esperienze con l'acqua, alcool metilico, e etilico; in questo caso si determina una certa forza elettromotrice che aumenta dall'alcool etilico all'acqua, mentre l'attacco dello zinco aumenta dall'acqua all'alcool etilico.

Adoperai due soluzioni diversamente concentrate di acido cloridrico, una decimo, e una ventesimo normale, e due soluzioni pure diversamente concentrate di acido tricloroacetico per ogni singolo solvente.

Le forze elettromotrici ottenute sono nel seguente specchietto riepilogate; esse rappresentano la media di più osservazioni per ogni soluzione variando le resistenze che si interpongono:

Solventi	Acido cloridrico		Acido tricloroacetico	
	Concentrazione	Forza elettromotrice	Concentrazione gr. in 100 di sol.	Forza elettromotrice
Acqua	—	—	6,65	0,830
	N/20	0,838	1,50	0,765
Alcool metilico	N/10	0,633	6,31	0,811
	N/20	0,608	1,12	0,877
» etilico	N/10	0,537	4,29	0,771
	N/20	0,605	1,07	0,735
Acetone	N/10	0,409	5,90	0,573
	N/20	0,410	0,95	0,495 [1]
				0,529 [2]
Benzolo	N/10	—	—	—
	N/20	—	—	—
Etere	N/10	—	—	—
	N/20	—	—	—

Nell'altro specchietto appresso riporto le forze elettromotrici di alcune pile a concentrazione, fatte con soluzioni etiliche, metiliche, acquose di cloruro potassico. Gli elettrodi erano costituiti da due bastoncini di zinco.

(1) Subito.

(2) Dopo un minuto che gli elettrodi erano immersi.

Pile a concentrazione	Forza elettromotrice
Acqua-alcool metilico	0,0644 [1] 0,0486 [2]
Soluzione acquosa di K Cl 2,86 % " metilica " 1,43 %	0,0939
" acquosa e metilica egualmente concentrata 1,43 %	0,0939
Acqua-alcool etilico	0,0085
Acqua sola Soluzione etilica di K Cl al 1,43 %	0,1216
Soluzioni egualmente concentrate in acqua e alcool etilico	0,2577
Alcool metilico-etilico soli	0,0252
Soluzione concentrata in alcool metilico " diluita in alcool etilico	0,0972
Soluzioni egualmente concentrate in alcool etilico e metilico	0,0000

In generale si vede che sono assai deboli forze elettromotrici che si stabiliscono, mentre le cause d'errore sono abbastanza forti.

Chimica. — *Soluzioni solide e miscele isomorfe fra composti a catena aperta, saturi e non saturi.* Nota di G. Bruni e F. Gorni, presentata dal Socio G. Ciamician.

In un lavoro pubblicato lo scorso anno da uno di noi [3] venne dimostrato come anche fra composti a catena aperta di analoga costituzione possa aver luogo formazione di soluzione solida, quando la configurazione delle loro molecole sia la stessa. Così fu provato che cloroformio e jodoformio formano soluzione solida col bromoformio: e parimenti cloruro e joduro d'etilene col corrispondente bromuro.

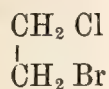
Era però evidente, come fu accennato nella chiusa di tale lavoro, che molti altri casi di soluzioni solide fra composti a catena aperta si sarebbero potuti realizzare. Noi abbiamo ora continuate queste ricerche non solo su composti analoghi a quelli precedentemente studiati, ma anche, ed anzi in particolare modo, estendendole ad altre e più interessanti analogie di struttura.

(1) Elettrodi distanti.

(2) Elettrodi avvicinati.

(3) Rendiconti di questa Accademia 1898, 1° sem., pag. 166; Gazz. Chimica italiana 1898, I, 277.

I. Anzitutto quindi abbiamo voluto studiare il comportamento crioscopico delle soluzioni in bromuro d' etilene, del corrispondente clorobromuro

$$\begin{matrix} CH_2\,Cl \\ | \\ CH_2\,Br \end{matrix}$$

e del cianuro d' etilene o nitrile succinico.

Scopo della prima ricerca era di vedere se per la sostituzione di uno solo dei due atomi di bromo con un altro alogeno, si conservasse intatta la capacità di cristallizzare assieme, oppure per l' introduzione di una certa asimmetria nella molecola questa proprietà sparisse. Tale questione non era stata infatti ancora studiata dal punto di vista crioscopico, nemmeno fra composti aromatici. Dal punto di vista cristallografico si hanno esempî nell' uno e nell' altro senso. Così ad es.: tetracloroidrochinone, triclorobromoidrochinone, dibromodicloroidrochinone sono isomorfi (1); invece l' isomorfismo esistente fra tricloro e tribromo-acetamide (2) non si verifica più nella clorobibromoacetamide la quale cristallizza in forme del tutto diverse dalle due prime (3).

L' esperienza ha dimostrato che il clorobromuro d' etilene ha un' attitudine a cristallizzare assieme al corrispondente bibromuro assai più grande del bicloruro ed anche del bijoduro. Ciò risulta evidente dai risultati sperimentali; tanto più ove si consideri che il clorobromuro ha un punto di congelamento notevolmente inferiore al solvente; ciò che come è noto contribuisce a rendere meno spiccate le anomalie crioscopiche.

Concentrazioni	Abbassamento termometrico	Peso molecolare (K = 118) $C_2H_4Cl\,Br = 143{,}5$
0,3590	0°,12	353
0,5641	0, 19	351
1,1639	0, 40	343
2,0631	0, 70	348
2,6713	0, 895	352
3,5312	1, 16	359

L' anomalia è spiccatissima ed i valori ottenuti pei pesi molecolari seguono l' andamento decrescente dapprima e quindi di nuovo crescente, caratteristico in simili casi, massime quando la sostanza sciolta abbia un punto di congelamento più basso del solvente.

L' esperienza ha mostrato poi, che anche il cianuro d' etilene forma soluzione solida col corrispondente bromuro. La sostituzione di due atomi di

(1) Levy u. Schultz, Lieb. Ann. *210*, 155, 161; Liweh, Zeitschr. Kryst. *11*, 247.
(2) Bodewig, Zeitschr. Kryst. *5*, 554; Brezina, Zeitschr. Kryst. *5*, 586, 646.
(3) Fock, Lieb. Ann. *249*, 78.

alogeno con due gruppi CN- non altera dunque l'assetto molecolare tanto da togliere la capacità di cristallizzare assieme. Anche di ciò una dimostrazione per via crioscopica non era ancora stata data. Ecco i dati delle misure relative:

Concentrazioni	Abbassamento termometrico	Peso molecolare (K = 118) $C_2H_4(CN)_2 = 80$
0,2136	0°,255	99
0,4485	0, 54	98
0,4843	0, 57	100
0,7017	0, 80	103
1,0911	1, 17	110
1,9033	1, 66	135
1,9165	1, 68	135
1,9741	1, 73	135

II. Dopo le esperienze ora descritte abbiamo rivolto il nostro studio alle relazioni esistenti fra i composti a doppio legame ed i corrispondenti composti saturi.

Come è noto, fra due composti di struttura ciclica che differiscano unicamente per la presenza o meno di un doppio legame nella catena chiusa, sussistono sempre relazioni tali di forma cristallina e di configurazione, che cristallizzano assieme dando soluzioni solide, e possono in parecchi casi essere riguardati come isomorfi. Esempî: naftalina e diidronaftalina (1); difenile e tetraidrodifenile (2): anidride succinica e anidride maleica (3).

Fra composti che differiscono fra di loro per un doppio legame in una catena aperta, le esperienze eseguite da Garelli (4) non avevano in alcun caso constatato la formazione di soluzione solida. Così ad es.: soluzioni di acido oleico in stearico, di diidroisoapiolo in isoapiolo, si comportano nel congelamento in modo affatto normale. Questo fatto veniva spiegato colla considerazione, invero assai plausibile, che la formazione o la scissione di un doppio legame, importa in una catena aperta un cambiamento assai più essenziale che in un nucleo chiuso.

Però le esperienze fatte finora erano troppo scarse ed incomplete perchè la questione potesse ritenersi esaurita; e ciò tanto più per le considerazioni che verremo esponendo. Come è notissimo, le teorie stereochimiche distinguono due casi, quando da un composto contenente una catena aperta satura, si passi ad un altro contenente in questa un doppio legame etilenico. Può

(1) Küster, Zeitschr. f. physik. Ch., VIII, 592.
(2) Garelli, Gazz. Chim. ital. 1893, II, 360.
(3) Garelli e Montanari, Gazz. Chim. ital. 1894, II, 252.
(4) Garelli e Montanari, ibidem.

cioè accadere che ad uno dei due atomi di carbonio doppiamente legati, rimangano uniti due atomi o due gruppi uguali, nel quale caso non si ha isomeria possibile; e può invece avvenire, che ad ognuno di questi due atomi, siano uniti due gruppi diversi, talchè possano formarsi le due forme isomere nello spazio; maleinoide e fumaroide. A tale secondo caso, si riferiscono gli esempî finora studiati e citati di sopra; ma come si vede in essi si erano studiate solamente le relazioni esistenti fra uno dei due isomeri ed il corrispondente composto saturo.

Abbiamo quindi ripreso in esame questo ordine di fatti, volgendo anzitutto il nostro studio a quest' ultimo caso, come quello che era il più interessante e prometteva un maggior frutto di utili e brillanti applicazioni alla determinazione della configurazione dei composti per via crioscopica. Dichiariamo però fin d' ora che ci proponiamo di estendere il nostro studio anche al primo caso.

Il problema era, quindi, questo: ricercare se dei due isomeri nello spazio, entrambi od uno solo, posseggano relazioni di configurazione e di forma cristallina col relativo composto saturo, tali da poter con esso cristallizzare formando soluzioni solide o miscele isomorfe. La prima ipotesi, oltrechè poco accettabile a priori, poteva ritenersi già esclusa dalle esperienze di Garelli. La seconda invece ci appariva assai probabile. Ed in tal caso era di grande interesse lo stabilire quale delle due forme, maleinoide e fumaroide, avesse questo più stretto nesso di configurazione col composto a legame semplice.

Esponiamo qui in modo sommario i risultati delle esperienze eseguite, e le principali deduzioni teoriche che da essi si possono trarre, riservandoci di farne altrove un' esposizione completa.

Per cominciare la nostra ricerca era naturale che noi scegliessimo come primo materiale di studio, quei composti nei quali queste isomerie sono più note e meglio determinate, e pei quali, anzi, esse furono introdotte nella scienza: cioè gli acidi maleico e fumarico, e ricercassimo le loro relazioni coll' acido succinico.

Gli acidi liberi, però, non si prestavano affatto al nostro studio, poichè, come è ben noto, essi nel fondere, o si anidrificano, o si trasformano. Era quindi necessario ricorrere ai loro derivati, capaci di fondere senza decomporsi.

Come venne accennato più sopra, già Garelli (l. c.) aveva stabilito che l' anidride maleica forma soluzione solida colla succinica, e prima ancora Bodewig aveva trovato che strette analogie esistano fra le forme cristalline dei due corpi [1]. Queste osservazioni non sono però utilizzabili nel caso nostro, perchè fra questi composti la differenza è per un doppio legame o meno *in una catena chiusa;* ed essendo il corpo a struttura ciclica, non

[1] Zeitschr. Kryst. 5, 557.

esiste più nella sua molecola la libera rotazione attorno all' asse congiungente i due atomi di carbonio.

Occorreva, quindi, operare su derivati in cui questa libera rotazione fosse mantenuta.

Per avere composti che obbedissero a tale condizione, e facilmente accessibili, scegliemmo gli eteri dimetilici, i quali ci presentavano un materiale sotto tutti i rapporti adattatissimo al nostro scopo.

Come solvente abbiamo impiegato l' etere dimetilico dell' acido succinico, il quale fonde a + 19°. Siccome la costante non era nota, così abbiamo dovuto determinarla, sciogliendovi varie sostanze di presumibile comportamento normale: bibromobenzolo, naftalina, dibenzile, azobenzolo, isoapiolo e difenilammina. Come media di tali misure venne ricavato il valore k = 55,5.

Le determinazioni eseguite colle soluzioni dell' etere dimetilico dell' acido maleico (p. eb. 205°) diedero il seguente risultato:

Concentrazioni	Abbassamento termometrico	Peso molecolare (K = 55,5) $C_6H_8O_4 = 144$
0,6130	0°,2275	149,5
0,8838	0, 32	153
1,5609	0, 5675	153
1,0632	0, 72	159
2,5810	0, 9075	158
3,2344	1, 12	163
5,0991	1, 7175	164

Queste soluzioni si comportano in modo normale. I valori superiori di poco al normale che si ottengono sono forse da attribuirsi a minime traccie dell' isomero dal quale, come è noto, difficilmente si riesce a separarlo. L' andamento poi di tali valori, ove si osservi che l' etere maleico gela a temperatura assai più bassa del solvente, deve ritenersi del tutto normale.

Questo comportamento del resto risulta subito in modo luminoso ove lo si confronti con quello dell' isomero. L' etere dimetilico dell' acido fumarico (p. f. 102°) diede al contrario i risultati seguenti:

Concentrazioni	Abbass. termometrico	Peso mol. (K = 55,5) $C_6H_8O_4 = 144$	Coefficiente di distribuzione calcolato
0,1795	0°,0125	797	0,819
0,7826	0 05	869	0,834
1,4802	0 09	914	0,842
	Innalz. termometrico		
2,3706 (1)	0°,24	—	—
4,385	4 60	—	—
9,255	17 90	—	—
17,908	27 50	—	—

(1) Le concentrazioni di queste soluzioni sono riferite a 100 parti di miscela.

L'etere fumarico produce quindi in soluzioni assai diluite, degli abbassamenti anormalmente piccoli dai quali si calcolerebbero pesi molecolari sestupli circa del teorico. Invece partendo da concentrazioni del 2 °/₀ circa, esso innalza il punto di congelamento del solvente.

Questo comportamento si accosta assai a quello delle miscele isomorfe. In queste, però, si era finora osservato fin dalle soluzioni più diluite un innalzamento. L'andamento delle curve di congelamento di queste soluzioni è, quindi, nuovo ed estremamente interessante per gli studî sugli equilibrî nelle soluzioni solide e miscele isomorfe, e sotto questo punto di vista verrà sottoposto ad uno studio più dettagliato.

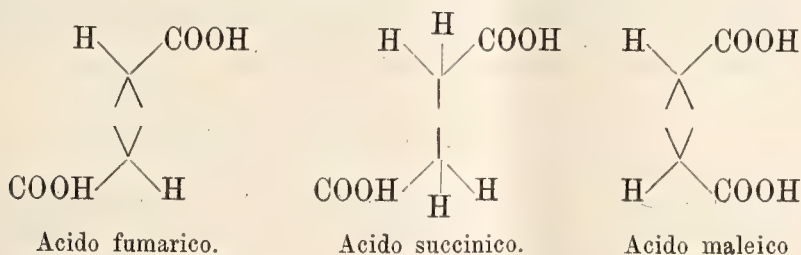
Ciò che si è qui esposto basta però a provare, in modo evidente, la formazione di soluzione solida in proporzioni fortissime, come risulta dai valori del coefficiente di distribuzione, calcolato secondo la nota formola di Beckmann, dalle variazioni di temperatura osservate, in confronto delle normali.

Dei due isomeri è dunque col fumarico, che l'acido succinico ha strette relazioni di configurazione e di forme cristalline, mentre queste relazioni non esistono più affatto col maleico. E di ciò non è difficile rendersi conto in base alle teorie stereochimiche.

Si ammette infatti che in un composto a legame semplice nel quale esiste la libera rotazione, attorno all'asse congiungente due atomi di carbonio, si forma una posizione favorita, nella quale gli atomi o gruppi che hanno una maggiore affinità reciproca, tendono a porsi nella massima possibile vicinanza, e gli atomi o gruppi identici, tendono invece a collocarsi alla massima possibile distanza ([1]). Se si rappresenta con uno schema questa condizione di cose per l'acido succinico si vede come la sua configurazione favorita abbia la massima somiglianza con quella dell'acido fumarico e non ne abbia alcuna con quella dell'acido maleico.

```
H\   /COOH        H\ H /COOH       H\   /COOH
   \/               \|/               \/
   /\                |                /\

   \/                |                \/
COOH/ \H         COOH/|\H            H/ \COOH
                      H
```

Acido fumarico. Acido succinico. Acido maleico

Queste conclusioni stanno in assai buon accordo, con quelle che si possono trarre, dall'esame dell'energia degli acidi delle tre serie, succinica, fumarica e maleica, come risulta dal riassunto seguente ([2]):

	K =		K =		K =
Acido succinico	0,00665	Acido fumarico	0,093	Acido maleico	1,170
» pirotartrico	0,0086	» mesaconico	0,0794	» citraconico	0,340
» etilsuccinico	0,0085	» etilfumarico	0,094	» etilmaleico	0,238

([1]) Meyer u. Jacobson, *Organische Chemie*, vol. I, pag. 84,

([2]) Ostwald, Zeitsch. f. physik. Ch. III 241, 369; Walden, Zeitsch f. physik. Ch. VIII 433.

Per quanto entrambi gli acidi non saturi, siano più energici del corrispondente acido saturo, tuttavia la differenza è incomparabilmente più forte per l'isomero maleinoide che pel fumaroide; queste differenze sono in particolar modo spiccate pei primi termini, sui quali furono eseguite le esperienze suddescritte.

Quando l'acido succinico si anidrifica la configurazione deve necessariamente mutare, ed il sistema deve muoversi intorno all' asse di rotazione, giacchè è necessario, perchè il processo di anidrificazione possa compiersi, che i carbossili si collochino in posizione vicina accostandosi alla forma maleica dei composti non saturi. Così l'anidride succinica diventa, come si è detto, pressochè isomorfa colla maleica.

III. Dopo queste esperienze sul gruppo di composti, tipico per le isomerie geometriche, restavano parecchi altri casi simili nei quali queste isomerie sono meno bene note, ed il cui studio presenta ancora varie incertezze.

Particolarmente interessanti si presentavano le ricerche intorno alle relazioni fra l'acido butirrico ed i due crotonici.

Per questi composti esistevano già misure di Garelli e Montanari [1], secondo i quali, soluzioni di acido butirrico in crotonico hanno comportamento crioscopico normale. Queste esperienze non si potevano però ritenere, come decisive, sopratutto poichè il fatto che l'acido crotonico fonde circa 80° gradi più alto del butirrico, doveva rendere assai poco spiccata l'anomalia se questa esisteva.

Per ovviare a questo inconveniente, noi adoperammo come solvente l'acido butirrico, sebbene questo, pel suo basso punto di congelamento e per la sua grande igroscopicità, sia di un uso alquanto incomodo.

Le esperienze dirette a determinare la depressione molecolare del solvente, non vennero ancora condotte a termine, e verranno da noi esposte più tardi. I risultati però ottenuti colle soluzioni dei due isomeri, sono di per sè tanto evidenti, che noi li comunichiamo senz' altro.

Acido crotonico $C_4H_6O_2 = 86$.

Concentrazioni	Abbassamento termometrico	Depressione molecolare
1,5600	0°,015	0,8
	Innalzamento termometrico	
3,6030	0°,035	
5,9714	0 08	

Il comportamento è affatto identico a quello dell' etere fumarico nel succinico, e prova nel modo più luminoso la formazione di soluzione solida fra acido butirrico e crotonico, in tale misura da potersi ritenere le due sostanze pressochè totalmente isomorfe.

(1) Gazz. Chim. it., 1894, II, pag. 252.

Ben diverso è il comportamento delle soluzioni dell' isomero:

Acido isocrotonico $C_4H_6O_2 = 86$.

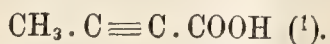
Concentrazioni	Abbassamento termometrico	Depressione molecolare
0,6264	0°,31	42,5
1,5262	0 68	38,3
3,4397	1 56,5	39,1

Ove si rifletta che la depressione molecolare dell' acido acetico ha il valore 39, e quelle degli omologhi superiori, acidi laurinico, palmitico e stearico, oscilla intorno a 44, risulta chiaro, che la depressione molecolare dell' acido butirrico non potrà scostarsi molto dal valore $K = 40$, e che il comportamento dell' acido isocrotonico deve considerarsi come normale.

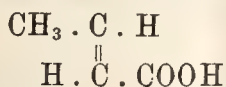
Resta, quindi, stabilito: che l' acido crotonico ha coll' acido butirrico quelle stesse analogie di configurazione, che il fumarico ha col succinico; e che parimenti le identiche relazioni hanno l' acido isocrotonico ed il maleico coi corrispondenti acidi saturi.

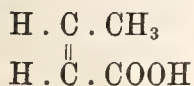
Ciò non sarebbe veramente in accordo colle formole che si trovano generalmente ammesse pegli acidi crotonici.

Per la formazione dell' acido crotonico dall' acido tetrolico

$$CH_3 . C \equiv C . COOH \text{ (}^1\text{)}.$$

si attribuisce infatti ad esso la forma maleinoide, e per conseguenza, all' isocrotonico la forma fumaroide. Però, anche nei più recenti trattati [2] non si ritiene questa determinazione di configurazione, come definitiva; ed a ragione, poichè essa è in contraddizione colle principali proprietà fisiche e chimiche dei due isomeri, colle quali invece le nostre conclusioni stanno in completo accordo. L' acido crotonico ha, infatti, tutte le proprietà che spettano in generale alle forme fumaroidi, e l' isocrotonico, al contrario, quelle che sono proprie delle forme maleinoidi. L' ac. crotonico, ad es., fonde assai più alto, e l' isocrotonico più basso del corrispondente acido saturo. Inoltre l' acido crotonico è assai più stabile dell' isomero, e quest' ultimo si trasforma assai facilmente nel primo, per azione di acidi, o di altri agenti chimici.

Dobbiamo quindi ritenere, come dimostrato, che all' acido crotonico spetta la forma fumaroide:

$$\begin{array}{l} CH_3 . C . H \\ \quad\;\; \| \\ \quad H . C . COOH \end{array}$$

ed all' isocrotonico la maleinoide

$$\begin{array}{l} H . C . CH_3 \\ \quad\; \| \\ H . C . COOH \end{array}$$

[1] Aronstein u. Holleman, Ber. XXII, 1183.

[2] Richter, Organische Chemie VIII. Aufl. I vol., pag. 269 (1897); Holleman, Organische Chemie, pag. 157 (1899).

IV. Altrettanto interessanti, come quelle ora studiate, si presentavano le relazioni frà l' acido fenilpropionico, ed i corrispondenti acidi fenilacrilici, o cinnamici.

Come è noto, mentre la teoria non farebbe prevedere, per qnesti ultimi, che due stereoisomeri, risulta invece dalle ricerche di Liebermann (¹) e di Erlenmeyer (²) che, oltre all' acido cinnamico comune (p. f. 133°) esistono altri 3 isomeri; e cioè l' acido allocinnamico (p. f. 69°) l' acido isocinnamico naturale (p. f. 45°-47°) e l'acido isocinnamico artificiale (p. f. 43°,5-46°). Tutti questi composti, hanno altresì, forme cristalline ben diverse gli uni dagli altri (³). Questi fatti non hanno ancora avuto una soddisfacente spiegazione. Appare però assai probabile, che all' acido cinnamico comune il quale fonde a temperatura più elevata, ed è più stabile degli altri, spetti la forma fumarica.

Noi abbiamo studiato il comportamento delle soluzioni di due degli acidi cinnamici, cioè del cinnamico ordinario, e dell' allocinnamico (⁴) nell' acido fenilpropionico.

La depressione molecolare dell' acido fenilpropionico, usato come solvente, era stata determinata da Eykmann, il quale aveva dedotto il valore K = 88.7. Noi abbiamo verificato questo dato sciogliendovi come sostanze presumibilmente normali, il dibenzile, l' ac. salicilico, l' ac. elaidinico. Come media delle terminazioni di Eykmann e delle nostre abbiamo adottato il valore K = 89.5. I risultati avuti colle soluzioni dei due isomeri sono i seguenti.

L' acido cinnamico ordinario, innalza fin dalle più basse concentrazioni il punto di congelamento del fenilpropionico, come risulta dalla seguente tabella:

Concentrazioni	Innalzamento termometrico
0,2921	0°,075
0,6692	0, 20
1,4452	0, 55
3,2310	1, 31
5,0065	2, 085
6,7759	2, 885

L' acido cinnamico ed il fenilpropionico, cristallizzano quindi assieme, in tutti i rapporti, e si comportano come sostanze completamente isomorfe.

(¹) Ber. XXIII. 141, 251; XXIV. 1101; XXVII. 2037.

(²) Lieb., Ann. *287*. 1.

(³) Schabus, Wien. Akad. Ber. 1850. 206; Fock, Ber. XXIII. 147, 2511; XXIV. 1105; XXVII. 2048; Haushofer. Lieb., Ann. *287*. 7.

(⁴) L'acido allocinnamico usato in queste misure, ci venne inviato colla massima gentilezza, dal prof. C. Liebermann di Berlino, a cui se ne deve la scoperta. Mi è grato esprimergli qui, i più vivi ringraziamenti.

G. Ciamician.

Al contrario l'acido allocinnamico, dà abbassamenti affatto normali, ciò che riesce tanto più convincente in quantochè esso fonde notevolmente più alto del solvente.

Concentrazioni	Abbassamento termometrico	Peso molecolare (K = 89,5) $C_9H_8O_2 = 148$
0,8230	0°,52	142
1,6513	1, 15	144
3,9973	2, 47	145

Resta quindi stabilito che all'acido cinnamico conviene la forma fumaroide, ed all'acido allocinnamico deve attribuirsi la configurazione maleinoide. Come debba poi spiegarsi l'esistenza degli altri due isomeri acidi isocinnamici; e se questi debbano essere ritenuti assieme all'allocinnamico, come forme polimorfe di un solo composto, potrà essere determinato solo da ulteriori ricerche.

Accenneremo per ultimo che le determinazioni cristallografiche, eseguite da Fock [1] sull'acido fenilpropionico, sono troppo incomplete, per poterne dedurre relazioni con quelle già accennate degli acidi cinnamici.

Per completare queste ricerche, le quali possono portare un contributo, non solo alla conoscenza delle soluzioni solide, ma anche a quelle della stereochimica dei composti etilenici, abbiamo in corso altre esperienze. Di queste e di quelle dirette a studiare altre specie di analogie di struttura, speriamo di poter presto comunicare i risultati.

Chimica. — *Sulla scissione dell'acido isosantonoso inattivo nei suoi antipodi.* Nota di A. Andreocci e P. Alessandrello, presentata dal Socio Cannizzaro.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Cristallografia. — *Per l'anortite del Vesuvio.* Nota II di C. Viola, presentata dal Socio Blaserna.

Il cristallo di anortite, del quale ho determinato le costanti ottiche col riflettometro totale di precisione del prof. Abbe di Iena appartenente al R. Istituto Fisico di Roma, è quello che mi fu donato dal prof. E. Scacchi, e che mi ha pure servito per determinare gli angoli fondamentali e le tre faccie vicinali l', m', x', nuove per l'anortite, come riferii nella mia precedente Nota [2].

(1) Ber., XXIII. 148.
(2) Vedi Rendiconti, vol. VIII, I° sem. serie 5ª fasc. 8°.

Per le osservazioni con l'apparecchio di Abbe mi servii dapprima della faccia naturale ($00\bar{1}$) non perfettamente piana; ma indi feci levigare una sezione parallelamente a ($00\bar{1}$), e con questo nuovo piano ripetendo le osservazioni, ebbi dei risultati sorprendenti.

Un asse ottico dell'anortite cade esattamente in questa faccia, cosicchè le due linee limiti si toccano in questo raggio. In tale caso speciale gli indici di rifrazione, e la posizione dell'altro asse ottico sono pienamente determinati con la sola sezione (001), senza nemmeno tenere conto dei piani di polarizzazione; tuttavia essi sono dati nella tabella qui annessa.

Per poter assicurare 2 ovvero 3 unità nella quinta decimale degli indici di rifrazione è necessario non solo di prestare molta cura nella correzione dell'istrumento, ma bensì anche di adottare nell'osservazione il metodo differenziale.

Dopo il bel lavoro di Pulfrich [1] poco rimane a dirsi intorno alla correzione dell'apparecchio.

Avendo dapprima situato il piano della mezza sfera perpendicolarmente al suo asse di rotazione, si porta quest'asse in coincidenza coll'asse di simmetria. A quest'uopo non disponendo di una molla sensibile, si attacca un segnale sullo specchietto, e con il cannocchiale abbassato e fisso si osserva lo spostamento dell'imagine girando la mezza sfera.

Rimane in terzo luogo di far incontrare l'asse di rotazione della mezza sfera dall'asse di rotazione del cannocchiale. Pulfrich dispone il cannocchiale orizzontalmente, e facendolo funzionare da tasto, capovolge il cannocchiale ora da l'una ora dall'altra parte, finchè il piccolo intervallo fra obbiettivo e sfera si mantiene costante. Ma per avere l'angolo limite vero della riflessione totale non fa bisogno nè di conoscere lo zero del cerchio verticale, nè di fare la testè accennata correzione, poichè di quanto il cerchio verticale darà di più stando p. e. il cannocchiale a destra, altrettanto darà di meno stando il cannocchiale a sinistra, e la media aritmetica delle due letture, essendo indipendente dal piccolo errore, sarà il vero angolo della riflessione totale. Lavorando col metodo differenziale, questa terza correzione diviene assolutamente superflua, anche misurando le differenze degli angoli col cannocchiale sempre da un solo lato.

La quarta correzione consiste in questo di alzare la mezza sfera, finchè il suo centro cada nell'asse di rotazione del cannocchiale. Come indizio si ha che il cannocchiale deve dare un angolo limite della riflessione totale fra aria e vetro della mezza sfera eguale a $31°, 56', 14''$, corrispondente cioè all'indice di rifrazione del vetro

$$N_D = 1{,}89040.$$

[1] C. Pulfrich, *Ueber die Anwendbarkeit der Methode der Totalreflexion auf kleine und mangelhafte Krystallflächen.* Zeitsch. f. Kry. 1899. Bd. XXX, S. 568.

Nell' ultimo mio lavoro [1] discussi le ulteriori correzioni e i rispettivi errori, che ancora si possono o togliere dall' apparecchio, o calcolare ed eliminarli dalle osservazioni.

Ma anche dopo eseguite le correzioni suddette, l' apparecchio non si mantiene perfettamente costante, sia a causa delle variazioni di temperatura, sia per altre ragioni, p. e. se le viti di contrasto fossero state troppo in pressione.

Feci successivamente le seguenti misure su un disco di quarzo, che la casa Zeiss allegò all' apparecchio:

$\omega_D = 1{,}54489$	$\varepsilon_D = 1{,}55404$	$(\varepsilon - \omega)_D = 0{,}00915$
$1{,}54523$	$1{,}55440$	$0{,}00917$
$1{,}54599$	$1{,}55516$	$0{,}00917$

Secondo Mascart $(\varepsilon - \omega)_D = 0{,}00917$.

Ciò dimostra che mentre l'errore in ω ed ε si mantenne sufficientemente grande, l' esattezza della birifrangenza misurata con la vite micrometrica rimase nella quinta decimale.

Conviene osservare che il cannocchiale del riflettometro di Abbe, prima costruzione, ha tre gomiti e tre prismi di vetro a riflessione totale; nel nuovo modello questo inconveniente è levato, e quindi si riesce ora con più facilità di correggere l' asse ottico del cannocchiale in guisa che incontri l' asse di rotazione del cannocchiale, e si riesce anche di mantenerlo per la durata delle osservazioni in posizione costante.

Se per l' esattezza dei risultati è richiesto che l' asse ottico del cannocchiale incontri il suo asse di rotazione, non è all'opposto detto che esso debba passare per il centro della mezza sfera, perchè se le altre sopra accennate condizioni sono esattamente soddisfatte, in ogni caso il raggio della riflessione totale, sia o no rifratto dalla mezza sfera, si mantiene sempre nel meridiano passante per l' asse di rotazione del cannocchiale, e la lettura sul cerchio verticale è il vero angolo limite.

Ma, ripeto, i piccoli errori, che possono rimanere nell' istrumento, non portano alcuna influenza nell' indice della doppia rifrazione, poichè l' incertezza di alcune unità nella quinta decimale, sta nel limite dell' errore di puntata, che è circa un minuto primo diviso pel numero che dà l' ingrandimento del cannocchiale.

Da queste considerazioni risulta che potremo determinare gli indici di rifrazione principali dell' anortite con un errore di alcune unità nella quinta decimale, adottando il metodo differenziale.

A quest' uopo mi servo come termine di confronto dell'indice ε del quarzo, che è, secondo Mascart

$$\varepsilon_D = 1{,}55338$$

[1] C. Viola, Zeitsch. für Krystall. 1898, Bd. 30, pag. 437.

e corrisponde nella mezza sfera per la luce D all' angolo limite della riflessione totale:

$$55°,15',25''.$$

Con l' intento di provare il riflettometro totale feci inoltre le seguenti misure su una lamina di gesso secondo il clivaggio (010) (nel quale cadono i due assi ottici), *gesso* delle Miniere di Romagna, che ebbi dall' egregio ing. Cavalletti:

$$\alpha_D = 1,52038 \qquad \beta_D = 1,52246 \qquad \varrho_D = 1,52961 \qquad 2V_D = 56°,30'$$

e calcolato $2V_D = 56°,55',50''$. Mentre Dufet pel gesso di Montmartre riferisce:

$$\alpha_D = 1,52046 \qquad \beta_D = 1,52260 \qquad \gamma_D = 1,52962$$

e $2V = 58',50''$ alla temperatura di 19°.

Queste misure ottenni servendomi come paragone di un cristallo di quarzo; esse dimostrano che l' apparecchio è eccellente, e col metodo impiegato possono offrire dei risultati di piena fiducia.

Punto dunque il cannocchiale sulla linea limite del quarzo per due posizioni opposte di 180°. E senza spostare il cannocchiale, tolgo il dischetto di quarzo e vi sostituisco la lamina dell' anortite. Eseguisco le misure delle linee limiti per le posizioni di 15° in 15°, determinando con le prime differenze le posizioni dei massimi e minimi.

La tabella qui annessa dà le differenze lette sulla vite micrometrica fra la posizione della linea limite del quarzo e le linee limiti dell' anortite.

Passando la sezione del cristallo, che in questo caso è parallela alla faccia (001), per uno degli assi ottici, si ottengono un massimo nella curva esterna, che corrisponde all' indice γ, un minimo nella curva interna che corrisponde all'indice α e finalmente là dove le due curve si tagliano, è determinato l' indice medio β.

Benchè in questo caso speciale non sia necessario di conoscere la posizione dei piani di polarizzazione, tuttavia la tabella dà anche le letture fatte sul Nicol applicato all' obbiettivo.

Per osservare distintamente la linea limite della riflessione totale, dopochè l' occhio vi si sia assuefatto, è indifferente di illuminare il cristallo da sotto ovvero da sopra, benchè Pulfrich consigli di non far uso dell' illuminazione tangenziale. Nel primo caso si richiede molta luce. Nel secondo caso la metà del campo è perfettamente oscura, e quindi la linea limite può riuscire molto

nitida, come dimostrò recentemente Leiss [1]; ma essendo solo metà del campo illuminata, e quindi solo metà dei fili, è oltremodo difficile di portare il centro del rettifilo esattamente nella linea limite.

Si ottiene in quella vece maggiore precisione facendo cadere la luce in parte di sotto, e in parte tangenzialmente di sopra, e cioè nel modo seguente. Si dispone di sotto lo specchietto, e sul cristallo un pezzettino di carta bianca. La luce proveniente dallo specchietto attraversa il cristallo, illumina la carta, la quale per irradiazione, manda un fascio di luce da sopra e determina per conseguenza una linea limite (che si potrebbe chiamare negativa come quando l'illuminazione è solamente tangenziale) oltremodo distinta, con campo e fili illuminati.

Dalla tabella si ricavano gli angoli limiti seguenti:

$$\left.\begin{matrix}55°,15',25''\\ 1\ \ 10\ \ 50\end{matrix}\right\} = 56°,26',15'' \quad \text{per l'indice } \alpha$$

$$\left.\begin{matrix}55\ \ 15\ \ 25\\ 1\ \ 37\ \ 25\end{matrix}\right\} = 56\ \ 52\ \ 50 \quad \text{»} \quad \beta$$

$$\left.\begin{matrix}55\ \ 15\ \ 25\\ 1\ \ 54\ \ 33\end{matrix}\right\} = 57\ \ 09\ \ 58 \quad \text{»} \quad \gamma$$

E per conseguenza si ha

$\alpha_D = 1,57524$ ($\alpha_D = 1,5757$ Fouqué [2]) ($\alpha_D = 1,57556$ C. Klein [3])
$\beta_D = 1,58327$ ($\beta_D = 1,5837$ id.) ($\beta_D = 1,58348$ id.)
$\gamma_D = 1,58840$ ($\gamma_D = 1,5884$ id.) ($\gamma_D = 1,58849$ id.).

La formola

$$\operatorname{sen} V_D = \sqrt{\frac{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}}{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}}} \quad \text{(l'angolo V misurato attorno la bisettrice } a\text{)}$$

ci dà

$$l \operatorname{sen} V_D = 9,7938091 \qquad V_D = 38°,27',50''$$

e quindi il seguente angolo degli assi ottici:

[1] C. Leiss. Die optischen Instrumente der Firma R. Fuess 1899.

[2] F. Fouqué, Bulletin de la Soc. franç. de Minéralogie, 1894, T. 17, p. 311.

[3] C. Klein, *Optisque Studien I*, K. pr. Akademie der Wiss. zu Berlin. Sitzungsberichte, XIX 1899, pag. 346.

$2V_D = -76°,56' = (2V_D = -76°,30'$ C. Klein)

Cerchio orizzontale	Curva interna		Curva esterna	
	Vite micrometrica	Nicol	Vite micrometrica	Nicol
0° — 180°	1° 40′ 10″	68	1° 30′ 20″	158
$13\frac{1}{4}$ — $193\frac{1}{4}$	β *1 37 25*	75	*1 37 25*	165
15 — 195	1 39 10	—	1 36 08	—
30 — 210	1 44 58	95	1 31 45	185
45 — 225	1 49 35	—	1 27 23	—
60 — 240	1 52 50	120	1 22 30	210
$73\frac{1}{2}$ — $253\frac{1}{2}$	Zona [010]	—	—	—
75 — 255	1 54 18	135	1 17 35	225
85 — 265	γ *1 54 33*	138	—	228
90 — 270	1 54 10	—	1 13 40	—
105 — 285	1 54 23	—	1 11 20	—
115 — 295	α —	140	*1 10 50*	230
120 — 300	1 51 30	—	1 11 03	—
135 — 315	1 49 10	130	1 13 08	220
150 — 330	1 46 48	—	1 18 08	—
165 — 345	1 43 10	115	1 24 20	205

Con soddisfazione si apprende dall' ultimo lavoro di C. Klein [1], che le costanti ottiche dell' anortite determinate dai vari osservatori si avvicinano a coincidere perfettamente.

In ultimo vogliamo vedere con quale esattezza è riuscito determinato l'angolo degli assi ottici. A tal fine possiamo partire dalla forma più semplice di Michel Lévy:

$$\text{sen}\, V = \sqrt{\frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}} = \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}$$

essendo $B_1 = 0{,}00513$ e $B_2 = 0{,}01316$.

Differenziandola si ha

$$\delta V = \frac{B_2\, \delta B_1 - B_1\, \delta B_2}{B_2^2 \,.\, \text{sen}\, 2V}$$

e chiamando con M l' errore medio di V e con

$$m = \delta B_1 = \delta B_2$$

[1] C. Klein, op. cit.

l' errore medio della doppia rifrazione, avremo, seguendo la solita e nota regola:

$$M = \pm \frac{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}{B_2^2 \operatorname{sen} 2V} \cdot m = \pm 83{,}7 \cdot m \,.$$

Per

$$m = \pm 0{,}00001 = \pm 2'',06$$

sarà

$$M = \pm 2',52'' \,.$$

E poichè nel caso nostro possiamo attribuire alla doppia rifrazione un errore medio di 3 unità nella quinta decimale, avremo

$$M = \pm 7',6 \,,$$

e quindi l' errore probabile $= \pm 5',0$ per l' angolo V e per 2V sarà l' errore probabile:

$$r = \pm 7',0 \,.$$

Se l' errore della doppia rifrazione stesse nella quarta decimale di una unità, sarebbe $M = \pm 30'$ circa, e se nella terza decimale, sarebbe $M = \pm 5^\circ$ circa. Quivi sta il pregio di un apparecchio di precisione quale fu costruito dalla casa Zeiss di Jena; fino a pochi minuti di errore potremo stabilire l' orientazione dell' ellissoide di Fresnel, che dovrà avere la precedenza sulle determinazioni di altri osservatori, come si vedrà in un' altra Nota.

Petrografia. — *Studio petrografico su alcune rocce della Carnia.* Nota del dott. Giuseppe Vigo, presentata dal Socio Strüver.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Psicologia sperimentale. — *Sul metodo di studiare i sentimenti semplici.* Nota del dott. F. Kiesow [1], presentata dal Socio Mosso.

Se noi analizziamo la varietà dei nostri fenomeni psichici, perveniamo sempre a due specie di elementi psichici che non si possono ulteriormente scomporre in processi più semplici e che secondo la terminologia ormai generalmente in uso, almeno nella letteratura psicologica, designiamo col nome di sensazioni e di sentimenti. E perchè le sensazioni sono le parti fondamentali di quei composti psichici che noi diciamo rappresentazioni e riferiamo agli

(1) Assistente all' istituto fisiologico di Torino.

oggetti esterni, compresovi il nostro corpo, noi le possiamo anche indicare come gli elementi oggettivi del contenuto della nostra coscienza; laddove i sentimenti, come quelli che immediatamente si riferiscono al soggetto senziente, si contrappongono alle sensazioni quali elementi soggettivi di quel contenuto. Con ciò si collega il fatto che noi siamo generalmente in grado di localizzare così la sensazione, in quanto essa per l'osservazione psicologica può presentarsi fuori dei suoi composti, come anche questi stessi composti; ma questo per i sentimenti non ci è possibile, o lo è soltanto in modo mediato; noi riferiamo il sentimento alla sensazione che lo accompagna e colla quale è strettamente collegato, e però noi localizziamo in realtà questa e non quello [1].

Nello stato normale della coscienza non si incontrano mai sensazioni assolutamente pure e isolate; esse si riuniscono sempre nelle così dette rappresentazioni, o gruppi di rappresentazioni. Così pure si comportano le sensazioni dei *più semplici sensi* ad es. quelle del gusto. Se qui, usando mezzi opportuni, si riesce ad escludere le sensazioni concomitanti di altri sensi: le sensazioni di olfatto, di temperatura, di tatto e di dolore, e in tal modo di limitare la suscitata sensazione gustativa, non è possibile neppure concentrando intensamente l'attenzione su quella sensazione, di isolarla completamente. La sensazione entra come pura impressione saporifica nel punto visivo della coscienza, secondo il felice paragone di Wundt; ma nondimeno altri gruppi di rappresentazioni, quelle o della parte stimolata o della natura della soluzione usata, o della parte dell'ambiente, o dello strumento di stimolazione o altre, rimangono oscure nella coscienza. La sensazione pura è per lo stato di veglia della coscienza solo una risultante dell'analisi e dell'astrazione psicologiche.

Questo fatto vale anche pel sentimento, ma qui la cosa si complica ancora maggiormente, perchè i sentimenti che accompagnano così le semplici come le complesse funzioni psichiche, si mescolano sempre a nuovi complessi sentimentali, al sentimento totale, secondo l'espressione del Wundt. Uno studio dei sentimenti che si presume di osservare il loro regolare decorso, non potrà a meno di rendersi conto sino a quale grado i sentimenti possono uscire dalle loro connessioni, perchè possano essere sottoposti a tale studio. Vero è, che qualche volta complesse forme sentimentali dominano talmente la nostra coscienza che il contenuto rappresentativo al quale esse sono legate passa per un certo tempo in seconda linea ed è solo conosciuto più tardi. Ma ciò che vale per un composto sentimentale, la cui azione in questi casi noi dobbiamo percepire come una somma di singole azioni, non vale senz'altro

[1] Così forse è da intendere l'osservazione sui sentimenti localizzati che appare nella recente critica di Titchener alla teoria di Wundt sui sentimenti (Zeitschr. f. Psych. u. Physiol. d. Sinnesorg Bd. XIX, Heft 5, n. 6). Qui non mi riferisco affatto ai rapporti speciali delle rappresentazioni di tempo.

per i sentimenti [1] elementari *sensoriali* dai quali appunto deve partire lo studio della questione.

E di questi si occupa la presente comunicazione. Nella sua forma più semplice il sentimento è un fenomeno che accompagna la sensazione. Nello stato di veglia della coscienza non può esservi un sentimento elementare sensoriale, senza che sia contemporaneamente presente una sensazione.

Anche qui naturalmente si richiede il sopra descritto stato di coscienza, nel quale la sensazione per quanto è possibile (e non lo è mai completamente) è isolata per la ricerca psicologica; poichè tosto che diverse sensazioni vengono a formare nuove combinazioni è anche mutato il corrispondente stato sentimentale. Pertanto *nello studio dei sentimenti semplici sensoriali il nostro compito fondamentale deve essere di produrre più che sia possibile sensazioni semplici.*

Nel campo del senso gustatorio di cui mi sono occupato a lungo, si ottiene questo, come sopra è stato accennato, molto bene. Si presenta dunque la domanda se sia possibile isolare anche la qualità sentimentale accompagnante la sensazione, fintanto che ne possa essere regolarmente determinato il decorso.

Io mi sono posto da lungo tempo questo problema e vorrei nella presente comunicazione soltanto accennare alcuni fatti i quali forse potranno tornar utili per lo studio delle regolari relazioni delle qualità sentimentali in altri dominî sensorî. Per cause indipendenti dalla mia volontà io non ho potuto finora condurre a termine questo lavoro e devo perciò riserbare a posteriore pubblicazione i risultati non ancora maturi. Io non entro neanche nella controversia che ha or ora sollevato Titchener nella su citata critica alla nuova teoria dei sentimenti di Wundt, limitandomi a considerare le ormai generalmente riconosciute qualità sentimentali di *piacere* e *dispiacere* [2].

Ciò che innanzi tutto ci colpisce sono le differenze individuali, le quali si mostrano anche in altri problemi del senso del gusto. È notorio che le qualità di salato, acido e dolce in deboli soluzioni sono accompagnate da un sentimento di piacere e solo a più alta concentrazione della sostanza saporifica si ha un sentimento di dispiacere; l'amaro invece suscita generalmente un sentimento di dispiacere; ma d'altra parte noi troviamo alcuni soggetti nei quali le suddette qualità, anche portate ai medesimi gradi di

(1) All'azione di un complesso di singoli sentimenti si riferisce anche un'osservazione di Oskar Vogt nella sua trattazione su *Die directe psychologische Experimentalmethode in hypnotischen Bewusstseinzuständen* (Zeitschr. für Hypnotismus 1897, Separat-abz. S. 13), quantunque l'autore parli dell'isolamento dei sentimenti semplici. Del resto mi sento d'accordo con Vogt in molti punti del suo lavoro e credo che un'esatta applicazione del suo metodo per la nuova psicologia possa offrire grandi servigi.

(2) Preferisco il termine *dispiacere* a quello di dolore che si trova spesso nella letteratura italiana. Dolore per me è una sensazione e non di per sè un sentimento.

sensazione non danno alcun dispiacere, e altri per i quali l' amaro non è assolutamente spiacevole, anzi dall' inizio fino ad un alto grado di concentrazione della sostanza, è accompagnato da un sentimento di piacere. E perchè qui si tratta di sciogliere singole questioni, dobbiamo manifestamente escludere tali casi eccezionali dal nostro studio.

Dalle molte ricerche intraprese io sono stato portato a determinare prima di tutto per le singole qualità la curva dell' intensità della sensazione, ottenendo che i soggetti fissassero la loro attenzione a distinguere le differenze di sensibilità. Lavorando in questo modo si ottiene, come è noto, una curva che coll'altezza degli stimoli raggiunge la sua fine.

Ma per giungere a buoni risultati in queste esperienze occorrono per le singole soluzioni speciali cautele: e sovratutto quando si ha a fare cogli elettroliti i quali danno le qualità di salato e acido, ed ai quali anche è legato il sapore alcalino [1]. Così anche alcuni sapori amari presentano proprietà speciali.

Io mi limito alla qualità del dolce, a produrre la quale sono stimolo assai opportuno gli zuccheri e in ispecie lo zucchero di canna. Delle difficoltà tecniche che la ricerca psicofisica deve sormontare farò parola in una trattazione posteriore più completa. Voglio qui far notare una sola difficoltà, quella di determinare sulla superficie della lingua due parti del tutto egualmente sensibili, le quali nell' esperienza rappresentino delle costanti necessarie.

Determinata la curva della sensazione, esercito i soggetti in alcune esperienze preliminari a distrarre la loro attenzione dalla sensazione e a concentrarla esclusivamente sul tono sentimentale (Gefühlston) che accompagna ogni grado di sensazione. In queste esperienze preliminari non tengo conto della curva della sensazione ottenuta e applico sostanze saporifiche qualsivogliano che posseggono un tono sentimentale molto pronunciato. In sulle prime queste esperienze sono difficili e affaticanti: in alcune persone mi pare di non essere potuto giungere a una sufficiente concentrazione dell' attenzione sul tono sentimentale; esse erano sempre distratte passivamente dalla sensazione. Queste difficoltà forse hanno indotto Vogt a fare tali esperienze esclusivamente nello stato d' ipnosi. In altri soggetti coll' esercizio si può giungere al punto da poter astrarre dalla sensazione in modo sufficiente.

Raggiunto questo stadio io ripeto la curva della sensazione antecedentemente determinata, e ad ogni volta richiedo l' apprezzamento su ogni tono sentimentale cominciando alla soglia assoluta e adoperando la soglia della differenza come ascissa. Si noti ancora che tanto per la determinazione della curva della sensazione quanto per quella del sentimento la durata dello

[1] V. le ricerche fatte da me in unione ad Höber, *Intorno al sapore di alcuni sali e di alcune sostanze alcaline.* Archivio per le scienze mediche 1898, vol. XXIII, n. 5.

stimolo deve entrare nella ricerca come una costante. Io sono solito lasciare agire lo stimolo da 3-4 secondi sull'organo di gusto [1].

Con tali regole e precauzioni ottengo una curva, che come ha giustamente osservato il Lehmann, comincia alla soglia con uno stadio di indifferenza. Essa cresce poi molto lentamente finchè comincia un nuovo stadio di indifferenza. Questo però non è affatto un punto fisso, ma piuttosto si presenta come un piccolo tratto la cui lunghezza non solo differisce in diverse persone, ma nel medesimo soggetto non è sempre assolutamente eguale. Dopo questo secondo stadio di indifferenza la curva piega al dispiacere e decresce alquanto rapidamente. Aggiungo che, per quanto io abbia potuto osservare, le singole curve sentimentali che accompagnano le diverse sensazioni non coincidono.

Nella curva così ottenuta le ordinate non sono stabilite numericamente con una precisione eguale a quella delle ascisse. Si potrà forse un giorno riparare a questa lacuna coi risultati del metodo grafico. Per quanto si debbono riconoscere i risultati *generali* che ci ha portato il metodo grafico, non si è ancora potuto giungere con questo metodo, per le successive differenze che si offrono nel campo del sentimento, a risultati liberi d'ogni obbiezione. La ragione sta in ciò che difficilmente si riesce a controllare e a eliminare le determinanti secondarie (specialmente fisiologiche) che entrano nella esperienza e quindi a interpretare esattamente la curva. Inoltre mi sembra che data una medesima sensazione o conoscenza psichica non tutti gli individui reagiscono allo stesso modo col loro sistema vaso-motorio, di guisa che anche questa reazione non può prendersi come costante per il medesimo processo. Finchè non saremo più illuminati nella interpretazione delle singole curve ottenute col metodo grafico, a mio avviso il metodo della risposta verbale (Aussagemethode) in questo caso mi pare più attendibile.

Fisiologia. — *Sulle proprietà dei Nucleoproteidi.* Nota del dott. FILIPPO BOTTAZZI, presentata dal Socio LUCIANI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Patologia. — *Altre ricerche sulla malaria dei pipistrelli.* Nota del dott. A. DIONISI, presentata dal Socio B. GRASSI.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

[1] V. Alfredo Lehmann, *Die Hauptgesetze des menschlichen Gefühlslebens.* Leizig 1894.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

P. E. Vinassa de Regny. *Studî sulle Idractinie fossili.* Presentata dal Socio Capellini.

N. Pierpaoli. *Coefficienti di temperatura dei coristi normali nell'ufficio centrale per il corista uniforme.* Presentata dal Socio Blaserna.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Beltrami dà il doloroso annuncio della perdita fatta dalla Classe nella persona del Socio Straniero Carlo Friedel, mancato ai vivi il 20 aprile 1899; apparteneva il defunto Socio all'Accademia sino dal 16 dicembre 1883.

Il Socio Cannizzaro legge il seguente cenno necrologico del Socio straniero Carlo Friedel.

« Perchè si apprezzi la gravità della perdita fatta dalla scienza e dalla Francia coll' inattesa scomparsa dell' illustre nostro Socio Carlo Friedel, credo mio dovere riassumere alcune brevi notizie della sua vita scientifica.

« Io non so se si debba più ammirare la grande estensione del campo scientifico al cui progresso tanto contribuì Carlo Friedel, con le lezioni, coi libri e coi lavori originali, o l' importanza di tali singoli lavori e l' efficacia dell' insegnamento nei varî gradi e rami a cui attese. Egli ha dato prova che la varietà degli studî non scema, ma invece ne accresce la profondità e che contro l' opinione manifestata da Decandolle si possa bene accoppiare il lavoro assiduo di ricerche originali coll' ufficio di professore e di capo di numerosa scolaresca.

« Nel 1852 all' età di venti anni dopo fatti i primi studî nel Ginnasio e nella facoltà di scienze di Strasburgo sua città nativa, si recò a Parigi presso il nonno materno professore Duvernoy, ed ivi in luogo di affrettarsi a rinchiudere in uno ristretto speciale ramo, continuò alla Sorbonne i varî studî intrapresi nella facoltà di scienze di Strasburgo in modo da ottenere nel 1854, dietro splendido esame, la licenza nelle scienze fisiche e matematiche.

« Armato di tale estesa e varia coltura, entrò nel laboratorio di Wurtz per dedicarsi alla chimica ed ivi incominciò ben tosto, da solo, o in compagnia del maestro, la serie delle sue importanti ricerche, non trascurando però nel medesimo tempo di proseguire a coltivare altri rami di scienze naturali, sopra tutto la mineralogia. E nel 1856 fu nominato conservatore

delle collezioni mineralogiche nella scuola di Miniere; per molti anni tenne quel posto contemporaneamente a quello di preparatore nel laboratorio chimico del Wurtz, attendendo con eguale assiduità e zelo all' uno ed all' altro ufficio ed agli studî corrispondenti. Per ottenere il dottorato nel 1868 presentò per tesi da un lato gli importanti lavori di chimica organica sulle aldeidi e sui chetoni, e dall' altro quello di fisica e di mineralogia sulla piroelettricità di alcuni minerali.

« Nel 1871 fu nominato Maître de Conférences alla scuola normale, ufficio adattatissimo alla varietà delle sue cognizioni scientifiche.

« Nel 1876 successe a Delafosse nella cattedra di mineralogia alla Sorbonne. Piacemi leggere un eloquente brano della sua prelezione al corso da lui fatto nel 1875 su quella disciplina, perchè si veda il modo elevato come si propose di trattarla:

« Ce qui caractérise à nos yeux la minéralogie et ce qui lui donne son « véritable intérêt c'est précisément qu'elle est le point de rencontre naturel « de la chimie, de la physique, de la cristallographie. Le but qu'elle se pro- « pose, la détermination complète des minéraux, l'oblige à réagir contro la di- « vision extrême que le progrès des sciences a eu pour conséquence. Cette divi- « sion, qui permet d'explorer à fond chaque science particulière et d'exploiter « ses moindres filons, est cause que l'on néglige trop souvent ces confins où « se touchent plusieurs ordres de connaissances, et où, comme au contact de « deux terrains différents se trouvent fréquemment accumulées des richesses « exceptionnelles ».

« Prosegue esponendo come la mineralogia abbia reso e renda alla fisica, alla chimica ed alla cristallografia grandi servizî in cambio di quelli che ha da esse ricevuti e come tutte queste varie discipline mirino al comune lontano fine, cioè alla scoverta delle relazioni tra la composizione chimica, la forma cristallina e le proprietà fisiche dei corpi, relazioni di cui l' isomorfismo ci fa intravedere l' esistenza senza però darcene la chiave, e che una volta stabilite fonderanno in una magnifica unità quei corpi di dottrina oggidì separati.

« Tali ampî concetti lo guidarono costantemente nelle lezioni, nei trattati di mineralogia e nei numerosi lavori con cui contribuì al progresso di quella disciplina; nei quali o descrive nuovi minerali, o di minerali noti compie lo studio della forma cristallina, della composizione delle proprietà ottiche, o addita metodi per ben misurare queste ultime, o studia importanti fenomeni fisici come la piroelettricità nei cristalli di Blenda, o le correnti termoelettriche nei cristalli di Tetraedite, o infine produce artificialmente i più importanti minerali ed alcune loro modificazioni, procurando di imitare le condizioni in cui si sono potuti trovare negli strati terrestri ove si rinvengono.

« In tali ultimi importanti studî risalta il vantaggio dell'associazione assai rara di una grande perizia chimica colle estese cognizioni di mineralogia e geologia.

« Tutti questi lavori basterebbero a porre Carlo Friedel tra i più illustri mineralogi della nostra epoca, se non prevalesse la sua riputazione come insegnante e cultore della chimica propiamente detta.

« Io non posso qui rammentare le lunga lista dei lavori del Friedel in tale campo. Mi limiterò soltanto a riferire il giudizio complessivo che sul merito di essi diede la Società Reale di Londra, il cui Presidente annunziando nella seduta del 30 novembre 1880 essere stata accordata al prof. Friedel membro dell'istituto di Francia la medaglia Davy, ne espone i motivi colle parole seguenti:

« Dal 1856 fino ai nostri giorni le investigazioni di Carlo Friedel nel-
« l'esteso e svariato campo delle ricerche chimiche sono state continuate,
« numerose ed importanti. Non solo la chimica mineralogica, la teorica, la
« generale debbono a lui molti contributi preziosi, ma anche la così detta
« chimica organica; nel cui campo da lui più specialmente coltivato, ha no-
« tevolmente contribuito ad abbattere le barriere, considerate un tempo in-
« sormontabili, che isolavano la chimica dei composti del carbonio.

« Tra gli argomenti dell'opera feconda di Carlo Friedel deve essere più
« specialmente, più particolarmente ricordata la chimica della famiglia delle
« sostanze organiche a tre atomi di carbonio alla quale appartengono l'acido
« propionico, l'acido lattico, la glicerina, il propilene e l'acetone. La determi-
« nazione della costituzione dell'acido lattico e dell'acetone e delle relazioni
« reciproche tra i varî membri, spesso isomeri, di questa grande famiglia, co-
« stituì per un lungo periodo uno dei problemi più fieramente contestati
« della chimica organica, mentre al tempo stesso ne è uno dei più fonda-
« mentali. E Carlo Friedel portò per la risoluzione soddisfacente di questo
« problema un largo contributo di lavoro.

« Passando ad un altro ramo di ricerche, Carlo Friedel, parte da solo
« e parte in unione con J. M. Crafts e con A. Ladenburg, sviluppò e con-
« fermò in maniera veramente sorprendente l'analogia esistente tra il modo
« di combinazione del carbonio e quello del silicio, gli elementi più carat-
« teristici l'uno del regno organico, l'altro del minerale. Per menzionare
« ancora uno dei soggetti di ricerca di Carlo Friedel, ricorderemo quello
« fatto in collaborazione di J. M. Crafts che lo condusse alla scoverta di
« un metodo semplice e largamente applicabile alla sintesi dei composti or-
« ganici. Questo metodo consiste nel mettere insieme un idrocarburo ed un
« cloruro organico in presenza di cloruro di alluminio, con che i residui dei
« due composti si combinano per formare una sostanza più complessa e fre-
« quentemente molto complessa. Indipendentemente dalla sua utilità, questo
« processo sintetico è di notevole interesse per la parte che vi prende il clo-

« ruro di alluminio, il quale malgrado sia essenziale alla reazione si trova
« inalterato alla fine di essa e sembra subire continuamente in piccola parte
« una contemporanea trasformazione e rigenerazione ».

« Conformi a questo ora letto, sono i giudizî dell'Accademia delle scienze dell' istituto di Francia sui medesimi lavori espressi, quando prima nel 1865 e poi nel 1869 accordò a Friedel il premio Jecker, e quando nel 1873 a lui assegnò il premio Lacaze. Questi giudizî hanno poi grande valore perchè dati quando era ancor fresca la memoria dello stato della scienza al momento in cui furono pubblicati i risultati di quelle ricerche, e se ne potevano perciò meglio valutare i grandi benefici effetti che ebbero nel progresso ulteriore.

« In questi giudizî sono altamente apprezzati dei lavori premiati:

« 1° *La trasformazione dell'acetone nell'alcool isopropilico e la scoverta altresì del pinacone e della pinacolina e della loro costituzione.*

« 2° *La trasformazione dell'acetone nel dicloropropano isomero del cloruro di propilene.*

« 3° *La trasformazione del cloruro di propilene in tricloridrina e la sintesi della glicerina.*

« 4° *I composti del siliceo che avvicinano questo elemento al carbonio.*

« Il Friedel però esercitò un'efficace azione sul progresso della chimica « non solo coi suoi pregevoli lavori originali ora da me rapidamente cennati, ma altresì quale promotore e Capo della schiera dei giovani chimici francesi.

« Nominato nel 1878 membro dell'Istituto al posto di Regnault, cooperò col Wurtz nell'incoraggiare i giovani chimici. Nominato nel 1884 professore di chimica organica alla Sorbonne al posto di Wurtz suo concittadino e suo maestro, egli ne accettò l'eredità e ne continuò la nobile missione.

« Non potrà sfuggire agli storici della scienza l'osservazione che tra i contributi della Alsazia alla gloria scientifica della Francia risalta il fatto che quattro dei più originali ed operosi chimici che hanno arricchito la letteratura francese in questa seconda metà del secolo sono cittadini di Strasburgo i quali in quella città ricevettero la prima educazione.

« Sono:

« Carlo Federico Gerhardt morto nel 1856 a soli quaranta anni.

« Carlo Adolfo Wurtz nato il 1817 e morto il 1884.

« Paolo Schutzenberger nato il 1829 e morto nel 1897.

« Carlo Friedel nato il 1832 e morto nel testè scorso aprile.

« Il Wurtz tessè l'elogio del Gerhardt; il Friedel quello del Wurtz e quello dello Schutzenberger con due splendide monografie che costituiscono due importanti brani della storia della chimica moderna.

« Spetterà ora ad un Francese, probabilmente a chi fu alla scuola di Wurtz collega del Friedel, illustrarne la vita e l'opera scientifica. Io non ho potuto che darne pochi e rapidi cenni.

« Non voglio però chiudere questo breve ricordo senza porre in risalto l'unità di indirizzo e la continuità nell'azione successiva esercitata dai chimici Alsaziani, soprattutto dai tre Carlo, azione diretta alla medesima meta che si può dire essere stata pienamente raggiunta durante la vita dell'ultimo superstite, il Friedel.

« Carlo Gerhardt aveva iniziato quella grande riforma che diede tanto energico impulso allo sviluppo della chimica organica e compita colle modificazioni apportate nei pesi atomici dei metalli e colla dottrina del collegamento degli atomi polivalenti, costituisce la teoria molecolare ed atomica che oggi, accolta generalmente, è il fondamento di tutte le considerazioni teoriche e del linguaggio per esprimere e comparare i fatti, nella chimica.

« Le idee del Gerhardt sostenute e svolte con tanta ampiezza e lucidità nei rendiconti fatti da lui in comune col Laurent e nei suoi trattati, appoggiate dalle nuove esperienze di Lui e di Williamson, penetravano lentamente in Germania, in Russia, in Inghilterra ed in Italia.

« In Francia però trovavano una forte resistenza, ed il Cahours e lo stesso Wurtz, non ostante apprezzassero i fatti e le ragioni del Gerhardt, non osavano adottarne la Notazione. Però dopo che nel congresso chimico di Carlsrhue del 1860 furono introdotte nel sistema di Gerhardt le modificazioni che ne compirono l'unità e la coerenza di tutte le sue parti, ed il sistema così modificato fu accolto dai chimici, Carlo Wurtz ne divenne l'apostolo in Francia, l'introdusse nell'insegnamento, lo propugnò nelle conferenze e nelle molteplici sue pubblicazioni, e con calore e vivacità lo sostenne nell'Accademia delle scienze nelle sedute del maggio 1877 contro le opposizioni dei due autorevoli chimici H. Sainte-Claire Deville e Berthelot, i quali si dichiararono fedeli al linguaggio degli equivalenti ed opposti alla nuova Notazione atomica.

« In questa vivace lotta durata più anni il Wurtz ebbe tra i più caldi cooperatori il suo concittadino ed allievo Carlo Friedel, il quale continuò la propaganda coll'insegnamento, colle ripetute conferenze e colle varie numerose pubblicazioni tra le quali il seguito del Dizionario di Wurtz, ed oggi quella che è stata detta Notazione atomica è generalmente adottata anche dal più autorevole oppositore qual fu il Berthelot.

« Ultimamente, in una prefazione apposta al Trattato di chimica organica di Behal il Friedel opponendosi al tentativo del prof. Ostwald di sopprimere dalla scienza il concetto di atomi e di molecole, definisce con severa critica filosofica il valore logico e l'ufficio della teoria molecolare ed atomica e dimostra l'impossibilità di eliminarla dalla scienza almeno nel periodo attuale del suo svolgimento.

« Che cosa potrò ora dire delle doti morali del Friedel, che non vi paia esagerato?

« Non parlerò della sua modestia poichè Egli stesso avea notato nello Elogio di Schutzenberger che la modestia è qualità meno rara che non si crede negli uomini di un merito superiore, i quali si giudicano loro stessi prendendo come termine di comparazione non la folla che li circonda ma un Ideale che si son fatto tanto elevato che non possono mai raggiungere.

« Dirò soltanto che Egli avea sortito da natura, forse per legge di eredità, quelle buone doti della mente e del sentimento che sogliono associarsi, cioè, intelligenza equilibrata aliena d'ogni esagerazione, animo mite inclinato alle relazioni affettuose coi parenti, gli amici e gli allievi ed alla benevolenza con tutti.

« Frequentandolo in seno alla sua famiglia, a fianco alla diletta consorte ed agli affettuosi figli, seguendolo in tutte le relazioni coi colleghi e coi dipendenti si rimaneva confortato dalla prova vivente di quanto gli studî severi e l'amore della verità che vi si attinge perfezionino le doti morali sortite da natura ».

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci Ciamician, Taramelli, Mosso, Fano, Berthelot, Darwin, Poincaré e Weber.

CORRISPONDENZA

Il Socio Todaro dà comunicazione dei resoconti, rinvenuti dal marchese Luzzi, delle tornate tenute dall'Accademia dei Lincei in Rimini, dal 1749 al 1752.

Il Segretario Blaserna dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La Società Reale di Londra; la Società di scienze naturali di Emden; la Società geologica di Sydney; il Museo di zoologia comparata di Cambridge Mass.; la R. Scuola navale di Genova; l'Università di Strassburg; gli Osservatorî di Arcetri, di Edinburgo e di Oxford.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

La Società zoologica di Londra; la Società di scienze naturali di Francoforte s. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 7 maggio 1899.

Ball V. — A Manual of the geology of India. P. I « Corundum », by T. H. Holland. Calcutta, 1898. 8°.

Bard L. — La spécificité cellulaire. Évreux s. a. 8°.

Berthelot M. et *Jungfleisch E.* — Traité de chimie organique. 4e éd., t. I. Paris, 1898. 8.°

Ciamician G. — Ricerche sperimentali eseguite nel biennio 1897-98 nel laboratorio di chimica generale della r. Università di Bologna. Palermo, 1897-99. 8°.

D' Achiardi G. — Studio di alcuni Opali della Toscana. Pisa, 1899. 8°.

Dentec F. L. — La sexualité. Évreux s. a. 8°.

Darwin G. H. — The Tides and kindred Fenomena in the Solar System. London, 1898. 8°.

De Angelis d'Ossat G. — Il gen. Heliolites nel Devoniano delle Alpi Carniche italiane. Roma, 1899. 8°.

Id. e *Luzi F. G.* — Altri fossili dello Schlier delle Marche. Roma, 1899. 8°.

Del Guercio G. — Contribuzione allo studio delle forme e della biologia della Fleotripide dell' Olivo ecc. Firenze, 1899. 8°.

Effemeridi del Sole e della Luna per l' orizzonte di Torino e per l' anno 1899. Torino, 1899. 8°.

Fano G. — Un fisiologo intorno al mondo. Milano, 1899. 8°.

Fremy. — Encyclopédie chimique. — Table alphabétique des matières. Paris, 1899. 8°.

Giannetto S. — Appunti delle lezioni intorno alle essenze. Messina, 1898. 8°.

Gravis A. — Recherches anatomiques et physiologiques sur la Tradescantia virginica L. ecc. Bruxelles, 1898. 4°.

Jona A. — La collezione monumentale di Lazzaro Spallanzani. — Catalogo-guida. Reggio Emilia, 1888. 8°.

Id. — Prima relazione decennale sul Museo civico Spallanzani, di Storia naturale. Reggio Emilia, 1898. 8°.

Manasse E. — Nuovo metodo di presentarsi della tormalina elbana. Pisa, 1899. 8°.

Mosso A. — I manoscritti di Lazzaro Spallanzani esistenti in Torino. Torino, 1899. 4°.

Nel primo Centenario di Lazzaro Spallanzani. Omaggio di Accademie e scienziati italiani e stranieri 1799-1899. Reggio Emilia, 1899. 8°.

Note sui nuovi impianti della Società generale italiana Edison di Elettricità 1895-1898. Milano, 1899. 4°.

Oddono E. — Sull' esistenza delle appendici epiploiche nel bambino e nel feto. Pavia, 1899. 8°.

Pavesi P. — Il crimine scientifico Spallanzani giudicato. Milano, 1899. 8°.

Id. — Il prospetto delle lezioni Spallanzani. Pavia, 1899. 8°.

Poincaré H. La théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes. Chartres, s. a. 8°.

Porro F. — Sulla eclisse totale di Luna del 27 dicembre 1898. Torino, 1899. 8°.

Taramelli T. — Di alcune particolarità della superficie degli strati nella serie dei nostri teoremi sedimentari. Milano, 1899. 8°.

Tuccimei G. — Commemorazione del comm. prof. Michele Stefano de Rossi. Roma, 1899. 4°.

Verson E. — Sull'ufficio della cellola gigante nei follicoli testicolari degli insetti. Padova, 1899. 8°.

Weber H. — Lehrbuch der Algebra. 2e Aufl. Bd. II. Braunschweig, 1899. 8°.

Weinek L. — Berghöhenbestimmung auf Grund des Prager photographischen Mond-Atlas. Wien, 1899. 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 maggio 1899.

A. Messedaglia Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Sulla distribuzione in latitudine delle facole e macchie solari osservate al R. Osservatorio del Collegio Romano nel 1° trimestre 1899.* Nota del Socio Pietro Tacchini.

Ho l'onore di presentare all'Accademia i risultati ottenuti circa la distribuzione in latitudine delle facole e macchie osservate nel primo trimestre dell'anno corrente. Dalle determinazioni delle latitudini per 80 gruppi di facole e 23 di macchie, si ricavarono le seguenti cifre per la frequenza relativa dei due fenomeni nelle diverse zone solari:

1° trimestre 1899.

Latitudine	Facole		Macchie	
50° + 40°	0,008			
40 + 30	0,008			
30 + 20	0,052	0,297		
20 + 10	0,096		0,080	0,160
10 . 0	0,133		0,080	
0 — 10	0,259		0,320	0,840
10 — 20	0,281		0,520	
20 — 30	0,096	0,703		
30 — 40	0,052			
40 — 50	0,015			

Anche le facole, al pari delle protuberanze, furono in questo trimestre molto più frequenti nelle zone australi, col massimo di frequenza nella zona (0° — 20°) come nel precedente trimestre. Le macchie risultarono pure molto più abbondanti al sud dell' equatore, per modo che tutti i fenomeni solari furono più frequenti nell' emisfero australe. I gruppi di macchie si estesero dall' equatore fino a ± 20° soltanto, come nel trimestre precedente.

Nessuna eruzione fu osservata.

Matematica. — *Sulle nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante.* Nota III del Socio Luigi Bianchi.

Alla fine della mia Nota precedente [1] ho già indicato che le nuove trasformazioni reali delle superficie a curvatura costante, negativa o positiva, possono comporsi con due trasformazioni complementari, di Bäcklund reali od immaginarie.

Nella presente Nota farò vedere come, partendo dai risultati del teorema di *permutabilità*, teorema da me trovato nel 1892 e pubblicato in questi Rendiconti [2], si possono facilmente stabilire le formole effettive che danno le nuove trasformazioni.

È mio debito avvertire che nel frattempo un sistema di formole equivalenti in sostanza a quelle da me trovate, è stato pubblicato nei Comptes Rendus de l'Académie (24 avril) dal sig. Darboux.

La circostanza che merita di esser posta maggiormente in rilievo è certamente questa, che anche per le nuove trasformazioni valgono tutte le conseguenze da me altravolta dedotte dal teorema di permutabilità. Si arriva così all' importante risultato espresso nella proposizione seguente:

Quando per una data superficie a curvatura costante, positiva o negativa, siasi completamente integrato il sistema di equazioni fondamentali che definiscono la trasformazione, la successiva applicazione del metodo alle nuove superficie via via ottenute non richiederà mai altro che calcoli algebrici e di differenziazione.

Questo è per esempio il caso per le superficie (d' Enneper) a curvatura costante positiva che ho dedotto alla fine della mia Nota del 5 marzo.

Così anche la teoria delle superficie a curvatura costante *positiva* viene senz' altro portata a quel grado di sviluppo, che la teoria delle superficie pseudosferiche già da diversi anni aveva raggiunto.

1. Cominciamo la ricerca dal caso della curvatura negativa, come quello nel quale soltanto può darsi che le trasformazioni componenti, complementari o di Bäcklund, siano reali.

[1] Presentata nella seduta del 23 aprile 1899.

[2] Serie 5ª, vol. I, 2° sem. Vedi anche § 257 e sgg.

Già nella mia prima Nota del 19 febbraio ho osservato come le nuove trasformazioni delle superficie pseudosferiche offrano tre casi distinti, a seconda che per la costante indicata con a al § 5 di detta Nota si ha

$$a = 1\,, \quad a > 1\,, \quad \text{ovvero } a < 1.$$

1°. Se $a = 1$, la trasformazione si compone di due successive complementari (l. c. § 7) e potrebbe dirsi la trasformazione *bicomplementare*. Precisamente si ha:

Se S′, S″ *sono due superficie pseudosferiche complementari di una medesima* S, *le normali a* S′, S″ *in due punti corrispondenti si incontrano in un punto, il cui luogo è applicabile sulla superficie logaritmica di rotazione; si passa da* S′ *a* S″ *con una trasformazione bicomplementare.*

2. Siano ora S′, S″ due superficie pseudosferiche trasformate di Bäcklund di una medesima superficie pseudosferica S e precisamente i valori della costante σ per le due trasformazioni siano eguali e di segno contrario. Allora abbiamo il teorema:

Le normali a S′, S″ *in due punti corrispondenti* M′, M″ *s' incontrano in un punto* P *il cui luogo è una superficie* Σ *applicabile sul catenoide accorciato; i punti* M′, M″ *giacciono simmetricamente rispetto al piano tangente nel punto corrispondente* P *di* Σ.

La trasformazione colla quale si passa da S′ a S″ è quindi una delle nuove trasformazioni e corrisponde ad un valore $a > 1$ della costante a.

3°. Per trattare ora il 3° caso riferiamoci ai risultati del teorema di permutabilità, come sono esposti a pag. 435 e sgg. delle *Lezioni*.

Essendo ω una soluzione dell' equazione

$$(a) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \operatorname{sen} \omega \cos \omega\,,$$

le equazioni

$$(b) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\omega_1 - \omega)}{\partial u} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1} \operatorname{sen}(\omega_1 + \omega) \\[2ex] \dfrac{\partial(\omega_1 + \omega)}{\partial v} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\sigma_1}{\cos\sigma_1} \operatorname{sen}(\omega_1 - \omega)\,, \end{cases}$$

dove σ_1 indica una costante arbitraria, costituiscono per la funzione incognita ω_1 un sistema illimitatamente integrabile, sicchè la soluzione generale ω_1 contiene (oltre σ_1) una costante arbitraria. Inoltre la ω_1 è una nuova soluzione dell' equazione fondamentale (a).

Indicando con σ_2 una nuova costante, diversa da σ_1, determiniamo similmente una terza soluzione ω_2 della (a) dalle equazioni analoghe:

$$(c) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\omega_2 - \omega)}{\partial v} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}\sigma_2}{\cos\sigma_2} \operatorname{sen}(\omega_2 + \omega) \\[2ex] \dfrac{\partial(\omega_2 + \omega)}{\partial v} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\sigma_2}{\cos\sigma_2} \operatorname{sen}(\omega_2 - \omega)\,. \end{cases}$$

Il teorema di permutabilità ci insegna allora che si ottiene *in termini finiti* una quarta soluzione ω_3 della (a) dalla relazione

$$(d) \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_3 - \omega}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right).$$

Questa soluzione ω_3 è legata come ω, ad ω_1, ω_2 dalle medesime equazioni (b) (c), ove soltanto si ponga ω_3 in luogo di ω, e si invertono le due costanti σ_1, σ_2 fra loro.

Analiticamente questo risultato è indipendente, come è naturale, dall' essere le funzioni ω, ω_1, ω_2, ω_3 e le costanti σ_1, σ_2 reali o complesse. Ora suppongasi ω reale e σ_1 complesso; indicando con $\bar{\sigma}_1$ la coniugata di σ_1, pongasi

$$\sigma_2 = \bar{\sigma}_1 .$$

La ω_1, definita dalle (b), sarà naturalmente complessa e si vede subito che alle (c) si potrà soddisfare prendendo per ω_2 la coniugata di ω_1:

$$\omega_2 = \bar{\omega}_1 .$$

Se poniamo scindendo il reale dall' immaginario

$$\sigma_1 = \sigma + i\sigma' , \quad \sigma_2 = \sigma - i\sigma'$$
$$\omega_1 = \theta + i\varphi , \quad \omega_2 = \theta - i\varphi$$

la (d) diventa

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_3 - \omega}{2}\right) = \frac{\cos\sigma}{\operatorname{senh}\sigma'} \operatorname{tgh}\varphi$$

e ci dimostra che ω_3 *ritorna nuovamente reale.* In particolare ciò vale se supponiamo σ_1 puramente immaginario cioè $\sigma = 0$ [1]. Allora la superficie pseudosferica S_3, corrispondente alla soluzione ω_3 della (a), deriva da S appunto per mezzo di una delle nuove trasformazioni, che corrisponde ad un valore $a < 1$ della costante a. Si ha cioè il risultato:

La superficie pseudosferica S_3 *può collocarsi in tale posizione nello spazio che le normali a* S, S_3 *in punti corrispondenti* M, M_3 *si incontrino in un punto corrispondente* P, *il cui luogo è una superficie* Σ *applicabile sulla superficie di rotazione avente per meridiano la curva*

$$r = m \operatorname{senh} z ;$$

[1] La trasformazione più generale che si ottiene supponendo $\sigma \neq 0$ si compone del resto mediante questa elementare combinata con trasformazioni di Lie, nello stesso modo come la trasformazione di Bäklund risulta dal combinare una trasformazione complementare con trasformazioni di Lie (*Lezioni* pag. 894).

i punti corrispondenti M, M_3 *sono simmetrici rispetto al piano tangente in* P *a* Σ.

2. Passiamo ora al caso delle superficie a curvatura costante positiva K e poniamo, al solito, $K = +1$. Ricordiamo che la determinazione di tali superficie dipende dalla integrazione della equazione a derivate parziali

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta \cosh\theta = 0\,;$$

ad ogni soluzione θ di questa equazione corrisponde una tale superficie d'elemento lineare

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2\,,$$

le line u, v essendo le linee di curvatura [1].

Ora indicando con σ_1 una costante qualunque reale o complessa, prendiamo il seguente sistema di equazioni simultanee per una nuova funzione incognita θ_1:

$$(\beta) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + i\frac{\partial \theta}{\partial v} &= \operatorname{senh}\sigma_1 \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma_1 \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 \\ i\frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\operatorname{senh}\sigma_1 \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 - \cosh\sigma_1 \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 \end{aligned} \right.$$

$$(i = \sqrt{-1})\,.$$

La condizione d'integrabilità è identicamente soddisfatta, a causa della (α), e la soluzione più generale θ_1 di questo sistema contiene quindi (oltre σ_1) una costante arbitraria; di più risulta θ_1 una nuova soluzione della (α).

Prendiamo ora un secondo valore σ_2 per la costante σ_1 e determiniamo similmente θ_2 dalle equazioni simultanee omologhe:

$$(\gamma) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \theta_2}{\partial u} + i\frac{\partial \theta}{\partial v} &= \operatorname{senh}\sigma_2 \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_2 + \cosh\sigma_2 \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_2 \\ i\frac{\partial \theta_2}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\operatorname{senh}\sigma_2 \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_2 - \cosh\sigma_2 \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_2\,, \end{aligned} \right.$$

cosicchè θ_2 sarà una nuova soluzione della (α).

Ora vale anche qui, per la equazione (α), un teorema di permutabilità. Possiamo infatti trovare *in termini finiti* una quarta soluzione θ_3 dell'(α) dalla equazione

$$(\delta) \qquad \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \coth\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right).$$

[1] Propriamente alla soluzione θ corrisponde anche una seconda superficie coll'elemento lineare

$$ds^2 = \cosh^2\theta\, du^2 + \operatorname{senh}^2\theta\, dv^2$$

che si deduce dalla primitiva con una trasformazione di Hazzidakis.

Questa quarta soluzione θ_3 viene legata a θ_1, θ_2 dalle medesime equazioni (β), (γ), ove si cangi θ in θ_3 e si *permutino* le due costanti σ_1, σ_2.

Ora, scindendo il reale dall'immaginario, pongasi

$$\sigma_1 = \sigma + i\sigma', \quad \theta_1 = \omega + i\varphi$$

e si supponga che la soluzione θ da cui si parte sia *reale*. Si vedrà subito che le (γ) possono soddisfarsi ponendo

$$\sigma_2 = -\bar{\sigma}_1 = -\sigma + i\sigma',$$
$$\theta_2 = -\bar{\theta}_1 + \pi i = -\omega + i\varphi + \pi i$$

e la (δ) che diventa

$$(\delta^*) \qquad \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\sigma \operatorname{tgh}\omega$$

dimostra quindi che la soluzione finale θ_3 ritorna *reale*.

Suppongasi in particolare che sia σ_1 reale, cioè sia $\sigma' = 0$ [1]. Scindendo nelle (β) il reale dall'immaginario, si ottiene per le funzioni incognite reali ω, φ il seguente sistema di equazioni ai differenziali totali, che è *illimitatamente integrabile*:

$$(\varepsilon) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial u} = (\operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\omega + \cosh\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\omega) \cos\varphi \\[2ex] \dfrac{\partial\omega}{\partial v} = -(\operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\omega + \cosh\sigma \cosh\theta \cosh\omega) \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

$$(\varepsilon^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = (\operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \cosh\omega + \cosh\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\omega) \operatorname{sen}\varphi \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = (\operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\omega + \cosh\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\omega) \cos\varphi \end{cases}$$

e la formola (δ') ci definisce, col valore di θ_3, una superficie S_3 di curvatura $K = +1$ coll'elemento lineare

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta_3\, du^2 + \cosh^2\theta_3\, dv^2,$$

[1] Anche qui le trasformazioni più generali ottenute supponendo $\sigma' \neq 0$ si compongono di quelle da noi considerate corrispondenti a $\sigma' = 0$ e di trasformazioni di Bonnet. Propriamente indicando con T una tale trasformazione generale con T_0 la nostra particolare e con B_α una conveniente trasformazione di Bonnet-Lie, si ha

$$T = B_\alpha T_0 B_\alpha^{-1}$$

(cfr. *Lezioni*, pag. 434). Per trasformazione B_α Bonnet intendiamo quella che fa passare dalla soluzione $\theta(u, v)$ della (α) all'altra

$$\Theta(u, v) = \theta(u\cos\alpha - v \operatorname{sen}\alpha,\ u \operatorname{sen}\alpha + v\cos\alpha).$$

essendo α una costante.

la quale deriva da S precisamente colla trasformazione della mia Nota del 5 marzo.

Se si pone infatti

$$T = \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\sigma \operatorname{thg}\omega \ ,$$

si vede che T soddisfa appunto alle equazioni (A) di detta Nota, ove si prenda $c = -\cosh^2\sigma$. Ne risulta che riportando sulla normale alla S un segmento $= T$, il luogo degli estremi è una superficie Σ applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione di semiasse maggiore $= 1$, di semiasse minore $= \frac{1}{\cosh\sigma}$.

Volendo poi mettere in relazione le formole date sopra con quelle della Nota precedente [1], si può in particolare domandare come si calcoleranno i corrispondenti valori di W, Φ che soddisfano al sistema differenziale (A), (B) di quella Nota. Si perviene allora al risultato seguente: La funzione Φ viene determinata (a meno di un fattore costante) per quadrature, dalle formole

$$\frac{\partial \log \Phi}{\partial u} = -\frac{\operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \cos\varphi}{\cosh\omega}$$
$$\frac{\partial \log \Phi}{\partial v} = \frac{\operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{sen}\varphi}{\cosh\omega} ,$$

dopo di che si avrà

$$W = \Phi \operatorname{tgh}\sigma \operatorname{tgh}\omega.$$

Così abbiamo considerato soltanto quel caso delle nostre trasformazioni in cui la costante c ha un valore negativo, cioè la superficie Σ luogo degli estremi dei segmenti staccati sulle normali di S è applicabile sull'ellissoide. Ma per avere anche le formole relative al caso di c positivo, basta nelle formole precedenti, in particolare nelle (ε), $(\varepsilon^\star)$ scambiare u con v. Con ciò valgono ancora tutte le nostre conclusioni; soltanto il segmento da staccarsi sulla normale sarà allora

$$T = \coth\sigma \coth\omega > 1.$$

Così saranno soddisfatte le equazioni (A) della Nota del 5 marzo, ove si prenda la costante $c = \operatorname{senh}^2\sigma$. Allora la superficie Σ, luogo degli estremi dei segmenti T, è applicabile sull'iperboloide di rotazione a due falde, la cui iperbola meridiana ha per lunghezze a, b dei semiassi trasverso e coniugato i rispettivi valori

$$a = 1 , \quad b = \frac{1}{\operatorname{senh}\sigma} .$$

[1] 23 aprile, fasc. 8°.

Cristallografia. — *Per l'anortite del Vesuvio.* Nota III di C. Viola, presentata dal Socio Blaserna.

Nella I Nota [1] sull' anortite del Vesuvio riportai gli angoli fondamentali cristallografici.

Nella II Nota [2] esposi il metodo della determinazione dei tre indici $\alpha\ \beta\ \gamma$ per luce D; calcolai i detti indici con gli angoli limiti della riflessione totale, servendomi del riflettometro totale del prof. Abbe di Jena, e finalmente calcolai anche l'angolo degli assi ottici, che è riuscito determinato con una precisione di 7'.6.

Ora si deve fissare l'orientazione dell'elissoide di Fresnel, stabilire la posizione degli assi ottici, calcolare alcune costanti con la legge di Fresnel, e metterle in confronto con quelle osservate.

Dalla tabella riferita nella II Nota si hanno i seguenti angoli (vedi figura annessa).

$$A = (\gamma - \beta) = 85^\circ - 13^\circ, 15' = 71^\circ, 45'$$
$$B = (\alpha - \gamma) = 115 - 85 = 30^\circ$$
$$C = (180 + \beta - \alpha) = 193^\circ, 15' - 115^\circ = 78^\circ\ 15,'.$$

Le note relazioni:

$$\mathrm{tag}^2\,\omega_\alpha = \frac{\cos A}{\cos C \,.\, \cos B}\,,$$
$$\mathrm{tag}^2\,\omega_\beta = \frac{\cos B}{\cos A \,.\, \cos C}\,,$$
$$\mathrm{tag}^2\,\omega_\gamma = \frac{\cos C}{\cos B \,.\, \cos A}$$

ci danno dapprima

$$\log \mathrm{tag}\ \omega_\alpha = 0{,}1246821 \quad \text{e indi} \quad \omega_\alpha = 53^\circ, 06', 50''\,,$$
$$\log \mathrm{tag}\ \omega_\beta = 0{,}5664461 \quad \text{»} \quad \omega_\beta = 74\quad 49\quad 03, 2\,,$$
$$\log \mathrm{tag}\ \omega_\gamma = 9{,}9377823 \quad \text{»} \quad \omega_\gamma = 40\quad 54\quad 35, 4\,,$$

che corrispondono bene con gli angoli osservati nel Nicol, cioè:

$$\omega_\alpha' = 50^\circ,\ \omega_\beta' = 75^\circ \ \text{e}\ \omega'_\gamma = 42^\circ\,.$$

[1] C. Viola, *Per l'anortite del Vesuvio*. Nota I. R. Accad. dei Lincei. Rend. Classe scienze fisiche, mat. e nat., vol. VIII., 1° sem., serie 5ª, fasc. 8°, 1899.

[2] C. Viola, id. id. fasc. 9°, 1899.

Con questi dati si risolvono i rispettivi triangoli sferici rettangoli e si ha:

$$\begin{array}{lll} \varphi_1'' = 19^\circ, 06', 47'' \;, & \varphi_2''' = 51^\circ, 32', 34'' \;, & \varphi_1' = 90^\circ \\ \varphi_1''' = 70 \quad 53 \quad 13 \;, & \varphi_3' = 66 \quad 25 \quad 27 \;, & \varphi_2'' = 90^\circ \\ \varphi_2' = 38 \quad 27 \quad 26 \;, & \varphi_3'' = 23 \quad 34 \quad 23 \;, & \varphi_3''' = 90^\circ \end{array}$$

La coincidenza di V con φ_2' salta subito all'occhio; ma io devo notare che questo dato mi ha servito per compensare gli errori, di cui sono affetti gli angoli A, B, C. La compensazione in A e C fu di 15'.

Ora passiamo a costruire la superficie degli indici, e la sua intersezione col piano (001).

Sia q la grandezza di un vettore, e siano $\psi_1\ \psi_2\ \psi_3$ gli angoli, che esso fa con i tre assi di simmetria ottica a, b, c. L'equazione della superficie degli indici può prendere la seguente forma:

$$\left[\frac{1}{\beta^2\gamma^2}\cos^2\psi_1 + \frac{1}{\gamma^2\alpha^2}\cos^2\psi_2 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\cos^2\psi_3\right] q^4 -$$
$$-\left[\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\cos^2\psi_1 + \left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\cos^2\psi_2 + \left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)\cos^2\psi_3\right] q^2 + 1 = 0$$

essendo α, β, γ i tre indici già determinati nella II Nota [1] cioè:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 1,57524 \\ \beta = 1,58327 \\ \gamma = 1,58840 \end{array}\right\} \text{per luce D}.$$

Calcolando numericamente i coefficienti di detta equazione, essa può presentarsi sotto la forma:

$$\mathrm{M}q^4 - m \,.\, \mathrm{N} \,.\, q^2 + \mathrm{P} = 0\,,$$

dove per brevità:

$$\begin{array}{l} \mathrm{M} = \cos^2\psi_1 + 1,01022\ \cos^2\psi_2 + 1,01678\cos^2\psi_3 \\ m = 5,02976 \\ \mathrm{N} = \cos^2\psi_1 + 1,00513\cos^2\psi_2 + 1,00336\ \cos^2\psi_3 \\ \mathrm{P} = 6,32455\,. \end{array}$$

Ora diamo a $\psi_1\ \psi_2\ \psi_3$ i valori corrispondenti a quei raggi, il cui indice di rifrazione si vuol conoscere. E dapprima si consideri il raggio β, per il quale si ha (vedi sopra):

$$\begin{array}{l} \psi_1 = \varphi_2' = 38^\circ.27'.26'' \\ \psi_2 = \varphi_2'' = 90^\circ \\ \psi_3 = \varphi_2''' = 51^\circ.32'.34''. \end{array}$$

[1] C. Viola, *Per l'anortite del Vesuvio.* Nota II.

Con questi valori avremo

$$M = 1,006490\,,\quad N = 1,003235\,,$$

quindi

$$(0,39893\ q^2 - 1)^2 = 0\,,$$

e

$$q = \pm\ 1,58327\,,$$

che è appunto l' indice β.

Questo controllo ci dice che il piano di sezione passa effettivamente per uno degli assi ottici dell'anortite.

Secondariamente si consideri il vettore, nel quale cade l' indice di rifrazione γ. Per esso si ha

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \varphi_3' = 66^\circ.25'.37''\\ \psi_2 &= \varphi_3'' = 23\ \ 34\ \ 23\\ \psi_3 &= \varphi_3''' = 90^\circ\end{aligned}$$

Questi valori determinano:

$$M = 1,008586\,,\quad N = 1,004306\,,$$

epperò

$$q^2 = 2,504208 \pm \sqrt{6,271055 - 6,270712}$$

ossia

$$\begin{aligned}q_1^2 &= 2,522728 \quad \text{e} \quad q_1 = \pm\ 1,58832\\ q_2^2 &= 2,485688 \quad\quad\ \ q_2 = \pm\ 1,57660\end{aligned}$$

Il valore di $\gamma = 1,58840$ non è molto differente del valore di q_1 testè determinato. Quello corrispondente a q_2 nella stessa direzione di γ e risultante dalle osservazioni si può avere, interpolando fra $1^\circ.\ 17'.\ 4''$ e $1^\circ.\ 13'.\ 40''$ quel valore, che si riferisce a 85° (vedi tabella annessa alla Nota II).

Si ha dunque, dalla tabella, $q_2 = 1,57650$.

Finalmente eseguiamo il calcolo pel raggio nel quale cade l' indice α. Per questo si ha:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \varphi_1' = 90^\circ\\ \psi_2 &= \varphi_1'' = 19^\circ.06'.47''\\ \psi_3 &= \varphi_1''' = 70^\circ.53'.13''\,.\end{aligned}$$

E si ottiene

$$M = 1,010924\,,\quad N = 1,005474\,,$$

quindi

$$q^2 = 2,501320 \pm \sqrt{6,256598 - 6,256178}$$

ossia

$$\begin{aligned}q_1^2 &= 2,521814 \quad \text{e} \quad q_1 = \pm\ 1,58803\\ q_2^2 &= 2,480826 \quad\quad\ \ q_2 = \pm\ 1,57506\,.\end{aligned}$$

Mentre si era trovato $\alpha = 1{,}57524$, che differisce di q_2 della quantità 0,00022.

Per poter anche in questo caso paragonare il calcolato valore di q_1 con quello ottenuto direttamente dall'osservazione, avremo da interpolare fra i due valori (vedi tabella):

	1°.54′.23″	per la posizione di		105°,
	1°.51′.30″	"	"	120°,
e	q_1	"	"	115°.

Avremo la misura corrispondente a q_1 eguale a 1°.52′.28″, e quindi un angolo della riflessione totale di 57°.07′.54″. Perciò il valore osservato è

$$q_1^1 = 1{,}58780.$$

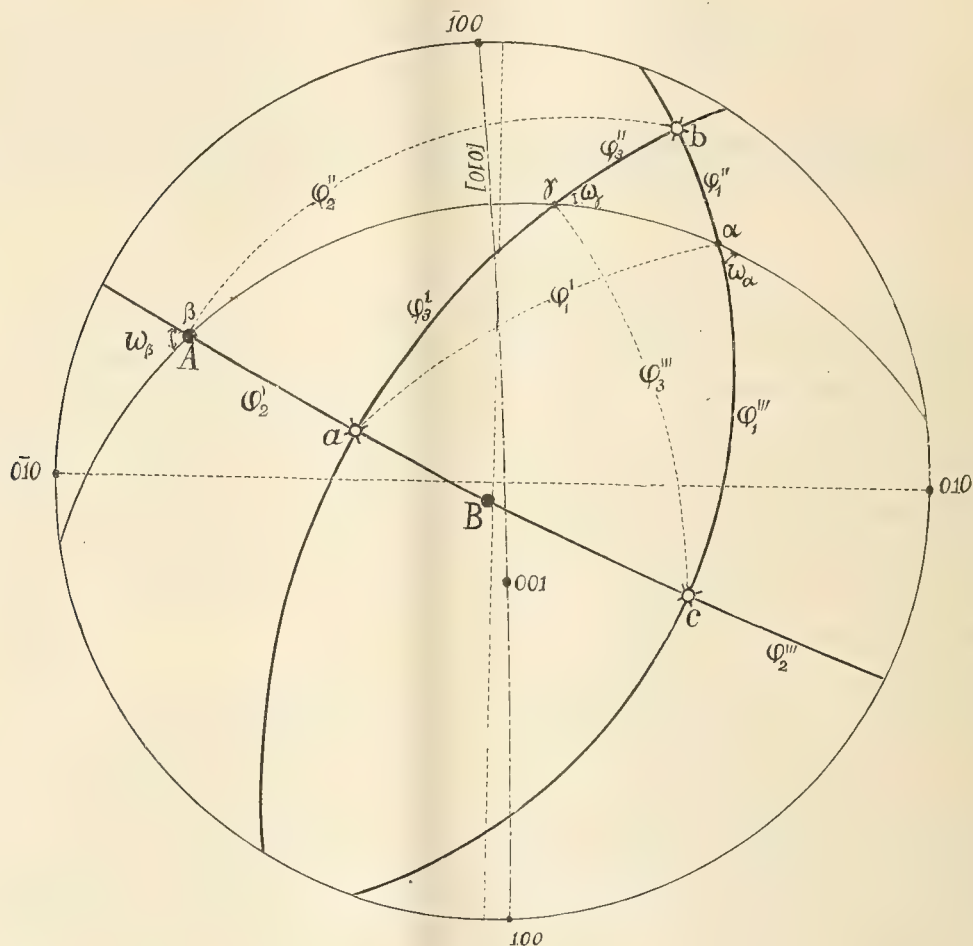
Questa piccola differenza tanto in q_1 quanto in q_2 rispetto ai valori osservati dipende dall'errore di pochi minuti negli angoli di posizione A, B, C. È quindi evidente che per poter continuare il confronto fra i dati ottenuti direttamente dall' osservazione e quelli calcolati in base alla legge di Fresnel, fa d' uopo di compensare ancora gli errori contenuti in A, B, C. Per l' orientazione dell' ellissoide di Fresnel rispetto alla sezione presa in esame, gli errori di pochi minuti non portano alcuna influenza. Si noti che con nessun altro metodo fino ad ora conosciuto si è in grado di raggiungere la precisione qui ottenuta.

Finalmente mi sia permesso di indicare come ottenni la orientazione dell'ellissoide di Fresnel rispetto alle zone principali dell'anortite.

Il riflettometro totale di precisione di Abbe quale fu recentemente modificato da Pulfrich [1], ha un obbiettivo per osservare la lamina del cristallo posta sul piano superiore della mezza sfera, ed essendo il cannocchiale di sotto. Col sussidio di questo terzo obbiettivo, si riesce di orientare il cristallo o uno spigolo situato nella sezione considerata, precisamente come in un microscopio o in un goniometro. E il riflettometro di Abbe, quale fu la prima volta ideato, oltre di parecchi inconvenienti, che pertanto non sono di nocumento per la precisione dei risultati, ha anche questo di non possedere l'obbiettivo per osservare gli oggetti vicini nel vetro o nell'aria.

In moltissimi casi, specialmente nei cristalli con due buone faccie, quali ha p. e. la nostra anortite, si riesce di avere l' orientazione, osservando un oggetto lontano riflesso da una e poi dall'altra delle due faccie disponibili, ponendo davanti al cannocchiale la lente sussidiaria. Come oggetto lontano mi servii del segnale di Websky appartenente al goniometro del dott. Sella.

[1] C. Pulfrich, *Ueber Anwendborkeit der Methode der Totalreflexion auf kleine und mangelhafte Krystallflächen.* Zeitschr. f. Krystall. und Miner. 1899, Bd. XXX, pagina 568 e seg.

Come dissi, la sezione dell' anortite utilizzata per le misure ottiche, fu tagliata parallelamente alla faccia $(00\bar{1})$ e in prossimità di questa. Dunque la faccia (001) si trovò di sopra. Le faccie laterali (201) e $(\bar{2}01)$ diedero delle imagini riflesse oltremodo distinte, e furono perciò utilizzate per l' orientazione.

Il metodo di cui qui si tratta è semplicissimo. Si alza il cannocchiale finchè il segnale riflesso dalla faccia (001) cada nel centro del reticolo; indi si gira il cannocchiale e nello stesso tempo anche la mezza sfera, finchè ritorni il segnale nel centro del reticolo, ma stavolta riflesso dalla faccietta $(\bar{2}01)$. Di controllo può servire anche la faccietta (201), se si giri la mezza sfera di 180°. In questa maniera l'asse della zona [010] riesce parallela all'asse di rotazione del cannocchiale. La tabella annessa alla Nota II dà anche la lettura relativa alla zona [010]. La figura qui unita rappresenta in proiezione stereografica tanto la posizione delle zone (secondo De Cloizeaux), quanto la posizione dei piani di simmetria ottica, e altresì i poli degli assi ottici. Calcolando i singoli triangoli sferici, si ottengono con facilità le coordinate di Michel Lévy dei diversi poli, che qui ci interessano.

La posizione dell'asse ottico B è determinata dai seguenti valori, messi in confronto con quelli riferiti da altri osservatori:

φ	λ	
$\varphi = 0°$,	$\lambda = -5°$	v. Fedorow [1]
$+3°$	$-7°$	Michel Lévy [2]
$-2°,4$	$-5°,7$	Becke [3]
$-2°,0$	$-6°,0$	Klein [4]
$-$ *1,3*	$-$ *5,1*	Viola

Il polo dell'asse attico B, quale è risultato dalle mie osservazioni, sta fra quello determinato da Becke con metodo diverso, quello calcolato da me con le osservazioni di C. Klein, e quello osservato direttamente da Fedorow. Considerando che

$$2\,V = -\,76°.\,56',$$

valore osservato anche da Fouqué [5], e potremo asserire che anche il polo del secondo asse ottico A tanto nelle determinazioni di Becke, e C. Klein, quanto in quelle di Fedorow ha la posizione da me data. — Una notevole differenza invece troviamo nelle costanti riferiteci da A. Michel Lévy nel suo bel lavoro fondamentale sui feldispati. È difficile ora renderci ragione, se veramente le costanti ottiche di Michel Lévy siano state calcolate esattamente, poichè non abbiamo alcuna via di controllo. Ma si noti bene che nel diagramma relativo all'anortite calcolato da Michel Lévy, l'angolo degli assi ottici è 82°. Quest' angolo è certamente superiore al vero di almeno 5°.

Lasciamo fermo nel diagramma di Michel Lévy il piano degli assi ottici, portiamo l'asse ottico A nel piano (001), e prendiamo l' angolo degli assi ottici eguale a 77°, e avremo la posizione dell'asse ottico B quasi esattamente quella determinata ora da me. Io ritengo quindi che l'angolo φ dell'asse ottico B dell'anortite è *negativo*, e sta fra *1*° e *2*°.

Un controllo diretto di quest'ultimo risultato si potrà avere mercè del riflettometro totale di precisione, osservando le linee limiti della riflessione totale non più sulla faccia (001), come io feci, ma bensì sulla faccia (010). Ed io spero di poter fra breve fare anche quest'ultima osservazione.

Pertanto possiamo ancora aggiungere a titolo di conoscenza dei feldispati, che *l'anortite è il feldispato, i cui assi ottici cadono uno* (A) *esat-*

(1) E. v. Fedorow, *Universal-(Theodolith-) Methode in der Mineralogie und Petrographie II. Krystalloptische Untersuchungen.* Zeitschr. f. Krystall. 22, 227.

(2) A. Michel-Lévy, *Étude sur la determination des Feldspats.* Paris, 1894.

(3) Fr. Becke, *Bestimmung kalkreicher Plagioklase durch die Interferenzbilder von Zwillingen.* Tschermak's Miner. u. Petrog. Mitt. 1895. 14, 415.

(4) C. Klein, *Die optischen Constanten des Anorthits vom Vesuv.* Königl. preuss. Akademie der Wissenschaften, 1899, XIX Sitzungsber. pag. 346 e seg. Vedi l'appendice della presente Nota.

(5) F. Fouqué, *Bullettin de la Soc. Franc. de Mineralogie,* 1894, t. 17.

tamente nella faccia (001) *e l'altro* (B) *prossimamente nella faccia* (010); *nessun altro plagioclasio gode di questa proprietà dell'anortite.*

APPENDICE

Le misure eseguite da C. Klein [1] sull' anortite del Vesuvio, e publicate mentre la mia Nota II si componeva, hanno una tale importanza, che meritano la più seria considerazione. Mentre più sopra ho esposto solamente i risultati delle osservazioni di lui, mi sia qui permesso di esporre come procedetti per la determinazione del piano degli assi ottici, e delle coordinate dell' asse ottico B.

Si tracciano dapprima in proiezione stereografica i poli M(010), P(001) ed *e*(021) e il cerchio massimo [100], che fa col cerchio fondamentale [001] l' angolo di 64°. Si portano in seguito sul cerchio [100] i poli, che successivamente distano fra loro di 10°, e per ognuno di questi poli si tracciano dei cerchi massimi, che successivamente fanno col cerchio [100] e con la traccia (010) i seguenti angoli di estinzione osservati da C. Klein:

Zona [100]	Angolo d'estinzione secondo C. Klein.	
0° (M)	53°	(37°)
10°	40°	(50)
20°	35°	(55)
30°	32 ½	(57 ½)
40°	31	(59)
42°. 48'. 25'' (*e*)	—	—
50	30	(60)
60	34	(56)
70	37 ½	(52 ½)
80	47 ½	(42 ½)
85. 50' (P)	—	—
90	60	(30)

I detti cerchi determinano in proiezione stereografica una curva d' involuzione con due bracci tangenti in una cuspide. Per quest'ultima passa il cerchio su cui si trovano i poli degli assi ottici, e di conseguenza esso è pienamente determinato; il piano degli assi ottici fa dunque con la faccia (010) l' angolo di 57°.

Anche il polo della prima bisettrice positiva (*c*) è determinato con le misure di C. Klein. Infatti secondo questo autore e anche secondo Max Schuster [2]

[1] C. Klein, op. cit.

[2] Max Schuster, *Ueber die opt. Orient. der Plagiokase.* Min. u. petr. Mitth. von G. Tschermak 1881, N. F. Bd. III, pag. 215.

il polo della faccia (021) si trova sul cerchio massimo corrispondente al piano di simmetria ottica (*bc*). E con ciò riescono determinate anche la bisettrice negativa (*a*), e i poli degli assi ottici. Il polo dell'asse ottico B ha definitivamente le seguenti coordinate:

$$\varphi = -2^\circ . 0 \quad \text{e} \quad \lambda = -6^\circ . 0$$

che a pag. 495 ho attribuito a C. Klein.

Petrografia. — *Studio petrografico su alcune rocce della Carnia.* Nota del dott. GIUSEPPE VIGO, presentata dal Socio STRÜVER [1].

Le rocce descritte in questa Nota furono raccolte dai professori Brugnatelli, Taramelli e Tommasi in occasione di una gita geologica nelle Alpi Carniche, e dal prof. Brugnatelli a me affidate per lo studio petrografico.

Esse sistematicamente si dividono in quattro gruppi diversi, e cioè in *Diabasi, Melafiri, Porfiriti quarzifere* e *Porfidi quarziferi.*

Diabasi. — I campioni da me studiati provengono dalla valle del Degano, dal Monte Crostis e dal Monte Pizzul. Con ogni probabilità vanno ascritti a questo gruppo anche i campioni raccolti in val Pesarina, nei dintorni di Prato Carnico, ma la loro alterazione è talmente avanzata da non permetterne una determinazione sicura.

Diabasi della valle del Degano [2]. — La massa diabasica della valle del Degano ha già formato l'oggetto di un accurato studio petrografico del prof. Artini [3], che descrisse campioni raccolti dal prof. Taramelli nella regione in discorso. Tuttavia tra gli esemplari da me esaminati, tre meritano speciale menzione, perchè quantunque provengano dalla stessa massa, presentano differenze degne di nota. Due di questi pezzi furono raccolti scendendo dal monte Talm; l'uno sopra il villaggio di Rigolato e l'altro sopra l'abitato di Magnanins; il terzo campione fu raccolto sul fianco sinistro della valle lungo la strada, che da Comeglians conduce a Collina, tra Vuezzis e Givigliano [4].

I campioni raccolti sopra Rigolato assomigliano a quelli descritti dal prof. Artini provenienti da *Sud di Rigolato.* Essi costituiscono una roccia

[1] Lavoro eseguito nel Gabinetto di Mineralogia della R. Università di Pavia.

[2] T. Taramelli, *Osservazioni stratigrafiche sui terreni paleozoici nel versante italiano delle Alpi Carniche.* Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. IV, 1895, Roma; Idem, *Catalogo ragionato delle rocce del Friuli.* Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. I, Roma.

[3] E. Artini, *Studî petrografici su alcune rocce del Veneto.* Giorn. di Mineralogia, vol. I, 1890.

[4] È da notarsi però, che questa massa si estende dall'una e dall'altra parte fin quasi a Comeglians.

grigio verdastra, con struttura compatta, nella quale però si possono distinguere colla lente abbondanti listerelle di feldispato. Non presentano però l'aspetto brecciato, notato dall'Artini nei suoi campioni.

Al microscopio si scorge, che l'elemento più abbondante è il feldispato plagioclasico, molto ben conservato, e geminato generalmente secondo la legge dell'albite, combinata talora con quella di Karlsbad e in rari casi anche con quella del periclino. I suoi cristalli, che sono talora di notevoli dimensioni,, ed in generale idiomorfi, hanno di preferenza la forma a lista. Da numerose misure dell'angolo d'estinzione in lamelle geminate secondo la legge dell'albite nella zona normale a (010) ebbi un massimo di 20°, e in un geminato doppio ottenni i valori seguenti:

I.	II.
5° 1/2	11° 1/2

Si deve adunque riferire questo feldispato ad un termine dell'andesina, come viene anche confermato dal valore della rifrazione, che è pressochè uguale a quella del balsamo.

In ordine di abbondanza viene poi il Pirosseno profondamente alterato e che solo in qualche cristallo conserva fresco un nucleo centrale. Suoi prodotti di alterazione sono la clorite, verdognola, con debole birifrazione, e la calcite, che talora occupa intieramente le plaghe già occupate dal pirosseno. Nei campioni da me esaminati manca il quarzo, che abbonda invece in quelli studiati dall'Artini. Generalmente questi minerali secondarî, la clorite e la calcite, occupano plaghe, le quali sono allotriomorfe rispetto al plagioclasio; solo talvolta queste plaghe presentano contorni che rammentano quelli del pirosseno.

L'ilmenite solo qua e là accenna ad alterarsi in leucoxeno.

I campioni raccolti sopra Magnanins, come quelli descritti dall'Artini, hanno un colore verdastro uniforme ed una struttura più compatta dei precedenti, dovuta alla maggior piccolezza dei componenti.

Le sottili e numerose listerelle di plagioclasio sono da riferirsi, come quelli dei campioni già descritti, all'andesina. L'augite pure frequente è meno alterata, che nei campioni di Rigolato, e mostra più manifesto l'idiomorfismo per rispetto al feldispato. Infatti frequentissime sono le sezioni ottagone, caratteristiche dell'angite stessa. I suoi prodotti di alterazione sono anche qui costituiti specialmente da sostanza cloritica e da calcite.

Degne di nota in questi campioni sono delle plaghe frequenti, più o meno estese, a contorni sovente idiomorfi, costituite essenzialmente da fasci di anfibolo fibroso, di colore verdognolo pallido, che presenta i caratteri dell'attinoto:

$$c : c = 18°.$$

Questo minerale è accompagnato da clorite e da epidoto. Non è probabile, come si potrebbe a tutta prima supporre, che questo anfibolo derivi dal pirosseno, poichè i due minerali non si trovano mai assieme, e l' epidoto, che costantemente accompagna l' anfibolo, non si trova mai nelle plaghe pirosseniche. Sembra piuttosto, che l' anfibolo verde pallido provenga da un anfibolo primario, bruno, fortemente pleocroico, quale è dato ancora osservarne nella parte centrale delle plaghe attinolitiche. L' ilmenite è scarsa. Questi campioni quindi, sia per la loro posizione, sia per la loro struttura tendente alla porfirica data dallo sviluppo dei cristalli di pirosseno e d' anfibolo, rappresentano forse una facies periferica della massa diabasica della valle del Degano.

I campioni raccolti tra Vuezzis e Givigliano, di color verde con macchie nerastre ed attraversati da vene bianche di calcite, sono alteratissimi. Per il maggior sviluppo dei cristalli feldispatici hanno una grana più grossa dei campioni di Rigolato, però la struttura ne è assai simile. Il feldispato, probabilmente anch' esso riferibile all' andesina, è alteratissimo. Il quarzo che vi è molto abbondante, è localizzato in fessure della roccia, e va considerato come elemento casuale. Il leucoxeno vi è molto abbondante.

Diabase del Monte Crostis (¹). — I campioni descritti provengono dalle vicinanze del laghetto sopra alla Casera Plumbs. In una massa verdastra stanno sparse delle macchie bianche di calcite. Differiscono dai diabasi di Rigolato per la grana più grossolana data dallo sviluppo dei feldispati, i quali sono in liste larghe o alquanto tabulari, di modo che la struttura della roccia si avvicina alla granulare ipidiomorfa. Il feldispato è freschissimo ed appartiene pure ad un termine dell' andesina.

L' elemento ferrifero invece è completamente sostituito dalla sostanza cloritica e da calcite. L' ilmenite è abbastanza frequente.

I diabasi sopra descritti, fatta astrazione delle lievi differenze strutturali, sono, come si è visto, notevolmente simili fra loro. Per questa affinità petrografica, e per affiorare essi su punti diversi, disposti lungo un' unica direzione, viene spontaneo il pensare, che essi appartengano ad una sol massa, la quale avrebbe il suo massimo sviluppo nella valle del Degano, e che si protenderebbe a Sud-ovest fino in val Pesarina nei dintorni di Prato Carnico, ed a Nord-est fino al Monte Crostis.

Melafiri. — I campioni furono raccolti dal prof. Annibale Tommasi nei dintorni dei *Forni di Sopra*, lungo il torrente Agozza, nell' alta valle del Tagliamento. Hanno un color verde più o meno intenso, uniforme ed una struttura assai compatta.

(¹) Questa roccia venne citata dal Fr. Frech nella sua opera: *Die Karnischen Alpen*. Halle 1894; ma non descritta, nè segnata sulla sua carta geologica, come anche non vi è segnato nessuno degli affioramenti di rocce eruttive, che pure sono così numerevoli nella regione carnica.

In alcuni campioni si notano nella massa finissima verde-chiara delle macchie brunastre.

La struttura di queste rocce è porfirica olocristallina. Nella massa fondamentale sono sparsi numerosi interclusi feldispatici idiomorfi assai alterati, alcuni dei quali presentano una marcata struttura zonale. L'augite, talora ancor fresca, in sezioni assai sottili è incolora e mostra sovente la cosidetta struttura a clepsidra (Sanduhrstructur); ma nella maggior parte dei casi è trasformata in clorite e in calcite. Il quarzo è affatto casuale e i rarissimi granuli sono circondati da una fitta corona di microliti pirossenici e da clorite. La massa fondamentale è essenzialmente costituita da esili listerelle di feldispato geminato frequentemente secondo le leggi dell'albite e di Karlsbad. Il valore massimo dell'estinzione, che misurai nelle lamelle di geminazione secondo la legge dell'albite e nelle zone normali a (010) è di 27°; ciò che lascia supporre trattarsi di un termine della *labradorite*. Fra le numerosissime listerelle plagioclasiche si interpone la clorite ed in qualche plaga anche la calcite. La struttura si avvicina all'intersertale. La clorite inoltre forma delle plaghe più o meno grandi sempre rotondeggianti, a struttura fibroso-raggiata, circondate costantemente da calcite, che corrispondono alle macchie bruno-verdastre microscopicamente visibili nella roccia. Abbondanti poi sono i granuli di sostanza ferrifera opaca.

Rocce dei dintorni di Timau. — Alle Casere del Monte Zuflan si trovano due distinti affioramenti porfirici, diretti entrambi verso Nord-ovest e separati da uno strato di rocce rosse, tufacee, a struttura scistosa. Essi sono costituiti da due tipi di rocce ben distinti: l'una è una *porfirite quarzifera*, l'altro un porfido quarzifero. Sembrami degno di nota questo fatto di trovarsi così quasi a contatto due colate con caratteri tanto diversi, essendo l'una di natura basica, e l'altra di natura eminentemente acida.

Porfirite quarzifera. — Oltre che al Monte Zuflan si trovano rocce analoghe a queste anche al vicino Monte di Terzo.

Il colore, nei campioni da me esaminati, va dal verdognolo chiaro al bruno verdastro. Nella massa fondamentale si distinguono anche ad occhio numerosi cristalli di feldispato. La struttura e la composizione mineralogica variano alquanto a seconda delle località. In alcuni campioni provenienti dal Monte Zuflan l'augite, allotriomorfa rispetto al feldispato, è abbondante, assai scarso è il quarzo e la struttura dalla porfirica passa all'intersertale. Questa struttura poi è rappresentata assai bene in un campione raccolto a Nord di Timau [1]. In esso l'elemento alterato è l'augite, commista a cristallini di pirosseno trimetrico. Il feldispato è freschissimo, in grossi cristalli geminati secondo la legge dell'albite, frequentemente combinata con quella di Karlsbad

[1] Da frane cadute dal Monte di Terzo.

e qualche volta anche con quella del Periclino. Il massimo valore dell' angolo d' estinzione nelle zone normali a (010) nei geminati secondo la legge dell' albite è di 20°. Da due geminati doppi ebbi:

I.	II.
14° ½	24°
13°	16° ½

È quindi un termine basico dell' andesina. V' è poi qualche granulo di quarzo. Tra i cristalli di feldispato s' interpone a guisa di mesostasi, la clorite e qualche plaga di serpentino. Sono adunque *varietà tholeitiche* della massa porfirica. Ma la struttura che generalmente presentano le rocce di queste località è la porfirica olocristallina. In una massa finissima essenzialmente feldispatica, con poco quarzo, sono sparsi porfiricamente interclusi di feldispato, di pirosseno e di un altro minerale totalmente trasformato in calcite.

Gli interclusi di feldispato, di varie dimensioni a seconda dei campioni, sono geminati secondo le leggi di Karlsbad ed albite. Da essi ebbi i seguenti valori:

I.	II.
14° ½	24°
10°	14°
14°	19°
13°	16°

Il massimo valore dell' estinzione nelle lamelle di geminazione dell' albite nelle zone normali a (010) è di 23°. Lamine di sfaldatura secondo (010), dalle quali esce quasi normalmente una bisettrice, estinguono a 15° (estinzione riferita allo spigolo (010) : (001)). Per questi caratteri il feldispato devesi riferire ad un termine assai basico dell' andesina o ad un termine acido della labradorite.

Gli interclusi di quarzo, più o meno abbondanti, grossi, sono arrotondati e talvolta rotti. Contengono talvolta inclusioni di zircone. Trovasi poi anche il quarzo in granuletti, insieme a calcite, a riempire piccole fessure esistenti nella roccia.

L' elemento ferrifero talora è del tutto alterato, come nei campioni del Monte di Terzo, talora invece, come nei campioni raccolti a Nord del paese di Timau, è in uno stato di alterazione incipiente. È sempre però in piccola quantità. È un pirosseno trimetrico non molto ricco in ferro: con ogni probabilità è un termine vicino alla *Bronzite.*

Difatti il colore è sempre leggerissimamente verde con un pleocroismo appena sensibile: dal verde giallognolo pallidissimo al verde un po' più marcato.

In alcune sezioni, e specialmente in una di un campione raccolte a Nord di Timau si osservano delle plaghe, talora a contorni ottogonali, occupate da

un carbonato con struttura finamente granulare. Con ogni probabilità il minerale primitivo era *olivina*, come risulterebbe anche da un angolo piano di 73°, che corrisponde all' angolo tra (100) e (101) dell' olivina. Esiste anche del quarzo secondario.

In altri campioni pure raccolti a Nord di Timau, osservai insieme al pirosseno, ma in minor quantità, delle laminette raggiungenti anche due mm. di lunghezza, di color rossastro con pleocroismo assai marcato: dal verde pallidissimo al rossastro. Hanno estinzione parallela e si alterano in clorite e in prodotti ferriferi: si deve riferire questo minerale con ogni probabilità a biotite. Non sono rare poi plaghe informi di clorite e di serpentino, sparse qua e là nella massa fondamentale.

Porfidi quarziferi. — Sono rocce con massa fondamentale bruna, nella quale sono porfiricamente disseminati abbondanti e grossi interclusi di feldispato rossastro e di quarzo.

Il feldispato si presenta sempre in cristalli freschi, idiomorfi, geminati secondo la legge di Karlsbad. Ogni individuo si mostra composto di tante lamelle, che pur mantenendosi parallele fra loro, sono discontinue e sembrano dovute alla geminazione secondo la legge dell' albite. Concresciuto con questo feldispato ve n' è costantemente un altro a rifrazione minore del feldispato includente. Nella separazione dei componenti la roccia per mezzo della soluzione del Thoulet, il feldispato si separa tra i pesi specifici:

2,58 e 2,61

e per la massima parte rimane sospeso nel liquido di peso spec. = a 2.60. Lamine di sfaldatura secondo (010), dalle quali esce di poco inclinata una bisettrice, riferendosi alle tracce di sfaldatura basale estinguono: alcune a 5°-6°, altre a 17°-18°. Lamine secondo (001) estinguono alcune a 16°-17°, altre 7°. Sembra quindi che i due feldispati associati siano *albite* e *microclino*. In alcune sezioni secondo (001) con estinzione di 16° si osservano lamelle polisintetiche normalmente alle tracce di sfaldatura secondo (010) il che fa supporre la presenza di geminati secondo la legge del periclino.

Gli interclusi di quarzo, di notevoli dimensioni, sono sempre arrotondati. Il quarzo trovasi anche incluso nel feldispato e in tipici accrescimenti granofirici. Contiene piccolissimi microliti di Zircone. Abbondanti in fine sono i prodotti ferriferi neri, finissimamente diffusi sia nella massa fondamentale, che entro gli interclusi feldispatici.

La massa fondamentale è olocristallina, costituita essenzialmente di granuletti di quarzo, commisti a cristallini di feldispato, in alcuni dei quali è visibile la geminazione polisintetica, che caratterizza gli interclusi.

Alcuni campioni analoghi a quelli ora descritti furono raccolti nella Conoide del Moscardo. In questi la massa fondamentale è prevalentemente

formata da listerelle feldispatiche, che per avere caratteri comuni a quelli proprî di alcuni interclusi si debbono probabilmente riferire all' albite. Tra queste listerelle si interpongono innumerevoli granuletti di feldispato, in prevalenza, e di quarzo fra loro commisti.

Chimica. — *Sulla scissione dell'acido isosantonoso inattivo nei suoi antipodi.* Nota di A. Andreocci e P. Alessandrello [1], presentata dal Socio Cannizzaro.

Abbiamo creduto opportuno, per lo studio della stereoisomeria degli acidi santonosi, di tentare la scissione negli antipodi dell'acido isosantonoso inattivo, cristallizzato in piccoli prismi duri e fusibile a 153°-155°, ottenuto la prima volta da S. Cannizzaro e G. Carnelutti [2], ed in seguito riconosciuto da uno di noi [3] per una modificazione racemica.

Dei metodi generalmente usati per scindere i racemi abbiamo preferito d'impiegare gli alcaloidi, piuttosto che il *Penicillium Glaucum*, essendo gli acidi santonosi antisettici. A tal fine abbiamo usata la cinconina e ci siamo messi nelle condizioni come se l'acido levo santonoso fosse ancora sconosciuto.

Si sono sciolti in alcool a 90° e bollente gr. 8,5 di acido isosantonoso inattivo, preparato da Cannizzaro e Carnelutti, e gr. 10,7 di cinconina; quantità corrispondenti a $C_{15}H_{20}O_3$ (acido santonoso) e a $C_{19}H_{22}N_2O$ (cinconina). Per raffreddamento, dopo aggiunta di un cristallino di destrosantonato di cinconina, ottenuto in precedenza coll'acido destro [4], e per svaporamento spontaneo, si ebbero tre frazioni di cristalli ed un residuo siropposo, che non volle cristallizzare anche se ripreso più volte con un po' di alcool.

Abbiamo decomposto separatamente con un leggiero eccesso di acido solforico diluito (1 a 20) la prima frazione cristallizzata ed il residuo siropposo, e poi con etere si estraevano gli acidi santonosi. La miscela di acidi santonosi provenienti dalla prima porzione cristallizzata [5] (che pesava gr. 2,75) polverata e seccata a 100°, rammolliva a 153°, fondeva a 165° ed avea un

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di chimica farmaceutica di Catania.

[2] Gazz. Chim, Ital. Vol. XII, pag. 400-401.

[3] A. Andreocci, *Sui quattro acidi santonosi e sopra due nuove santonine.* Atti della R. Accademia dei Lincei. Memorie della Classe di scienze fisiche, serie 5ª, vol. II.

[4] Il destrosantonato di cinconina (ottenuto per diluizione moderata con acqua bollente e per raffreddamento della soluzione alcoolica fatta colla miscela equimolecolare di acido destro e cinconina), si depone in piccoli cristalli solubili nell'alcool, poco nell'acqua e nell'etere, fusibili a 198° con leggera alterazione.

[5] La composizione di questa frazione corrisponde approssimativamente a quella di un monosantonato di cinconina, poichè si ebbero circa gr. 1 di miscela di acidi santonosi, e gr. 1,4 di cinconina.

potere rotatorio specifico in alcool concentrato per $(\alpha)_D$ di $+48$; con un'altra cristallizzazione dall'alcool siamo riusciti ad avere dell'acido destrosantonoso abbastanza puro, in aghetti sottili fusibili a 176°-177° ed aventi un potere rotatorio di $+73$. E ricristallizzato ancora una volta fonde a 178°-179°.

Infatti l'acido destro santonoso purissimo cristallizza in aghetti leggieri, fusibili tra 179°-180° ed ha in alcool assoluto un potere rotatorio di $+74$.

La miscela di acidi santonosi (gr. 1,418) fornitaci dal residuo sciropposo rammolliva a 161°, fondeva a 167°, ed aveva un potere rotatorio in alcool concentrato di -48. Ricristallizzata dall'alcool fornì dell'acido levosantonoso sufficientemente puro cristallizzato, in aghetti leggieri fusibili a 178°-179°, e con un potere rotatorio in alcool concentrato di -74. E ricristallizzato ancora una volta dall'alcool si ebbe purissimo, fusibile a 179°-180°.

Difatti l'acido levosantonoso purissimo cristallizza in aghetti leggieri fusibili a 179°-180°, ed ha in alcool assoluto un potere rotatorio di -74.

Per riconfermare che dalla frazione sciropposa si era ottenuto acido levosantonoso, abbiamo voluto con questo ricostruire l'acido isosantonoso colla quantità equimolecolare di acido destro ottenuto per riduzione della santonina. Il racemo che ne risulta è identico all'acido isosantonoso di Cannizzaro e Carnelutti.

Da ciò si deduce che nella prima frazione cristallizzata si accumula il sale di cinconina dell'acido destro, e nell' ultimo residuo sciropposo il sale di cinconina dell' acido levo. Ciò ci spiegherebbe anche perchè non siamo riusciti più tardi ad avere cristallizzato il sale di cinconina dell'acido levo; infatti tutte le volte che si è svaporato, o diluito con acqua, o con etere la soluzione alcoolica di questo sale, sempre si è ottenuto una massa vischiosa, che poi è divenuta dura ed amorfa. Sembra che il sale di cinconina dell'acido levo con più difficoltà passa dalla modificazione amorfa vischiosa, a quella cristallina.

Abbiamo anche intrapreso delle ricerche per scindere l'acido isosantonoso inattivo, mediante saturazione parziale colla cinconina; e già siamo riusciti, per diluizione della soluzione alcoolica della miscela di gr. 2,46 di acido isosantonoso, e di gr. 1,46 di cinconina con venti volumi di etere, ad avere una prima frazione di cristalli (gr. 0,853), che si trovarono in gran parte costituiti del sale di cinconina dell'acido destro. Infatti la miscela di acidi, che si ottiene dalla decomposizione di questi cristalli, fonde fra 172°-176°, ha un potere rotatorio di circa $+60$; e con una sola cristallizzazione dall'alcool, ci ha dato dell' acido destrosantonoso purissimo, fusibile a 179°-180°.

Abbiamo abbandonato a lento svaporamento la soluzione eterea restata, per poi ricercare l' acido levo. Però da questi primi risultati possiamo arguire che colla saturazione parziale si arriva, per lo meno, ad avere una separazione più netta per l'acido destro.

Concludiamo infine, che per mezzo della cinconina si può facilmente scindere l'acido isosantonoso inattivo nei suoi antipodi levo e destro.

Tale scissione rappresenta il primo tentativo riuscito per la decomposizione, nei rispettivi antipodi, di una modificazione inattiva appartenente al gruppo della santonina.

A noi questa scissione servirà di guida per tentare quella, se è possibile, dell'acido desmotroposantonoso levogiro, per mezzo della cinconina, o di altri alcaloidi; colla speranza di poter stabilire se quest'acido desmotrosantonoso [1] è uno dei quattro isomeri attivi previsti dalla teoria, oppure un racemo parziale scindibile.

Fisiologia. — *Sulle proprietà dei nucleoproteidi.* Nota del dott. Filippo Bottazzi, presentata dal Socio Luciani.

L'azione fisiologica dei nucleoproteidi degli organi è stata finora più intuita che dimostrata. Due sole proprietà finora sono state loro attribuite: quella di provocare la coagulazione intravasale del sangue (Halliburton) [2], in certi animali (con le conseguenze teoriche che da questo fatto si possono trarre a lumeggiare la dottrina della coagulazione del sangue), e quella di produrre delle ossidazioni di sostanze facilmente ossidabili aggiunte alle loro soluzioni alcaline (Spitzer) [3].

Ciò è evidentemente troppo poco per le sostanze che costituiscono la maggior parte in peso del residuo secco delle cellule viventi. Onde io scrissi, guidato da considerazioni puramente teoriche, che, in generale, i nucleoproteidi debbono avere una grandissima importanza nella fisiologia cellulare; « Corpi straordinariamente complessi e labili, sono forse essi che compiono le meravigliose operazioni chimiche » [4] ... svolgentisi nell'organismo vivente.

Per dare una base sperimentale a queste considerazioni, ho intrapreso una serie di ricerche, di cui comunico ora i primi risultati.

Qui mi limito ad annunziare i fatti osservati, astenendomi dal discuterli e dal metterli a raffronto con altri risultati, ottenuti in esperienze diverse da altri autori, e che possono avere analogie coi primi. Ciò farò in seguito.

1. *Metodo d'estrazione del nucleoproteide.*

L'organo freschissimo (2-3 ore dopo la morte dell'animale, al più tardi) è tagliato in grossi pezzi, e questi son lavati e strizzati a lungo in soluzione 1 % di NaCl, per liberarli dal sangue. Quando il liquido di lavaggio rimane af-

(1) A. Andreocci, Memoria sopra citata.

(2) Journ. of Physiology, vol. XVII, pag 135-173 e vol. XVIII, pag. 306-318. Vedi anche: Zeitschr. f. physiol. Chem., Bd. XVIII, pag. 57-59.

(3) Pflüger's Arch., Bd. LXVII, pag. 615.

(4) Filippo Bottazzi, Chimica fisiologica, vol. I, pag. 89. Milano 1898.

fatto incolore, si sminuzzano i pezzi nella macchina che serve a macinare la carne, si trita la poltiglia in piccole parti e a lungo nel mortaio con sabbia ben lavata, la si passa a traverso uno staccio di crine, e finalmente la si versa in un gran vaso della forma d'un cristallizzatore contenente 5-6 volumi d'acqua distillata, in cui poi vien rimescolata spesso. Dopo 24-36 ore si versa il miscuglio in un vaso cilindrico di capacità conveniente, e ve lo si lascia per 10-12 ore in perfetto riposo, affinchè la poltiglia sedimenti al fondo. Si decanta quindi il liquido soprastante denso, più o meno colorato in giallo-rossastro, lo si diluisce con un volume eguale di soluzione 1 °/₀ di NaCl, e vi si aggiunge dell'acido acetico diluito, mentre si agita la massa liquida, finchè questa presenti reazione nettamente, ma non fortemente acida. In pochi minuti comincia a sedimentare un precipitato abbondante, fioccoso. Si versa il tutto sopra varî filtri contemporaneamente, affinchè la filtrazione abbia luogo nel più breve tempo possibile, e si lava il precipitato sui filtri con soluzione 1 °/₀ di NaCl resa debolissimamente acida mediante l'aggiunta di poche gocce di acido acetico. Terminata la filtrazione, si spiegano i filtri sopra varî fogli di carta bibula, si raccoglie con una spatola il precipitato grigiastro umido, e lo si scioglie, tritandolo in un mortaio, in soluzione 0,25 °/₀ (o più concentrata, secondo i casi) di Na^2CO^3. Si ottiene così una soluzione grigio-giallastra assai densa e viscosa, che filtra perciò assai difficilmente; onde bisogna contentarsi di farla passare solamente a traverso varî strati di garza, per allontanare la parte di proteide non disciolto.

Si può precipitare di nuovo il proteide con acido acetico e ridisciogliero in carbonato sodico; e si può ripetere questa operazione più volte, quando si vuol ottenere la sostanza in uno stato di maggior purezza. Ma la ripetizione di questa operazione rende, come si sa, il proteide sempre meno solubile, e probabilmente sempre più differente da quello che naturalmente è nella cellula vivente. Onde io mi son limitato a precipitarlo una volta sola, con la minor quantità possibile di acido acetico, raggiungendo lo scopo di allontanare dal precipitato tutti i materiali solubili ad esso aderenti col lavarlo sul filtro nel modo detto dianzi.

A me interessava allontanare gli enzimi, le sostanze proteiche e biliari, l'emoglobina, in una parola tutto quanto di solubile poteva esser contenuto nell'estratto originale dell'organo; e ciò credo d'averlo raggiunto, prima, col diluire molto l'estratto (ciò che accelera anche la successiva filtrazione), poi, col lavare il precipitato sul filtro.

Fo notare che l'aggiunta della soluzione salina (invece di semplice acqua distillata) accelera di molto la precipitazione del proteide, e dà al precipitato quella forma fioccosa che tanto agevola poi la filtrazione.

2. *Metodo di ricerca.*

La soluzione satura di proteide (spesso nel liquido v'era anche molto proteide semplicemente sospeso) vien messa in bocce di Woolf della capa-

cità di circa 300 cm^3; si aggiunge la sostanza, su cui si vuole sperimentare l'azione del proteide; si mettono le varie bocce in un bagno-maria scaldato a 38°-40° C., e, mediante una pompa aspirante, che comunica per via d'un tubo a più ramificazioni con le tubolature delle varie bocce, si fa gorgogliare per il liquido di queste una corrente d'aria continua o intermittente. L'estremità libera del tubo di ciascuna boccia, per cui si fa la presa d'aria, è chiusa mediante un batuffolo di cotone bruciato alla superficie (nei primi esperimenti), o è messa in comunicazione con una boccia piena di soluzione satura di barite e di potassa caustica, a traverso la quale gorgoglia l'aria prima di giungere alla boccia contenente il proteide.

Se si vuole escludere l'aria, si riempie la boccia fino in cima, e si turano bene le varie sue aperture. È chiaro come si possa anche far gorgogliare a traverso il liquido questo o quel gaz, aspirandolo da un gazometro vicino.

In tali condizioni si può lasciare il proteide a contatto della sostanza su cui si esperimenta per 24-48 ore e più.

La prima domanda, che sorge qui spontanea, è: il liquido non va in putrefazione? Mai; o meglio, solamente quando alla soluzione di proteide si aggiungono anche piccole quantità di materiali facilmente putrescibili (proteine), si avverte talora, dopo lungo tempo, odore di putrefazione. Io mi son potuto convincere che i nucleoproteidi posseggono una grande resistenza alla putrefazione. Seccati all'aria, si conservano lunghissimo tempo; sospesi in liquido neutro, non presentano odore di putrefazione che in capo a 4-5 giorni.

Tuttavia bisognava eliminare il dubbio che le proprietà da me riconosciute ai nucleoproteidi degli organi potessero esser dovute ad azioni batteriche. Perciò in alcuni esperimenti, come si vedrà, aggiunsi alla soluzione di Na^2CO^3 del NaFl nella proporzione del 2 ‰, e in altri del timolo nella proporzione del 0,4 %. I risultati sono stati identici a quelli ottenuti negli esperimenti, in cui non ho fatto uso di floruro sodico o di timolo.

Il liquido alcalino in cui scioglievo il proteide conteneva, oltre gr. 0,25 % di Na^2CO^3, tracce di sali di Ca (poichè facevo la soluzione con acqua corrente, in cui una parte del Ca veniva precipitata dal Na^2CO^3 in forma di $CaCO^3$, ciò che diminuiva ancora la quantità di Na^2CO^3 che rimaneva in soluzione), 0,5 % di NaCl e tracce di KCl e di fosfati. Solo quando feci uso del NaFl, fui costretto a usare come solvente l'H^2O e a rinunziare all'aggiunta di tracce di sali calcici, che tanta importanza hanno in tutte le funzioni degli organismi. Nelle esperienze, in cui ho fatto gorgogliare l'aria a traverso una soluzione di barite e di potassa, prima di farla giungere alla soluzione del proteide, le possibilità d'un'azione batterica sono state ridotte a un minimo o abolite.

3. *Azione dei nucleoproteidi sul* $Na^2 CO^3$.

In alcuni esperimenti m' era accaduto di osservare che, mentre da principio il proteide era disciolto, almeno in gran parte, nella soluzione alcalina, da ultimo il liquido presentava al fondo della boccia un abbondante precipitato fioccoso e granuloso. Saggiata in questi casi la reazione del liquido, la trovai o debolissimamente alcalina o neutra.

Per dare un fondamento al sospetto, che il proteide avesse scisso il $Na^2 CO^3$ libero, fissato la base e messa in libertà l' anidride carbonica, che poi sarebbe stata allontanata dalla corrente d' aria, disposi un' esperienza nel seguente modo. Misi in connessione l' estremità del tubo della boccia, per cui entrava l' aria nel liquido, con due bocce (A e B) di Woolf piene a metà d' una soluzione satura di barite caustica, e una boccia simile (C) intercalai al di qua di quella contenente la soluzione di proteide, in modo che vi gorgogliasse l' aria che aveva attraversato la detta soluzione. Dopo poco il liquido delle bocce A e C cominciò a intorbidarsi, e in capo a poche ore al fondo di esse si notava un considerevole strato di $Ba CO^3$, mentre nella boccia B non si notava alcun intorbidamento. Non v' era dubbio, dunque, che nella soluzione di proteide avveniva uno sviluppo di CO^2.

Probabilmente la diminuzione dell' alcalinità (saggiata solamente con le carte), dianzi ricordata, era dovuta, come dissi, a una scissione del $Na^2 CO^3$, operata dal nucleoproteide, che, come si sa, ha caratteri di sostanza acida, al pari di tutti i corpi congeneri.

La minima quantità di acido acetico rimasta nel precipitato del proteide doveva essersi saturata subito con una quantità corrispondente di carbonato sodico della soluzione impiegata a sciogliere il precipitato, onde la liberazione della CO^2, in tanta quantità, non può essere attribuita che a un' azione propria del proteide.

In un caso la temperatura del bagno-maria fu elevata a 50°-52° C. Questa temperatura che, come vedremo, impedisce l' azione del proteide sul glicogeno, non arresta però la produzione della CO^2, in quantità anche considerevole.

È possibile che la combinazione del proteide con la base del $Na^2 CO^3$, e quindi lo sviluppo dell' anidride, avvenga anche se il proteide sia leggermente alterato da una temperatura alta, mentre questa alterazione sarebbe sufficiente ad inibire la sua azione sul glicogeno (ved. in seguito).

4. *Azione del nucleoproteide della milza e del fegato sull' ossiemoglobina.*

In queste ricerche ho impiegato milze di cane, di bue e di vitellino lattante; fegati di cane, di bue e di vitello adulto.

Nelle prime esperienze, in cui ebbi per collaboratore il sig. Paolo Enriques, stud. di medicina, adoperai ossiemoglobina di cane mediocremente pura, cristallizzata, preparata secondo il metodo di Hüfner. Ma poi vidi che ciò era inutile, e che bastava adoperare una soluzione acquosa di sangue, fatta mediante l'aggiunta di qualche goccia d'etere e riscaldamento a 35°-37° C, per agevolare la dissoluzione dell'ossiemoglobina.

In alcuni esperimenti, aggiunsi a 150-200 cm^3 di soluzione di proteide splenico o epatico tanta soluzione di ossiemoglobina, finchè le due strie caratteristiche di questa si vedessero distintamente allo spettroscopio, e per l'esame spettroscopico mi servii d'un certo volume del liquido totale, dopo averlo convenientemente rimescolato. Messa la boccia nel bagno-maria e fatta gorgogliare l'aria nel liquido, di 15 in 15 minuti prendevo dei saggi di esso, per esaminarli allo spettroscopio, dopo di che venivano restituiti nella boccia. In capo a 1-$1^1/_2$ ore, si trovavano le strie dell'ossiemoglobina assai indebolite, e dopo 3-5 ore erano affatto scomparse. L'esperimento si può ripetere con nuove quantità di ossiemoglobina nella stessa soluzione di proteide, più volte, e sempre con lo stesso risultato, la quantità di pigmento che il proteide può distruggere successivamente essendo risultata sempre considerevole

In altri esperimenti, ho aggiunto sin dal principio un eccesso di soluzione di sangue, tanto che le due strie dell'ossiemoglobina si presentassero insieme fuse in una sola larga banda d'assorbimento, o che, a dirittura, allo spettroscopio si vedesse un assorbimento generale ed intenso. In tali casi, col tempo l'assorbimento generale andava scemando, la regione delle strie dell'ossiemoglobina cominciava a rischiararsi, e finalmente le due strie cominciavano a divenire separate e distinte, in un campo però sempre molto oscuro, per scomparire affatto dopo 10-12 ore.

In seguito alla scomparsa delle strie dell'ossiemoglobina, il liquido assume un colore brunastro sporco più o meno cupo, secondo la quantità di pigmento impiegato. I prodotti di questa scomposizione dell'ossiemoglobina, dunque, sono anch'essi pigmentati; ma sono ben lontano, per ora, dal poter dire di qual natura essi siano. In nessun periodo dell'azione del proteide sull'ossiemoglobina ho potuto osservare lo spettro dell'emoglobina o della metemoglobina; ma ciò non vuol dire che queste due sostanze non appariscano. Può darsi che esse si formino a misura che l'ossiemoglobina viene attaccata dal proteide, e per ciò sempre in quantità troppo piccola per essere rivelata dallo spettroscopio.

Ho detto che i prodotti della scomposizione dell'ossiemoglobina sono anch'essi, al meno in parte, pigmentati. Ma se il pigmento sanguigno è aggiunto in piccola quantità, alla scomparsa delle strie caratteristiche segue una generale decolorazione del liquido; la quale è piuttosto lenta, poichè solo dopo 20 e più ore il liquido diventa grigio-biancastro. Una tale decolorazione si osserva del resto anche nelle soluzioni di proteide cui non fu aggiunta

ossiemoglobina. Queste hanno sempre, come dissi, una tinta giallastra sporca, forse dovuta a tracce di pigmenti biliari. Ebbene, anche questa colorazione sparisce a lungo andare, e il liquido s' imbianca. Sarà mia cura di studiare in ricerche successive l' azione del proteide su altri pigmenti, oltre quello sanguigno.

L' unica sostanza che potrebbe esercitare un' azione decomponente sull' ossiemoglobina, simile a quella che io fin qui non ho esitato ad attribuire al nucleoproteide splenico o epatico, sarebbe il carbonato sodico. E infatti, nelle prime ricerche, in cui adoperai soluzioni relativamente forti (1,5 — 2%) di questo sale, per sciogliere il proteide, il dubbio era giustificato. Anche l' esperimento diretto mi provò che l' ossiemoglobina sciolta in una soluzione talmente concentrata di $Na^2 CO^3$, nelle condizioni di riscaldamento e d' aereazione dianzi descritte, dopo un certo tempo viene ad essere distrutta. Sempre però tale distruzione avveniva parecchie ore dopo quella che s' era verificata nella soluzione di proteide, non ostante che una parte del $Na^2 CO^3$ di questa fosse stata certamente legata dal proteide stesso.

Ma nelle ricerche successive ridussi la concentrazione della soluzione alcalina al minimo possibile (0,25 %); e si noti che una parte del sale alcalino doveva esser neutralizzata dalle tracce di acido acetico che ancora rimanevano nel precipitato del nucleoproteide, e un' altra parte doveva esser legata da questo per sciogliersi; sì che in fine il liquido presentava sempre una debole reazione alcalina alle corte. Ora le ricerche dirette mi hanno provato che l' ossiemoglobina sciolta in una soluzione 0,25% di $Na^2 CO^3$, scaldata a 38° C, aereata o no, si conserva intatta, cioè presenta le strie caratteristiche sempre egualmente forti, per 5 o 6 giorni almeno. Sì che non credo che si possa dubitare che in simili casi la distruzione dell' ossiemoglobina sia stata operata propriamente dal nucleoproteide.

Non ho notato differenze importanti d' intensità d' azione fra il proteide splenico e quello epatico; debbo dire però che in questa, come nelle ricerche successive, il più attivo s' è dimostrato il nucleoproteide del fegato di bue.

Ho provato a lasciare il liquido, in cui erano scomparse le strie dell' ossiemoglobina, per molte ore nelle stesse condizioni, per vedere se le strie ricomparivano; e ho ripetuto più volte questo esperimento con soluzioni di nucleoproteide estratto da milze di vitelli giovanissimi; ma finora non mi è mai riescito di veder ricomparire le strie dell' ossiemoglobina.

L' aereazione del liquido non ha un' influenza notevole sulla distruzione dell' ossiemoglobina. Gli esperimenti fatti con esclusione dell' aria mi hanno dato gli stessi risultati. Naturalmente, in tali casi, l' ossiemoglobina si trasforma in emoglobina e forse anche in carbodiossiemoglobina, a causa della CO^2 che il proteide sviluppa nel liquido e che deve rimanervi in parte imprigionata.

Se si rende isotonico il liquido che s' impiega a sciogliere il proteide, e invece di ossiemoglobina s'aggiunge a questa soluzione del sangue o dei corpuscoli rossi normali, la scomparsa delle strie dell' ossiemoglobina avviene su per giù nello stesso tempo e in quantità egualmente considerevole.

Io non esito per ciò ad attribuire al nucleoproteide splenico ed epatico la proprietà di scomporre l' ossiemoglobina, sia essa libera o inclusa negli eritrociti; scomposizione che normalmente si verifica nell' organismo vivente, e più in alcuni organi (milza, fegato) che in altri, e che, per i risultati di queste ricerche, può dirsi operata da un costituente importante delle cellule, non necessariamente dalle cellule viventi.

5. *Azione del nucleoproteide epatico sul glicogeno.*

Da lungo tempo è dibattuta la questione, se la trasformazione del glicogeno in glicosio, che avviene normalmente nel fegato, sia dovuta a un' attività speciale delle cellule epatiche viventi o a un enzima saccarificante. La presenza di quest' ultimo nelle mie soluzioni di proteide è da escludersi, perchè il precipitato veniva abbondantemente lavato sul filtro; e non è il caso nemmeno di sospettare quella di cellule epatiche viventi. Onde io ero nelle condizioni di decidere la questione, là dove il proteide si fosse mostrato attivo sul glicogeno.

In volumi misurati di soluzione di proteide sciogliévo quantità pesate di glicogeno purissimo (della casa Merck), disseccato nella stufa ad aria calda (100° C).

Determinavo poi il glicogeno in un volume eguale di soluzione di proteide originale, subito, e in quella cui avevo aggiunto il glicogeno, dopo che era rimasta nel bagno-maria per un tempo variabile, servendomi del metodo di Brücke-Külz e valendomi dei perfezionamenti ad esso apportati recentemente da Pflüger [1].

Per avere un' idea approssimativa della quantità di proteide impiegato in ciascuna esperienza, raccoglievo il precipitato prodotto dall' HCl e joduro mercuro-potassico, lo disseccavo e lo pesavo.

Ecco i risultati ottenuti.

I. Fegato freschissimo di cane. Estrazione della poltiglia epatica con H^2O per 48 ore.

Precipitazione del proteide, ecc.

Glicogeno impiegato: grm. 0,2740. Durata del riscaldamento a bagnomaria della soluzione alcalina di proteide contenente il glicogeno: 17 ore, in due riprese. Gorgoglio intermittente d' aria.

(1) Pflüger's Arch., Bd. LXXI, pag. 320.

Fatta la determinazione del glicogeno in questo liquido e in un volume eguale di soluzione di proteide originale, si trovano nel primo gr. 0,1634 di glicogeno, nel secondo nemmeno tracce di glicogeno.

Proteide impiegato, secco: gr. 2,5.

II. Fegato di manzo, freschissimo. Preparazione del proteide nel modo detto.

Glicogeno impiegato: gr. 0,1787.

Durata del riscaldamento e del gorgoglio dell'aria: 32 ore in continuazione

Fatta la determinazione del glicogeno, non se ne trova traccia.

III. Fegato di manzo, freschissimo.

Glicogeno impiegato: gr. 0,4325.

Durata del riscaldamento e del gorgoglio dell'aria: 46 ore.

Risultato della determinazione del glicogeno: *scomparsa completa di esso.*

Proteide impiegato, secco: gr. 6,4 (la soluzione ne conteneva una gran quantità allo stato di sospensione).

IV. Fegato di manzo, freschissimo. Il liquido alcalino, che serve per sciogliere il proteide, *contiene NaFl nella proporzione del 2 °/₀₀*.

Glicogeno impiegato: gr. 0,2985.

In una boccia compagna si mettono altri 200 cm^3 di soluzione di proteide e una quantità in peso identica di glicogeno, ma, invece di farvi gorgogliare dell'aria, la si tiene a bagno-maria ben chiusa per tutta la durata dell'esperimento, che è di 42 ore.

Determinazione del glicogeno in questi due liquidi: il glicogeno è scomparso da entrambi.

Proteide impiegato, secco: nella soluzione attraversata dalla corrente dell'aria, gr. 7,0; nell'altra, gr. 7,5.

V. Fegato di manzo, freschissimo. *Estrazione della poltiglia epatica con acqua distillata satura di cloroformio.* Il liquido alcalino che serve per sciogliere il proteide *contiene gr. 0,4 °/₀ di timolo.*

Glicogeno impiegato: gr. 0,5637.

Durata del riscaldamento e del gorgoglio continuo dell'aria: ore 58.

Fatta la determinazione del glicogeno, si trova ch'esso è *tutto scomparso.*

Proteide impiegato, secco: gr, 6,8.

VI. Lo stesso proteide dell'esp. V.

Glicogeno impiegato: gr. 0,6127.

Si porta la temperatura del bagno-maria a 50°-52° C. Le altre condizioni dell'esperimento sono identiche.

Fatta la determinazione del glicogeno, se ne trovano gr. 0,4938.

Proteide impiegato, secco: gr. 6,0 circa

Ne era scomparso, dunque, solo una piccola parte, forse nel tempo che precedette l'elevazione della temperatura del bagno a 52° C.

Dalle ricerche qui succintamente esposte risulta chiaramente:

a) che il glicogeno, nelle condizioni dette, sparisce dalle soluzioni di proteide epatico, in cui era stato sciolto;

b) che l'aereazione del liquido non è indispensabile, perchè questa scomparsa avvenga;

c) che la temperatura a 38°-40° C. e il tempo sono i due fattori essenziali del fatto osservato;

d) che una temperatura di 50°-52° C. impedisce la scomparsa del glicogeno.

Quest'ultimo fatto, specialmente, fa credere che il proteide operi la scomparsa del glicogeno. Si può infatti a buon diritto supporre che sostanze così altamente complesse e labili, quali sono i nucleoproteidi degli organi, vengano facilmente alterate da quella temperatura, specialmente in presenza di alcali.

Varie questioni, che io cercherò prossimamente di risolvere, sorgono dai risultati ottenuti. Il glicogeno dev'essere trasformato; ma quali sono i prodotti di questa trasformazione? Si forma, almeno come stadio di passaggio, del glicosio durante questa trasformazione? ecc.

Finalmente desidero di far notare che i processi chimici osservati, che io qui credo di poter considerare come effetto dell'azione dei nucleoproteidi, sono tutti di natura disintegrativa. Negli esperimenti, in cui ho fatto agire il proteide sul glicosio, e che riferirò in una comunicazione successiva, nel liquido non ho mai trovato, nemmeno dopo molte ore, tracce di glicogeno. Nemmeno l'emoglobina si rigenerò mai. Sono dunque le condizioni sperimentali descritte insufficienti e non adeguate per il verificarsi di processi sintetici, integrativi, o tali processi costituiscono una proprietà esclusiva della cellula vivente, mentre i processi distruttivi possono essere artificialmente riprodotti con soluzioni di uno fra i più cospicui costituenti cellulari?

Ecco un problema biologico, a risolvere il quale dovrebbero tendere gli sforzi di più esperimentatori insieme.

P. B.

// RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 giugno 1899.

E. BELTRAMI Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Osservazioni astronomiche e fisiche sulla topografia e costituzione del pianeta Marte, fatte nella Specola Reale di Brera in Milano coll' equatoriale Merz-Repsold (18 pollici) durante l' opposizione del 1888.* Memoria VI del Socio G. V. SCHIAPARELLI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Matematica. — *Sopra alcune formole fondamentali relative alle congruenze di rette.* Nota del dott. P. BURGATTI, presentata dal Socio CERRUTI.

1. Siano $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ le equazioni della superficie iniziale (I) di una congruenza (G), e $X(u,v)$, $Y(u,v)$, $Z(u,v)$ i coseni di direzione della retta di (G) che passa per il punto $M(u,v)$. Ponendo

$$\Sigma X\frac{\partial x}{\partial u}=P\,,\quad \Sigma X\frac{\partial x}{\partial v}=Q\,, \tag{1}$$

si hanno le identità:

$$\begin{cases} \Sigma X\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}-PX\right)=0 \\ \Sigma X\dfrac{\partial X}{\partial u}=0 \\ \Sigma X\dfrac{\partial X}{\partial v}=0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Sigma X\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}-QX\right)=0 \\ \Sigma X\dfrac{\partial X}{\partial u}=0 \\ \Sigma X\dfrac{\partial X}{\partial v}=0\,, \end{cases}$$

dalle quali si trae

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}=a\dfrac{\partial X}{\partial u}+b\dfrac{\partial X}{\partial v}+PX \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}=\alpha\dfrac{\partial X}{\partial u}+\beta\dfrac{\partial X}{\partial v}+QX\,, \end{cases}$$

ed analoghe in y e z. Per determinare a, b, α, β basta valersi delle funzioni fondamentali di Kummer [1]:

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} = e, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} = f, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = f', \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} = g$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = E, \quad \Sigma \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = F, \quad \Sigma \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = G;$$

si trovano allora facilmente le formule seguenti:

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{eG - f'F}{EG - F^2}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{f'E - eF}{EG - F^2}\dfrac{\partial X}{\partial v} + PX \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{fG - gF}{EG - F^2}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{gE - fF}{EG - F^2}\dfrac{\partial X}{\partial v} + QX . \end{cases}$$

2. La forma quadratica

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

rappresentando l'elemento lineare sferico, si ha per cose note

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = a_1 \frac{\partial X}{\partial u} + a_2 \frac{\partial X}{\partial v} - EX$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = b_1 \frac{\partial X}{\partial u} + b_2 \frac{\partial X}{\partial v} - FX$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = c_1 \frac{\partial X}{\partial u} + c_2 \frac{\partial X}{\partial v} - GH ,$$

ove le a, b, c con gl'indici stanno in luogo dei noti simboli di Christoffel. Valendosi di queste formule, è assai facile determinare le condizioni d'integrabilità delle (2). Si trova, dopo qualche semplificazione, che esse si riducono alle tre seguenti:

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial v} - \dfrac{\partial Q}{\partial u} = f' - f \\ \dfrac{\partial e}{\partial v} - \dfrac{\partial f}{\partial u} = b_1 e + d_2 f' - a_1 f - a_2 g + EQ - FP \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} - \dfrac{\partial f'}{\partial v} = b_2 g + b_1 f - c_2 f' - c_1 e - GP - FQ , \end{cases}$$

le quali generalizzano le formule di Codazzi relative alle superficie [2].

3. Le formule (2) e (3) permettono di trattare molti problemi fondamentali della teoria delle congruenze. Da esse si deduce subito il seguente

(1) Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, pag. 245.

(2) M'accorgo che queste formole sono state già indicate. Cesàro, *Geometria intrinseca*.

teorema fondamentale: *Date due funzioni* $P(u,v)$, $Q(u,v)$ *e due forme quadratiche*

$$e\,du^2 + (f + f')\,du\,dv + g\,dv^2$$
$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

delle quali la seconda positiva e a curvatura $+1$, *tali che le* (3) *siano soddisfatte, esiste una sola congruenza che ammette quelle due forme rispettivamente per* 1ª *e* 2ª *forma fondamentale. Le* X, Y, Z *si ottengono integrando una equazione di Riccati, e la superficie iniziale è definita dalle* (2) *per mezzo di quadrature.*

4. Come applicazione di queste formule, prenderò a trattare il nuovo problema seguente: *Determinare le congruenze con assegnata immagine sferica delle rigate medie.* Io chiamo *rigate medie* la doppia famiglia di rigate della congruenza che hanno le linee di stringimento sulla *superficie media.* Esse godono di due proprietà, che enuncio soltanto:

a) La loro immagine sferica è un sistema ortogonale.

b) I piani tangenti a due di esse nel punto medio della generatrice comune (piani perpendicolari) sono i piani bisettori dei piani focali e dei piani principali.

Prendiamo per superficie iniziale la superficie media della congruenza e siano $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$ le due famiglie di rigate medie. Si avrà evidentemente

$$F = 0 \qquad e = 0 \qquad g = 0,$$

per cui le (2) diventano

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{f'}{G}\dfrac{\partial X}{\partial v} + PX \\[2ex] \dfrac{\partial x}{dv} = \dfrac{f}{E}\dfrac{\partial X}{\partial u} + QX. \end{cases}$$

Le funzioni P e Q si ricavano dalle due ultime delle (3); si ottiene:

$$P = \frac{1}{G}\left\{c_2 f' - b_1 f - \frac{\partial f'}{\partial v}\right\} = \frac{1}{G}\left\{f'\frac{\partial}{\partial v}(\log\sqrt{G}) - f\frac{\partial}{\partial v}(\log\sqrt{E}) - \frac{\partial f'}{\partial v}\right\}$$
$$Q = \frac{1}{E}\left\{a_1 f - b_2 f' - \frac{\partial f}{\partial u}\right\} = \frac{1}{E}\left\{f\frac{\partial}{\partial u}(\log\sqrt{E}) - f'\frac{\partial}{\partial u}(\log\sqrt{G}) - \frac{\partial f}{\partial u}\right\}$$

Scrivendo ora che la prima delle (3) è verificata per queste espressioni di P e Q, si trova che le funzioni f ed f' devono soddisfare la condizione seguente:

$$(5) \quad \frac{1}{E}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{3}{2}\frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{E}{G}\frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial v} + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E}{G}\frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial v}\right) + 1\right] f =$$
$$= \frac{1}{G}\frac{\partial^2 f'}{\partial v^2} + \frac{1}{2}\frac{G}{E}\frac{\partial \frac{1}{G}}{\partial u}\frac{\partial f'}{\partial u} + \frac{3}{2}\frac{\partial \frac{1}{G}}{\partial v}\frac{\partial f'}{\partial v} + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \frac{1}{G}}{\partial v^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G}{E}\frac{\partial \frac{1}{G}}{\partial u}\right) + 1\right] f'.$$

Di qui risulta che il problema proposto ammette una grande arbitrarietà nella soluzione. Si può fissare f' o f, e determinare f o f' integrando una equazione lineare del 2° ordine del tipo parabolico. Le (4) definiscono per quadrature la superficie media delle congruenze cercate.

5. Siano $x_1 = x_1(u,v)$, $y_1 = y_1(u,v)$, $z_1 = z_1(u,v)$ l'equazioni di una superficie S_1 riferita alle linee di curvatura, le quali abbiano la stessa immagine sferica delle rigate medie di una congruenza. La congruenza sarà definita dalle formule precedenti, e per la superficie S_1 si avrà

$$\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} = 0$$

$$\Sigma X \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0 \qquad \Sigma X \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0 .$$

Posto

$$\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u} = -D \ , \ \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial v} = -D'' ,$$

dalle (4) si ricava:

$$\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = 0 \qquad \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = -\left(f' \frac{D''}{G} + f \frac{D}{E}\right) = f'r_1 + fr_2 ,$$

essendo r_1 ed r_2 i raggi di curvatura di S_1. Se quindi si prendono f ed f' in guisa che insieme alla (5) sia anche soddisfatta la condizione

$$f'r_1 + fr_2 = 0 , \tag{6}$$

la superficie media della congruenza corrisponderà alla S_1 per ortogonalità d'elementi.

Questa osservazione dimostra nuovamente l'intimo legame che esiste fra la teoria delle congruenze rettilinee e quella delle deformazioni infinitesime. Si vede che la determinazione delle superficie che corrispondono ad S_1 per ortogonalità d'elementi *equivale alla determinazione delle congruenze, le cui rigate medie hanno la stessa immagine sferica delle linee di curvatura di S_0, e per le quali sia soddisfatta la condizione* (6).

6. Le formule (2) e (3), che sono utilissime in una grande classe di problemi, non si prestano per lo studio delle deformazioni delle congruenze, intese nel senso di Beltrami [1]. Per tale scopo occorre esprimere le sette funzioni di Kummer mediante i coefficienti delle due forme fondamentali della superficie iniziale e le due funzioni P e Q, come ha fatto il Prof. Bianchi nelle sue recenti ricerche [2].

[1] Le deformazioni che si ottengono flettendo la superficie iniziale e immaginando che le rette della congruenza siano ad essa invariabilmente legate.

[2] *Sulla teoria della deformazione delle superficie di rivoluzione.* Rend. R. Accademia dei Lincei, febbraio 1899.

Limitandoci alle congruenze normali, prendiamo a linee $u = \text{cost}$ sulla superficie (I) le traiettorie ortogonali alle rette della congruenza, e diciamo $v = \text{cost}$ le linee ortogonali ad esse. Allora, indicando con σ l'angolo variabile che le rette della congruenza fanno colla normale alla superficie (I), l'elemento lineare assume la forma

$$ds^2 = \frac{du^2}{\cos^2\sigma} + G_1\, dv^2 , \tag{7}$$

mentre la seconda forma fondamentale sarà

$$D\, du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2 .$$

Ciò posto, per giungere alle formule cercate basta seguire la via indicata dal prof. Bianchi. Ma se s'introducono fin dai primi calcoli le tre funzioni:

$$p = -\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u} + D\cos\sigma\right), \quad q = -\left(\frac{1}{\sqrt{G_1}\cos\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \frac{D'}{\sqrt{G_1}}\right), \tag{8}$$
$$r = \frac{\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial\sqrt{G_1}}{\partial u} - \frac{D''}{\sqrt{G_1}}$$

si ottengono con facilità le formule seguenti assai semplici:

$$\text{(9)}\quad \begin{cases} E = p^2 + q^2 \operatorname{sen}^2\sigma \\ F = pq\sqrt{G_1}\cos\sigma + qr\operatorname{sen}^2\sigma \\ G = q^2 G_1 \cos^2\sigma + r^2 \operatorname{sen}^2\sigma \end{cases} \qquad \text{(9')}\quad \begin{cases} e = p \operatorname{tang}\sigma \\ f = f' = q\sqrt{G_1}\operatorname{sen}\sigma \\ g = r\sqrt{G_1}\operatorname{sen}\sigma \end{cases}$$

Dalle (9') risulta che si possono sostituire le funzioni e, f, g alle p, q, r. Tale sostituzione è vantaggiosa, poichè le formule (9) diventano

$$E = e^2 \cot^2\sigma + f^2 \frac{1}{G_1}$$
$$F = ef \cot^2\sigma + fg \frac{1}{G_1},$$
$$G = f^2 \cot^2\sigma + g^2 \frac{1}{G_1}$$

e per conseguenza le due forme fondamentali della congruenza si riducono alle seguenti:

$$d\varrho^2 = \cot^2\sigma\,(e du + f dv)^2 + \frac{1}{G_1}(f du + g dv)^2$$
$$\psi = e du^2 + 2f\, du\, dv + g dv^2 .$$

Le funzioni e, f, g soddisfano a tre equazioni, le quali si ottengono da quelle di Codazzi e di Gauss, sostituendo alle D, D', D'' le espressioni de-

finite dalle (8) e (9'). Tali equazioni sono alquanto complicate, ma importa notare quella che si deduce dal teorema di Gauss, giacchè permette di esprimere $eg - f^2$ linearmente per e, f, g:

$$eg - f^2 + g \operatorname{tang} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial u} - e \frac{\cos^2 \sigma}{2} \frac{\partial G_1}{\partial u} - 2f \operatorname{tang} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial v} = G_1 \operatorname{tang}^2 \sigma \,.\, K_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial G_1}{\partial u} \cot \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{1}{\cos^2 \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}\right)^2 .$$

K_1 è la curvatura di (I). Da quanto si è detto possiamo concludere: note tre funzioni e, f, g che soddisfano le equazioni ora accennate, le (10) definiscono (insieme alle funzioni σ e G_1 che restano sempre le stesse) una congruenza che si deduce dalla data per deformazione.

7. Le espressioni di $EG - F^2$ e $Eg - 2fF + Ge$ si calcolano immediatamente; si trova

$$EG - F^2 = \frac{\cot^2 \sigma}{G_1} (eg - f^2)^2 , \quad Eg - 2fF + Ge = (eg - f^2)\left(e \cot^2 \sigma + \frac{g}{G_1}\right),$$

quindi $\dfrac{Eg - F^2}{(eg - f^2)^2}$ è un invariante rispetto alle deformazioni considerate.

Indichiamo con K e H le due curvature (totale e media) della superficie (S) normale alle rette della congruenza e definita dalle equazioni

$$\xi = x + tX , \quad \eta = y + tY , \quad \zeta = z + tZ ; \quad (t = - U + C)$$

con D_1, D_1', D_1'' i coefficienti della seconda forma fondamentale di S. Si ricava

$$- D_1 = e + tE , \quad - D_1' = f + tF , \quad - D_1'' = g + tG ,$$

e quindi

$$\frac{1}{K} = \frac{G_1 \operatorname{tang}^2 \sigma}{eg - f^2} + \frac{G_1 \operatorname{tang}^2 \sigma \left(e \cot^2 \sigma + \frac{g}{G_1}\right)}{eg - f^2} t + t^2$$

$$H = - \frac{\left(e \cot^2 \sigma + \frac{g}{G_2}\right) + 2t \frac{\cot^2 \sigma}{G_1} (eg - f^2)}{1 + t\left(e \cot^2 \sigma + \frac{g}{G_1}\right) + t^2 \frac{\cot^2 \sigma}{G_1} (eg - f^2)} .$$

Come si vede, le e, f, g entrano in queste espressioni per le combinazioni $eg - f^2$, $e \cot^2 \sigma + \dfrac{g}{G_1}$.

Meteorologia. — *Marea atmosferica.* Nota del dott. Francesco Morano, presentata dal Socio Blaserna.

Se il sole e la luna producono sulle acque degli oceani il fenomeno dell' alta e bassa marea, lo stesso si argomenta subito doversi verificare eziandio nell' atmosfera terrestre. Furono il Sigorgne, il Frisi, il Sigaud de la Fond i primi che dopo il Newton manifestarono questa convinzione. L' aspettativa fe' sì che non appena dal Godin e Condamine nell' America meridionale [1] e da altri ancora fu bene assodato il fatto osservato per la prima volta dal dott. John Beale in Inghilterra [2], che cioè la pressione barometrica nello spazio di un giorno presenta un andamento periodico, si disse senz' altro che quello era un effetto della marea solare. Così sostennero Hemmer [3], Cassan [4], Späth [5] con molti altri.

Non mancarono d' altra parte di quelli che impugnando l' affermazione suddetta attribuirono il fenomeno in questione a cause metereologiche [6]; ma fu il Laplace [7] che matematicamente dimostrò che l' effetto simultaneo dell' attrazione del sole e della luna sul barometro per latitudini anche non molto grandi è quasi inapprezzabile; donde si conclude che le sensibili oscillazioni barometriche diurne non possono dipendere dall' attrazione del sole ma debbono avere un' origine diversa.

Per istituire un confronto tra le oscillazioni diurne e quelle causate dalla marea propriamente detta e calcolare gli effetti di questa sull'altezza dell'atmosfera, ho intrapreso il presente studio pei fini seguenti:

I. Determinare per Roma l' oscillazione barometrica nel giorno solare.
II. Determinare l' oscillazione barometrica nel giorno lunare.
III. Dedurne l' altezza della marea tanto lunare che solare.

Per le osservazioni barometriche ho adoperato i valori ottenuti sulla Specola Vaticana [8] negli anni 1891, 1892, 1893, 1894.

Le misure sono state ottenute col barografo registratore Richard debitamente corretto sul barometro Fortin.

(1) Journal du voyage à l'équateur par Mr. de la Condamine. Paris 1751, p. 150.
(2) Philosophical transactions, London, vol. I, 1665, p. 157.
(3) Gren's Journal der Physik, vol. II, 1790.
(4) Ibid., vol. III, 1791.
(5) Ibid.
(6) Kirwan, Gren's Journal der Physik, vol. IV, 1791.
(7) Mécanique céleste, tom. V.
(8) Pubblicazioni della Specola Vaticana, vol. II, III, IV, V.

Andamento barometrico nel giorno solare.

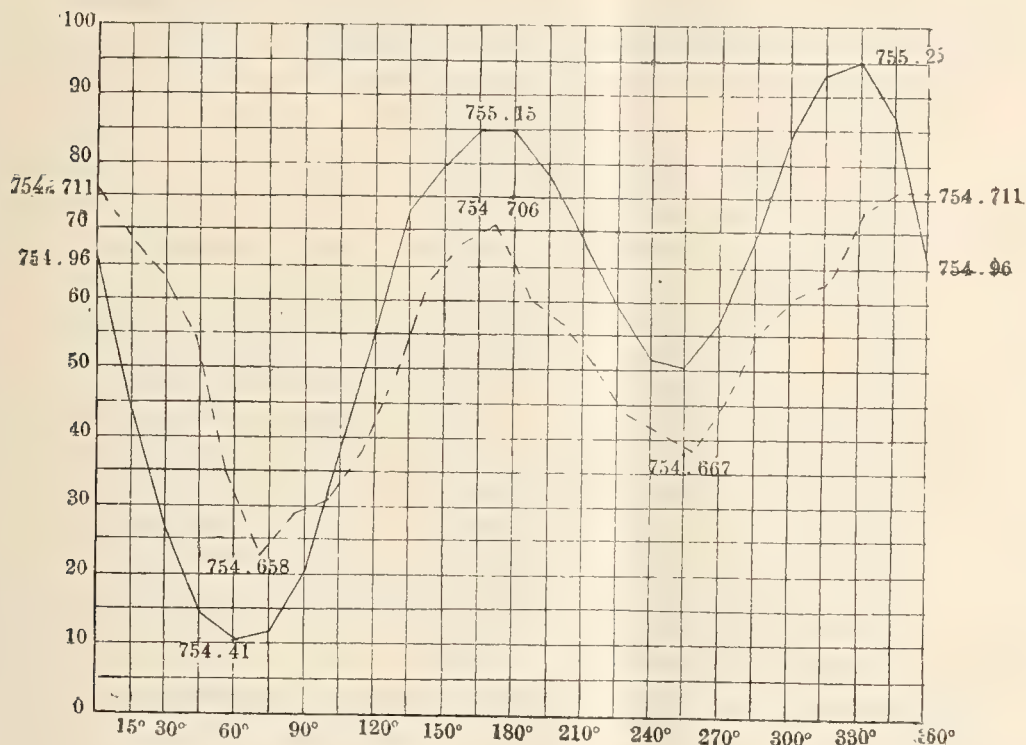
L'andamento barometrico nel giorno solare è stato da me determinato mese per mese, e quindi di nuovo per tutto l'anno. Nella seguente tabella do un quadro dei risultati.

Pressione = 750^{mm} +

Ore	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Decembre	Anno
0	3,67	6,67	5,04	4,08	3,69	5,62	4,60	5,56	6,21	4,82	5,82	6,03	5,15
1	61	65	00	3,98	57	55	53	52	14	78	75	5,86	08
2	60	58	4,90	86	47	44	42	44	03	67	68	82	4,99
3	55	48	74	73	41	36	35	38	5,97	54	61	70	90
4	43	36	64	64	35	35	34	35	92	40	49	58	82
5	28	34	60	61	40	40	40	38	90	44	44	47	81
6	26	40	65	67	50	46	53	50	6,00	45	46	50	87
7	41	52	77	82	60	59	65	65	16	59	60	62	99
8	62	71	89	93	66	67	71	73	29	82	78	82	5,14
9	85	86	5,01	99	65	63	65	79	44	5,00	95	97	23
10	98	91	01	98	63	58	59	76	44	04	6,02	6,13	25
11	92	88	4,96	93	59	51	48	56	30	4,99	5,90	02	17
12	59	64	80	74	46	49	36	34	09	72	65	5,71	4,96
13	28	31	54	59	37	26	19	18	5,88	46	41	35	76
14	13	03	33	40	26	13	06	02	68	30	21	25	57
15	12	5,89	16	27	13	01	3,96	4,87	50	21	17	17	45
16	18	86	06	19	07	4,90	90	77	44	16	17	21	41
17	23	90	10	19	02	89	81	72	47	22	21	29	42
18	37	6,06	23	26	09	94	85	72	52	37	39	42	51
19	56	26	39	44	23	5,02	93	85	75	52	53	55	67
20	69	39	61	71	44	21	4,06	5,09	6,01	64	67	63	85
21	82	51	75	94	67	48	37	36	16	79	76	76	5,03
22	87	56	85	4,01	75	58	47	45	21	90	80	79	10
23	91	61	96	07	78	64	51	54	22	94	83	82	15
Media	3,54	6,43	4,67	3,71	3,45	5,36	4,32	5,31	5,99	4,62	5,60	5,66	4,89

Il tempo è contato dalla mezzanotte.

Nella figura riportata qui sotto la linea a tratto pieno dà l'andamento diurno ricavato da tutto il quadriennio di osservazioni quale apparisce dall'ultima colonna della tabella precedente. L'ordinata dà la pressione; ogni unità rappresenta un centesimo di millimetro. L'ascissa poi che dinota il

tempo, anzichè in ore è data in angolo orario e vien così ad esser contata dal mezzogiorno. In questo modo è reso più evidente il confronto tra la curva dovuta al sole e quella dovuta alla luna che è espressa allo stesso modo.

L'andamento diurno della pressione vien rappresentato mediante la formola adoperata da Bessel per altri scopi:

$$p = p_m + a_1 \operatorname{sen}\left(A_1 + \frac{2\pi}{T}\, t\right) + a_2 \operatorname{sen}\left(A_2 + \frac{4\pi}{T}\, t\right) \tag{1}$$

dove p è la pressione in funzione del tempo t;

T la durata del periodo diurno;

p_m la pressione media durante questo periodo;

$a_1\ a_2\ A_1\ A_2$ quattro costanti empiriche.

Ho applicata la (1) al caso nostro per esprimere con essa l'andamento diurno medio per tutto l'anno. Ho calcolato le costanti $a_1\ a_2\ A_1\ A_2$ col mezzo dei minimi quadrati facendo concorrere tutti i ventiquattro valori di p.

È risultato

$$a_1 = 0.2222 \quad a_2 = 0.2894 \quad A_1 = 21^\circ.18' \quad A_2 = 141^\circ.13'$$

La (1) diventa così:

$$p = 754.89 + 0.2222 \operatorname{sen}(21^\circ.18' + 15^\circ t) + 0.2894 \operatorname{sen}(141^\circ.13' + 30^\circ t)$$

Per verificare con quanta esattezza detta formola rappresenta il fenomeno, ho ricalcolato per mezzo di essa per tutti i valori di t i corrispondenti valori di p che pongo qui sotto di fronte ai valori osservati.

Ora	Valori osservati	Valori calcolati	Differenza	Ora	Valori osservati	Valori calcolati	Differenza
0	755,15	755,15	0,00	12	754,96	754,99	— 0,03
1	08	07	+ 01	13	76	80	— 04
2	4,99	4,96	+ 03	14	57	61	— 04
3	90	86	+ 04	15	45	46	— 01
4	82	82	00	16	41	38	+ 03
5	81	84	— 03	17	42	40	+ 02
6	87	92	— 05	18	51	50	+ 01
7	99	5,03	— 04	19	67	67	00
8	5,14	13	+ 01	20	85	86	— 01
9	23	20	+ 03	21	5,03	5,03	00
10	25	21	+ 04	22	10	14	— 04
11	17	15	+ 02	23	15	18	— 03

Si vede che l'accordo è soddisfacente, giacchè la divergenza comincia solo ai centesimi di millimetri.

Determinati i valori numerici delle costanti che compariscono in (1), si possono determinare per mezzo di essa gli istanti del giorno in cui hanno luogo la pressione media e le estreme. Gli istanti di pressione media si hanno ponendo

$$a_1 \operatorname{sen}\left(A_1 + \frac{2\pi}{T} t\right) + a_2 \operatorname{sen}\left(A_2 + \frac{4\pi}{T} t\right) = 0 \tag{2}$$

e quelli delle pressioni estreme si hanno facendo

$$\frac{dp}{dt} = 0 = a_1 \cos\left(A_1 + \frac{2\pi}{T} t\right) + 2a_2 \cos\left(A_2 + \frac{4\pi}{T} t\right). \tag{3}$$

Ho ottenuto applicando al caso nostro:

Istanti della pressione media

$$t_1 = 2^h.43^m \quad t_2 = 5^h.40^m \quad t_3 = 12^h.38^m \quad t_4 = 20^h.04^m$$

Istanti delle pressioni estreme

$$t_1 = 4.13^m \text{ min.} \quad t_2 = 9.37^m \text{ mass.} \quad t_3 = 16.20^m \text{ min.} \quad t_4 = 23.02^m \text{ mass.}$$

Volendo fare le stesse determinazioni mese per mese, ho supposto che per brevi intervalli a destra ed a sinistra degli istanti che si cercano la

pressione varî uniformemente. Gli istanti di pressione media sono stati così calcolati, mediante una semplice interpolazione. Gli istanti poi delle pressioni estreme sono stati determinati calcolando quei punti verso cui convergono il ramo ascendente e discendente della curva. Questa stessa via però non ho potuto seguire per l'istante del massimo notturno, giacchè a mezzanotte l'andamento presenta una discontinuità dovuta all'andamento annuo; laonde ho messo nel seguente quadro quell'istante che figura nei valori orarî.

Ore della pressione media.

Gennaio	$3^h.05^m$	$7^h.37^m$	$12^h.10^m$	$18^h.54^m$
Febbraio	3. 25	6. 15	12. 38	20. 20
Marzo	3. 42	6. 10	12. 30	20. 26
Aprile	3. 13	6. 24	12. 12	20. 00
Maggio	2. 24	5. 30	12. 07	20. 03
Giugno	3. 00	4. 12	12. 17	20. 33
Luglio	3. 25	3. 40	12. 14	20. 51
Agosto	—	—	12. 11	20. 49
Settembre	2. 40	5. 54	12. 29	19. 55
Ottobre	2. 23	7. 08	12. 23	19. 50
Novembre	3. 05	7. 00	12. 02	19. 30
Decembre	3. 30	7. 24	12. 08	20. 14
Anno	3. 07	6. 10	12. 29	20. 30

Ore delle pressioni estreme.

	1° Min.	1° Mass.	2° Min.	2° Mass.
Gennaio	$5^h.33^m$	$10^h.34^m$	$14^h.20^m$	$23^h.00^m$
Febbraio	4. 36	10. 43	15. 23	0. 00
Marzo	4. 36	9. 18	16. 23	0. 00
Aprile	4. 35	9. 23	16. 28	0. 00
Maggio	4. 18	8. 08	16. 44	23. 00
Giugno	3. 27	8. 04	16. 22	23. 00
Luglio	3. 32	8. 00	17. 14	0. 00
Agosto	4. 00	9. 35	17. 43	0. 00
Settembre	4. 48	9. 28	16. 11	23. 00
Ottobre	4. 00	9. 34	15. 44	23. 00
Novembre	5. 38	9. 40	15. 30	23. 00
Decembre	5. 23	10. 26	15. 15	0. 00
Anno	4. 30	9. 35	16. 37	23. 35

Molto si è discusso sulla causa delle oscillazioni barometriche diurne e non ancora si è potuto indicare una spiegazione che dia conto completo di tutto il fenomeno. È fuori dubbio però che dette oscillazioni non possono riguardarsi come effetto della marea solare, come meglio si intenderà confrontandole colle oscillazioni barometriche del giorno lunare.

Andamento barometrico nel giorno lunare.

Per determinare l'andamento barometrico nel giorno lunare, ho adoperato tutte le osservazioni eseguite dal primo novilunio del 1891 all'ultimo novilunio del 1894, ed ho calcolato separatamente su ciascuno dei 49 mesi lunari che corrono tra queste due epoche. Ho diviso il giorno lunare in venticinque ore quale è circa la sua durata. I risultati son questi:

Ora	Anno 1891	1892	1893	1894	Media
0	755.376	753.440	754.595	755.431	754.711
1	375	438	585	417	704
2	371	437	571	411	699
3	365	436	555	401	689
4	356	402	536	387	670
5	349	370	531	382	658
6	355	382	539	381	664
7	361	391	543	370	666
8	369	392	553	377	673
9	400	393	565	385	684
10	414	397	587	393	698
11	410	394	603	406	703
12	407	398	606	412	706
13	383	408	597	396	696
14	370	411	597	391	692
15	359	412	587	387	686
16	342	406	581	387	679
17	318	373	587	391	667
18	321	372	607	395	674
19	329	363	612	422	681
20	343	379	612	431	691
21	359	381	610	434	696
22	366	382	607	438	698
23	371	389	611	463	708
24	380	388	611	465	711

Il tempo è contato dalla culminazione superiore.

Nella figura questo andamento è rappresentato dalla linea tratteggiata. Sull'ordinata ogni unità rappresenta il millesimo di millimetro. L'ascissa dà l'angolo orario.

Da questi calcoli ricavo i seguenti risultati:

I. L'andamento barometrico nel giorno lunare presenta un'oscillazione doppia. I due massimi hanno luogo verso l'ora delle due culminazioni: i due minimi verso l'ora della levata e del tramonto della luna.

II. L'ampiezza di questa oscillazione raggiunge il valore di $0^{mm}.053$.

Confrontando questi risultati con quelli ottenuti in altri luoghi, trovo in primo luogo che essi sono più decisivi di quelli esposti dal Börn-

stein [1] per le città di Amburgo (5 anni di osservazioni), Vienna (5 anni di oss.), Berlino (5 anni di oss.), Keitum (15 anni di oss.), i quali poi sono anche discordi fra loro da una stazione all'altra, e sono anche discordi da un anno all'altro quelli della medesima stazione. L'autore citato ha dovuto concludere che nulla si può ricavarne di netto intorno all'andamento barometrico nel giorno lunare, che dal complesso di tutte le osservazioni da lui riportate par che risulti di una sola oscillazione con un sol massimo ed un sol minimo in tempi non ben determinati.

Invece risultati più concordi con quelli da me sopra riferiti sono stati ottenuti dal Sabine [2] a Sant' Elena (17 mesi di osservazioni biorarie e 3 anni di oss. orarie), dall'Elliot [3] a Singapore (5 anni di osserv. parte orarie e parte biorarie), e dal Neumayer [4] a Melbourne (5 anni di osserv. orarie).

Per conto mio posso confermare che l'oscillazione doppia coi caratteri succennati risulta nei miei calcoli così spiccata, da essersi ancora separatamente rivelata in moltissimi dei 49 mesi di osservazioni da me adoperati.

Altezza della marea atmosferica.

La regolarità con cui mi si son presentate le oscillazioni barometriche lunari, mi ha indotto a tentare un calcolo per determinare l' influsso che ha il movimento diurno della luna sull'altezza dell'atmosfera, determinare cioè l'altezza della marea atmosferica. A tal uopo potrebbe servire la formola

$$z = a \operatorname{lognat} \frac{p_0}{p}. \tag{4}$$

L'altezza della marea si otterrebbe eseguendo la variazione

$$\delta z = a \frac{\delta p_0}{p_0}.$$

La (4) però ha il torto di dare per l' altezza atmosferica un valore troppo piccolo. Volendo dei risultati attendibili, è meglio di introdurre per l'altezza dell'atmosfera un dato più positivo. Alcuni han creduto di determinare questa altezza calcolandola come la distanza massima a cui possono giungere le molecole dell'aria supponendole dotate alla superficie del suolo della propria velocità molecolare. Siccome per l'aria questa velocità è data da

$$v = 485^{\mathrm{m}} \sqrt{\frac{T}{273}}$$

[1] Börnstein, Meteorologische Zeitschrift, 1891, pag. 161.
[2] Philosophical Transactions, London, 1847, I.
[3] Ibid. 1852, I.
[4] Proc. Roy. Soc. London XV.

essa alla temperatura di 0° sarà di 485 m. La distanza a cui può giungere una molecola con questa velocità è $\frac{(485)^2}{2g}$ ossia circa 12 chilometri. Questo valore però è troppo piccolo anch'esso. Invece il Bradley dall'osservazione dei crepuscoli e dell'aurora, ha ammesso per altezza atmosferica il valore di 115 chilometri, ed il Liais ha spinta questa cifra sino ai 330 km.

Dall'osservazione poi delle stelle filanti si è ammesso il valore di 300 km.

Ritenendo quest'ultimo valore in cifra tonda, ho calcolato l'altezza atmosferica colla relazione

$$\frac{\delta z}{300.000} = \frac{\delta p_0}{p_0} \tag{5}$$

la quale a differenza della costante a riproduce la legge indicata dalla (4).

Nella seguente tabella do il valore di δp_0 calcolato sull'ultima colonna della tabella precedente, e quello di δz calcolato colla (5).

Ore	δp_0	δz	Ore	δp_0	δz
	mm	m		mm	m
0	+ 0.027	10.8	13	+ 0.012	+ 4.8
1	+ 0.020	8.0	14	+ 0.008	+ 3.2
2	+ 0.015	6.0	15	+ 0.002	+ 0.8
3	+ 0.005	2.0	16	— 0.005	— 2.0
4	— 0.014	— 5.6	17	— 0.017	— 6.8
5	— 0.026	— 10.4	18	— 0.010	— 4.0
6	— 0.020	— 8.0	19	— 0.003	— 1.2
7	— 0.018	— 7.2	20	+ 0.007	+ 2.8
8	— 0.011	— 4.4	21	+ 0.012	+ 4.8
9	0.000	0.0	22	+ 0.014	+ 5.6
10	+ 0.014	+ 5.6	23	+ 0.024	+ 9.6
11	+ 0.019	+ 7.6	24	+ 0.027	+ 10.8
12	+ 0.022	+ 8.8			

Da questo quadro si vede che la massima differenza tra l'alta e bassa marea lunare è di circa 21 metro. Su questi valori bisognerebbe operare la correzione dovuta all'alterazione di peso che il movimento della luna produce sull'aria atmosferica, ma il grado di esattezza non ammette questa precisione.

Calcolato l'effetto della marea lunare, si può dedurne quello della marea solare ricordando che esso è circa la metà. Se ne ricava che l'ampiezza dell'oscillazione barometrica dovuta al sole è di 0,0265 mm. e l'altezza della marea solare raggiunge così un massimo di 10 metri. Ciò porterebbe ai tempi delle sigizie un massimo di circa 31 metro per la nostra latitudine.

Fisica terrestre. — *Sull'influenza della pressione barometrica nelle determinazioni della componente orizzontale del magnetismo terrestre.* Nota del dott. G. BELLAGAMBA, presentata dal Socio BLASERNA.

Sulle traccie di uno studio del prof. Kuhn fatto nel 1846 [1] mi proposi decidere se in misure di intensità assoluta magnetica terrestre, influisca la pressione barometrica; se cioè in ricerche di grande precisione occorra tener calcolo della quota altimetrica sul mare del luogo in cui esse vengono eseguite.

Invero ogni mobile oscillante in un fluido va soggetto ad una perdita di forza viva, dipendente dalla densità del mezzo, per il moto che esso comunica alle particelle del fluido ciscostante. Quando il mobile è un magnete, a questa perdita va aggiunta inoltre quella derivante dalla suscettibilità magnetica del fluido, la quale diminuisce l' intensità del campo agente sul magnete, di un termine $H\frac{\mu}{m}$ se μ è il momento unitario indotto dal campo nel mezzo fluido, m il momento unitario del magnete.

Ma nel caso nostro in cui l' ambiente considerato è l' aria, μ è piccolissima; può ritenersi quindi trascurabile questa seconda causa perturbatrice. Resta allora a decidere se per la prima causa si abbiano differenze calcolabili.

Le condizioni pratiche, cioè di un magnete che oscilla in seno ad una massa d' aria rinchiusa in un recipiente stretto, non sono accessibili ad una trattazione teorica; perciò mi sono proposto di attaccare la questione da un punto di vista puramente sperimentale. Si trattava dunque di esaminare se la durata d' oscillazione d' un magnete varia con la pressione. A questo scopo eseguii numerose misure; e ad ottenere risultati il più possibile evidenti, sperimentai a pressioni molto diverse fra loro, e cioè alla pressione ordinaria, e a 60^{mm} di mercurio. Trattandosi di misure di tempo mi fornii di un buon cronometro ad andamento regolare. Per ricondurmi poi alle condizioni in cui le ricerche d' intensità magnetica terrestre vengono eseguite, l' apparecchio di cui mi servii non era che un comune magnetometro che ebbi cura di costruire a perfetta tenuta d' aria.

Una scatola di vetro, entro cui oscillava il magnete, veniva ermeticamente chiusa da una lastra pure di vetro che s' applicava superiormente, e nel cui centro era imperniato un lungo tubo d' ottone. Alla sommità del tubo scorreva una asticella per appendere il filo di sospensione della sbarra magnetica. Due rubinetti permettevano le comunicazioni con un manometro

[1] Pogg. Annalen 71, 124; 1847.

e con una pompa aspirante. Come si intende ebbi cura che il filo fosse senza torsione nella posizione di riposo.

I magneti adoperati nelle mie ricerche furono tre, per forma e peso diversi tra loro: il primo parallelepipedico di grandezza ordinaria, come generalmente si usano nei magnetometri (lunghezza mm. 90, larghezza mm. 9,8, spessore mm. 4, peso gr. 28); il secondo laminare (lunghezza mm. 90, larghezza mm. 10, spessore mm. 0,4, peso gr. 3) e questo venne adoperato sospeso per coltello; il terzo cilindrico (lunghezza mm. 100, raggio mm. 5,04, peso gr. 50). Per ognuno di questi magneti misurai le durate d' oscillazioni, T_1 alla pressione ordinaria, T_2 alla pressione di 60 mm.; servendomi del metodo di Hansteen.

La incostanza della H durante le osservazioni e le possibili variazioni di temperatura, potevano essere cause d' errori non trascurabili. Per compensarne il più possibile gli effetti, eseguii le mie misure alternativamente una a pressione ordinaria e una a pressione ridotta. Riunii poi in gruppi di tre tutte le mie misure secondo l' ordine di successione in cui vennero eseguite, e in modo che a due misure alla stessa pressione, ne fosse sempre interposta una a pressione diversa. Ogni gruppo mi dava così un valore di T_1 e il relativo valore di T_2, uno dei quali era tratto dalla media delle due misure estreme, l' altro dalla misura interposta. Ridussi quindi queste durate di oscillazione, ad archi infinitesimi per mezzo della comune formola del Borda, che verificai potersi applicare anche alle mie misure senza bisogno di tener conto di termini ulteriori della serie, malgrado che in alcune di esse l' ampiezza di oscillazione raggiungesse il valore di 50°.

Per sottrarmi alle azioni perturbatrici dei materiali in ferro dei fabbricati, operai nell'Orto Botanico della R. Università di Roma, grazie alla cortesia del prof. Pirotta.

Le mie misure furono assai numerose; ed esse, non avendo io potuto sperimentare che in giorni calmi di vento e senza pioggia, si protraggono dal marzo all' agosto. Ebbi così in battiti di orologio (un battito è $\frac{1}{150}$ di 1') le durate d' oscillazione dei tre magneti, che riunite, come dissi, tre a tre, disposi in tabelle delle quali, a titolo d' esempio, riporto la prima, a cui tutte le altre sono simili.

Tabella A. *Magnete parallelepipedico.* 23 marzo 98.

Pressione ordinaria			Pressione ridotta			Pressione ordinaria		
Passaggi		T_{100}	Passaggi		T_{100}	Passaggi		T_{100}
h ′ b	h ′ b	′	h ′ b	h ′ b	′	h ′ b	h ′ b	′
11 17 36	11 39 29	21 143	12 25 25	12 47 19	21 144	13 0 31	13 22 23	21 142
69	62	143	58	52	144	64	56	142
102	95	143	90	85	145	97	88	141
135	128	143	123	118	145	131	122	141
18 18	40 11	143	26 7	141	144	1 14	23 5	141
52	43	141	40	48 23	143	47	38	141
85	76	141	73	56	143	80	71	141
118	109	141	106	89	143	113	104	141
19 1	142	141	139	122	143	146	137	141
33	41 25	142	27 22	49 5	143	2 29	24 20	141
23°58′ — 12°32′		21′ 142,1 b	23°58′ — 14°13′		21′ 143,7 b	23°58′ — 12°32′		21′ 141,2 b
3292,10			3293,70			3291,20		

Le tre colonne verticali al disotto di ogni indicazione di pressione, esprimono in ore minuti e battiti: la prima i passaggi delle prime dieci osservazioni; la seconda quelli delle seconde dieci contate a partire dal passaggio della centesima; la terza, in testa alla quale è segnato T_{100}, le differenze fra questi tempi; e dà quindi dieci valori della durata di cento oscillazioni, dalla cui media si trae il valore di questa durata. Questo valore tradotto in soli battiti trovasi notato nell'ultima colonna orizzontale. I due numeri a sinistra di questo valore esprimono le ampiezze di oscillazione iniziale e finale, da utilizzarsi nella correzione colla formola di Borda.

Ecco infine qui riuniti per ogni singolo magnete i valori corretti di T_1 e T_2.

Magnete parallelepipedico.

TABELLA I (1).

Numero d'ordine	Data della misura	Ora media della misura	Durata d'oscillazione		Differenza
			a pressione ordinaria	a pressione ridotta	
		h ′	b	b	b
1	23 marzo . . .	12, 30	32, 73798	32, 73543	0, 00255
2	2 aprile . . .	10 30	32 81382	32 81159	0 00223
3	3 » . . .	9 00	32 78750	32 78489	0 00261
4	4 » . .	15 00	32 77440	32 76948	0 00492
5	12 » . . .	15 00	32 91733	32 91624	0 00109
6	13 » . . .	10 30	32 89290	32 88949	0 00341
7	14 » . . .	10 30	32 91976	32 91863	0 00113
8	25 » . . .	11 00	33 00100	32 99845	0 00255
9	26 » . . .	11 30	32 97977	32 97136	0 00841
10	1 maggio . .	10 00	33 03087	33 02520	0 00567
11	4 » . . .	12 30	33 12738	33 12334	0 00404
12	15 » . . .	11 30	33 06453	33 05868	0 00585
13	25 » . . .	10 30	33 02561	33 01873	0 00688
14	26 » . . .	9 30	33 05652	33 04400	0 01252
15	1 giugno . .	16 15	33 03762	33 03399	0 00363
16	2 » . . .	17 15	33 08924	83 08800	0 00124
17	3 » . . .	11 30	33 12182	33 11086	0 01096
18	4 » . . .	10 30	33 09594	33 08601	0 00993

Magnete laminare.

TABELLA II.

Numero d'ordine	Data della misura	Ora media della misura	Durata d'oscillazione		Differenza
			a pressione ordinaria	a pressione ridotta	
		h ′	b	b	h
1	12 luglio . . .	15, 15	14, 55012	14, 48432	0, 06580
2	13 » . . .	17 30	14 57559	14 52349	0 05210
3	14 » . . .	13 15	14 57198	14 51073	0 06125
4	14 » . . .	15 00	14 58445	14 52076	0 06369
5	14 » . . .	16 30	14 57100	14 50485	0 06615
6	15 » . . .	9 45	14 56983	14 50783	0 06200
7	15 » . . .	10 15	14 58495	14 51827	0 06668
8	16 » . . .	11 30	14 58693	14 51852	0 06841
9	16 » . . .	15 15	14 59241	14 52100	0 07141
10	17 » . . .	16 00	14 58992	14 52549	0 06443
11	17 » . . .	17 15	14 58942	14 52500	0 06442

(1) Notevole in questa tabella è l'aumento nella durata d'oscillazione, che si verifica seguendo l'inoltrarsi della stagione calda dal marzo all'agosto. Questo fatto si deve, come ognuno sa, al decremento che subisce il momento magnetico di un ago per effetto degli incrementi di temperatura.

Magnete cilindrico.

TABELLA III.

Numero d'ordine	Data della misura	Ora media della misura	Durata d'oscillazione		Differenza
			a pressione ordinaria	a pressione ridotta	
		h ′	b	b	h
1	22 luglio . . .	17, 00	32, 23975	32, 23404	0, 00571
2	25 » . . .	11 30	32 24916	32 24909	0 00007
3	25 » . . .	16 00	32 23875	32 23200	0 00675
4	1 agosto . . .	10 00	32 25213	32 23700	0 01513
5	2 » . . .	9 30	32 24420	32 22899	0 01521
6	5 » . . .	16 00	32 23925	32 23439	0 00486
7	5 » . . .	9 00	32 24124	32 22700	0 01424
8	6 » . . .	9 30	32 24285	32 23431	0 00854
9	7 » . . .	9 30	32 24866	32 23400	0 01466
10	7 » . . .	16 30	32 24520	33 24356	0 00164

Dall' esame di queste tabelle ci risulta subito evidente che un aumento di pressione comporta un aumento di durata di oscillazione. Le differenze risultanti sono invero minime, specialmente pei magneti parallelepipedico e cilindrico, e i loro valori medî espressi in battiti, sono:

Magnete parallelepipedico. . . . . 0^b,00498
» laminare . . . . 0 ,06421
» cilindrico . . . . 0 ,00868

che ridotti in secondi dànno rispettivamente:

0″,002; 0″,02; 0″,003.

Ora il limite estremo di esattezza che si può ragionevolmente pretendere nelle determinazioni di H, è che il suo valore sia ottenuto con una precisione mai al disotto di ± 1 unità della quarta cifra decimale nel sistema C. G. S. Il prof. Palazzo ha mostrato (¹) che questa approssimazione si raggiunge per valori di dT compresi fra ± 0^s,0015. I tre valori di dT qui sopra scritti, sono alquanto maggiori; ma è bene ricordare che le mie misure furono eseguite per una variazione di pressione di circa 700 mm. Ora se esse si riconducessero entro i limiti della pressione barometrica sulla superficie terrestre, i valori di dT ottenuti soddisfarebbero certamente alla condizione per l' esattezza massima di H.

Dal raffronto delle differenze dT pel 1° e 3° magnete, con quella del 2°, e dalle considerazioni suesposte, si deduce questa conclusione:

(¹) V. Annali dell'Ufficio centrale meteorologico e geodinamico Italiano, vol. XVI, parte I, 1894. L. Palazzo, *Misure assolute degli elementi del magnetismo terrestre.*

Le variazioni della pressione barometrica comportano un cambiamento della durata d'oscillazione delle sbarre magnetiche, e maggiore nei magneti leggeri, che nei pesanti; ma *queste variazioni sono assolutamente trascurabili nelle misure di magnetismo terrestre.*

Il fatto della diminuzione della durata di oscillazione colla diminuzione della pressione atmosferica, si può *empiricamente* esprimere col dire che il magnete trascina nel suo movimento uno strato d'aria di un certo spessore, sì che se ne risente il momento d'inerzia del magnete e diversamente a seconda della pressione dell'aria (Kuhn).

Dalla

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{MH}}$$

si ricava differenziando

$$\frac{2dT}{T} = \frac{dK}{K},$$

relazione che lega le variazioni della durata di oscillazione con quelle del momento d'inerzia.

Dai valori di dT misurati e riportati nelle colonne — Differenze — delle tabelle, ho dedotto per ogni magnete i valori del rapporto $2\frac{dT}{T}$, le cui medie sono rispettivamente

0,00032 0,00808 0,00053.

Supponendo ora che il dT dato dalle mie esperienze rappresenti il cambiamento della durata di oscillazione quando si passi dal vuoto alla pressione atmosferica normale, si può calcolare lo strato d'aria virtuale, diciamo così, trascinato con sè dal magnete.

Ammettiamo infatti, in prima approssimazione, che i momenti d'inerzia dK della massa d'aria e K del magnete sieno nel rapporto delle masse rispettive. Riteniamo ora che l'aria aderisca alle sole pareti laterali; allora sarà

$$\frac{dK}{K} = \frac{2l\,sx\delta}{m}$$

in cui l ed s indicano lunghezza e dimensione verticale della sbarra; x lo spessore incognito dello strato d'aria, δ la densità dell'aria, m la massa del magnete. Prendendo per δ il valore 0,013 e sostituendo alle altre grandezze i valori sopra riferiti, si trova per x un valore quasi costante per i tre magneti e di circa un centimetro.

Cristallografia. — *Sopra alcuni minerali italiani.* Nota di C. VIOLA, presentata dal Socio BLASERNA.

I. *Albite del marmo di Carrara.*

L'albite limpida del marmo bianco di Carrara è un esempio prezioso in Italia di albite tipica come quella di Kasbek (Caucaso) e di Lakous (Candia). È ricordata fuggevolmente dal vom Rath, che con la sua grande attività fece conoscere i nostri tesori minerarî all'estero, e prima di lui dall' Hessemberg (1). A. D'Achiardi (2) così ne parla nella sua bella *Mineralogia della Toscana*: « l'albite la si vede in uno degli esemplari nel Museo di « Pisa, e presenta le solite forme, la comune emitropia con l'asse di rivo- « luzione normale e il piano di unione parallelo a (010). È scolorita, tra- « lucida, anzi quasi trasparente, ed è facile riconoscerla in mezzo ai cristalli « di Quarzo, Gesso, Calcite e altre specie, che l'accompagnano; Dur. circa = 6 , « peso spec. 2,61. L'albite nelle geodi del marmo può considerarsi come « accidentale, essendo rara e scarsa ».

Il miglior conoscitore dei minerali rinchiusi nelle geodi e vene del marmo di Carrara è l'ing. Domenico Zaccagna; e la sua ricca collezione fa fede che egli si è occupato con amore nel raccogliere e ordinare i tesori, che si sono scoperti via via nelle formazioni dell'Alpe Apuana. A lui devo un cristallino di albite trasparente composto di tre individui, due dei quali sono associati secondo la legge albitica e due secondo la legge di Karlsbad, come fa vedere la figura annessa.

Le sue dimensioni sono:

5	mm. sull'asse	*a*
3	» »	*b*
10	» »	*c*

L'ing. Mattirolo non vi ha trovato nemmeno traccie di potassa, e il dott. Boschi appena traccie di ossido di calcio. Talchè la composizione chimica di questa rara albite si potrebbe scrivere così:

$$\begin{aligned} Si\,O_2 &= 68.70 \\ Al_2\,O_3 &= 19.47 \\ Na_2\,O &= 11.83 \\ Ca\,O &= \text{traccie} \end{aligned}$$

Le zone molto sviluppate sono in quest'ordine:

$$[001], [100], [010] \text{ e } [10\bar{2}]$$

(1) G. vom Rath, *Mineralogische Mittheilungen.* Poggendorf. Ann. 1867, 132 374-5 (Nota).

(2) A. D'Achiardi, *Mineralogia della Toscana*, II. Pisa 1873, pag. 49.

Nella zona [001] sono le faccie (010), (0$\bar{1}$0), (130), (110), (1$\bar{1}$0), ($\bar{1}$10), ($\bar{1}\bar{1}$0), ($\bar{1}\bar{3}$0), (1$\bar{3}$0). Nella zona [100] si trovano le faccie (001), (00$\bar{1}$), (20$\bar{1}$) e ($\bar{2}$01).

Le faccie in generale non sono bene conservate, perchè T^{σ}_{02} (110), (130) sono rigate e T^{σ}_{02} (010) sono ricurve. Distintissimo ne è il clivaggio (001).

Gli angoli che ho potuto misurare col goniometro del dott. Sella nell'istituto fisico di Roma, sono i seguenti:

$$0\bar{1}0 : 1\bar{1}0 = 60^{\circ} . 32' . 07''$$
$$0\bar{1}0 : 1\bar{3}0 = 28^{\circ} . 50' . 00$$
$$001 : \bar{2}01 = 82 . 15 . 0$$
$$001 : \underline{00\bar{1}} = 7^{\circ} . 30' . —$$
$$\underline{00\bar{1}} : \underline{\bar{1}\bar{1}0} = 64^{\circ} . 56' . 30''$$
$$\underline{001} : \underline{\bar{1}\bar{1}0} = 69 . 17 . 30$$

quindi

$$001 : 010 = 86^{\circ} . 15. —$$

Per lo studio ottico di questa albite ho avuto a mia disposizione il riflettometro totale di precisione dell'istituto fisico di Roma; mi aiutò nel

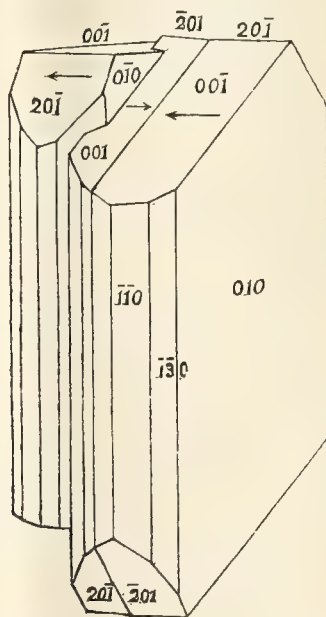



Fig. 1.

lavoro penoso il signor Giuseppe Scalfaro (allievo dell'istituto fisico di Roma) che manifestò il desiderio di apprendere l'intero procedimento da me proposto per la determinazione delle costanti ottiche di un cristallo triclino mediante una sola sezione qualsiasi. La sezione che io levigai, fu parallela alla faccia (010) e in prossimità di (010) del cristallo a destra come indica la figura.

La direzione di massima estinzione nella faccia (010) fa con l'asse della zona [100] non l' angolo di + 19°, o + 20° come generalmente si usa dare [1], ma

$$+21° \tfrac{1}{2}$$

come io già trovai per l'albite di Lakous [2].

L'istrumento del prof. Abbe di Jena fu corretto nel modo indicato da Pulfrich e come io riferii nella mia Nota II sull' anortite del Vesuvio [3]. Fu impiegato il metodo differenziale; le differenze degli angoli furono lette con la vite micrometrica e riferite all'angolo limite della riflessione totale per l'indice ε del quarzo che è, secondo Mascart 1,55338 per luce D. L'errore degli indici di rifrazione cade nella 4ª decimale. Maggior precisione non si potè raggiungere, perchè si riuscirono di puntare le linee limiti con molto sforzo visivo.

Cerchio orizzontale		Limite esterno		Limite interno	
		Angoli	Nicol	Angoli	Nicol
0° — 180°		54, 28, 40 (° ′ ″)	9°	53, 56 30 (° ′ ″)	81°
7 — 187	α	—	—	*53 56 30*	81
15 — 195		54 26 48	—	53 57 15	—
30 — 210		54 27 45	—	54 01 43	—
45 — 225	β''	*54 27 43*	9°	54 01 10	—
60 — 240		54 27 50	—	54 06 45	—
75 — 255		54 28 28	—	54 08 33	—
88 — 268		orientazione della zona [001]			
90 — 270		54 29 15	—	54 09 08	—
96½ — 276½	β'	—	—	*54 09 08*	81
105 — 285		54 29 35	—	54 08 47	—
120 — 300	γ	*54 29 35*	9°	54 07 45	—
135 — 315		54 28 55	—	54 04 25	—
150 — 330		54 28 58	—	54 01 08	—
165 — 345		54 28 33	—	53 58 00	—

(1) M. Schuster, *Ueber die opt. Orient. der Plagioklase.* Min. u. petr. Mitth. von G. Tschermak. 1881, N. F. Bd. III, pag. 215. — H. Rosenbusch, *Physiographie der Mineralien.* 1885, II Auf., pag. 533; 1892, III Auf., pag. 661. — A. Michel Lévy et Alf. Lacroix, *Les minéraux des roches.* Paris, 1888, p. 201. — A. Michel Levy, *Étude sur la détermination des Feldspaths.* Paris, 1894, p. 32. — F. Zirkel, *Lehrbruch der Petrographie,* 1893, I Bd. pag. 228.

(2) C. Viola, *Ueber den Albit von Lakous.* Tschermak's Mineral. u. petrogr. Mitth. 1895, XV, pag. 154.

(3) C. Viola, *Per l'anortite del Vesuvio,* Nota II. R. Accademia dei Lincei, Classe di scienze fisiche, 1899, 2° semestre, pag. 463.

La qui unita tabella dà gli angoli limiti per la luce D per tutti i raggi paralleli al piano (010) nell' intera circonferenza da 15° a 15°, la posizione del Nicol e l'orientazione del cristallo. Per ottenere quest'ultima si fece uso di un segnale del goniometro riflesso dapprima dalla faccia (010), indi dalla piccola faccia (1$\bar{1}$0).

I due valori $\varphi_\alpha = 53^\circ . 56' . 30''$ e $\varphi_\gamma = 54^\circ . 29' . 35'$ dànno senz' altro:

$$\alpha_D = 1{,}52823,$$
$$\gamma_D = 1{,}53887$$

L'orientazione dell'elissoide di Fresnel nell'albite è nota già da molti pregevoli lavori, fra i quali possiamo nominare quelli di Fouqué, Michel-

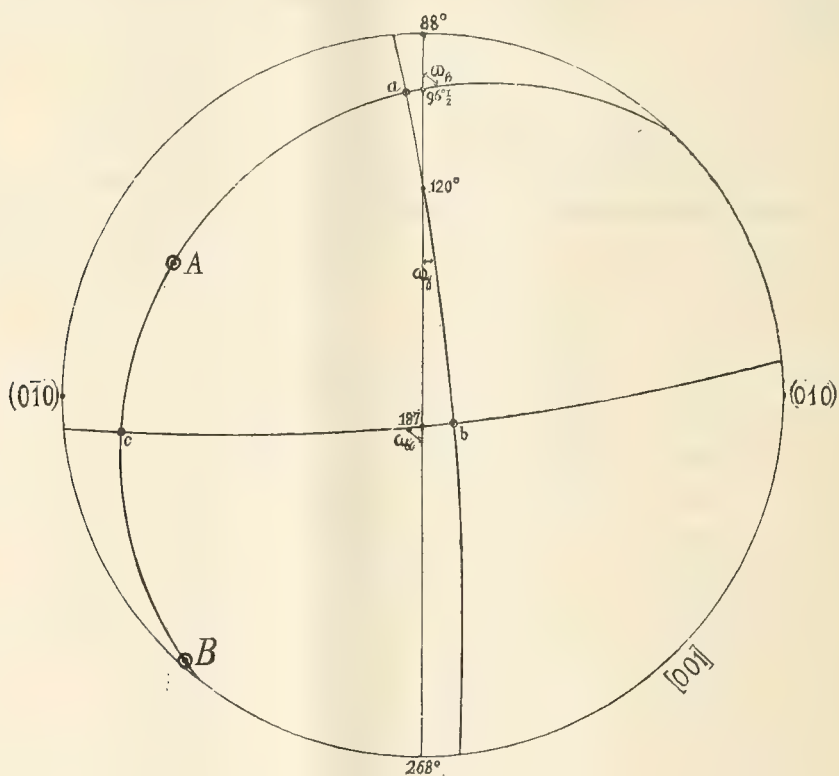



Fig. 2.

Lévy, Fedorow e Becke. Anch'io ne diedi le costanti nei tre miei lavori sull'albite di Lakous. Dimodochè sarebbe per noi cosa facilissima decidere se l'angolo limite per l'indice medio di rifrazione β_D è eguale a $54^\circ . 09' . 08''$ o piuttosto a $54^\circ . 27' . 43''$. Ma per rendere il lavoro più completo e anche istruttivo, sarà bene considerare a parte le due ipotesi, e confrontare il calcolo con le osservazioni.

Ipotesi I. $\varphi_\beta = \varphi_\beta' = 54^\circ . 09' . 08''$.

Chiamiamo con:

$$A = 120^\circ - 96\tfrac{1}{2} = 23^\circ\tfrac{1}{2} \quad \text{e} \quad l\cos A = 9.9623978$$
$$B = 187^\circ - 120 = 67^\circ, \quad l\cos B = 9.5918780$$
$$C = A + B = 90^\circ\tfrac{1}{2} \quad l\cos C = 7.9408419_n$$

E con le relazioni note (vedi fig. 2):

$$\text{tag}^2\omega_\alpha = \frac{\cos A}{\cos B \cos C},$$
$$\text{tag}^2\omega_\beta = \frac{\cos B}{\cos C \cos A},$$
$$\text{tag}^2\omega_\gamma = \frac{\cos C}{\cos A \cos B},$$

avremo:

$$\omega_\alpha = 86^\circ.30',$$
$$\omega_\beta = 81^\circ.51',$$
$$\omega_\gamma = 8^\circ.52'.$$

Le letture al Nicol furono:

$$\omega_\alpha = 81^\circ$$
$$\omega_\beta = 81^\circ$$
$$\omega_\gamma = 9^\circ$$

Ipotesi II. $\varphi_\beta = \varphi_\beta'' = 54^\circ, 27', 43''$.

Chiamiamo come dianzi

$$A = 225 - 120 = 105 \equiv 75^\circ$$
$$B = 187 - 120 = 67^\circ$$
$$C = 225 - 187 = 38^\circ$$

e con le medesime relazioni avremo:

$$\omega_\alpha = 42^\circ.31' \quad \text{e letti sul Nicol} = 81^\circ$$
$$\omega_\beta = 54.09 \quad 9^\circ$$
$$\omega_\gamma = 70.17 \quad 9^\circ$$

È evidente che la seconda ipotesi non è ammissibile.

Rimane dunque

$$\omega_\beta = 54^\circ.09', 08''$$

e quindi riassumendo:

	Viola [1]	C. Klein [2]
$\alpha_D = 1{,}52823$	($\alpha = 1{,}52905$ Albite di Lakous)	($\alpha = 1{,}5291$ Albite di Schmirn)
$\beta_D = 1{,}53232$	($\beta = 1{,}53330$ id.)	($\beta = 1{,}5340$ id.)
$\gamma_D = 1{,}53887$	($\gamma = 1{,}53858$ id.)	($\gamma = 1{,}5388$ id.).

(1) C. Viola, *Zeitschrift für Krystall.* 1898. Bd. XXX, pag. 437.

(2) C. Klein, *Optische Studien* I, Köngl. preuss. Akademie der Wissensch. zu Berlin 1899. Sitzungsberichte XIX, pag. 362.

In ultimo possiamo ancora calcolare l'angolo degli assi ottici 2V con la formola

$$\mathrm{tag}\,V = \sqrt{\frac{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}}{\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}}} \quad \text{(V attorno la bisettrice positiva)}$$

Dunque

2V = + 76°.55′ (2V = 77° Albite di Kirabinsk e Modane secondo Fouqué [1]) che può essere affetto di errore di $\frac{1}{2}$° almeno essendo l'errore degli indici di rifrazione nella 4ª decimale [2].

II. *Moscovite della cava di Monte Orfano* [3] *presso il Lago Maggiore nel comune di Mergozzo (Novara).*

Ebbi alcune piccole lamine di Moscovite appartenenti al R. Ufficio Geologico, la quale si trova inclusa in grandi cristalli esagonali nel Gneiss e nel Granito.

Mentre è cosa facile ottenere dalla mica una faccia nitida, e liscia, stante il clivaggio perfettissimo, altrettanto è difficile osservare le linee limiti della riflessione totale senza una preparazione speciale.

Una faccia piana si può ottenere, se le dimensioni sono molto limitate. Se la faccia non è piana, si presenterà la linea limite relativa al liquido impiegato, che nel nostro caso è la bromonaftalina α. Se poi la faccia è bensì piana, ma la lamina è sottile, ovvero a causa del clivaggio facilissimo, vi è inclusa dell'aria, apparirà la linea limite relativa all'aria, non appariranno quelle relative alla mica.

Avendo cura di evitare questi inconvenienti, ed essendo la lamina sottile, smerigliando la faccia superiore, le linee limiti relative alla mica si presenteranno con la massima nitidezza.

Nel piano del clivaggio perfettissimo ottenni le seguenti due letture, massima e minima, nella curva limite esterna, e alla distanza di circa 90°:

116° . 49′ . 07″
117° . 16′ . 25″

Nella curva limite interna ottenni invece un solo valore, cioè

119° . 04′ . 59″

come media di quattro letture.

[1] F. Fouqué, Bulletin de la Soc. franç. de Minéralogie 1894, t. 17, p. 311-24.

[2] C. Viola, *Per l'anortite del Vesuvio*. R. Accademia dei Lincei 1899, 1° semestre, pag. 469.

[3] Sui minerali di Monte Orfano scrisse Alfredo Leuze: *Mineralogische Notizen*, Bericht über die XXV Versammlung des oberrheinischen geologischen Vereins. Basel, 1892.

E senza spostare il cerchio verticale, sostituendo la lamina del quarzo a quella della mica, il valore massimo, come media di 2 letture, è

$$119^\circ . 32' . 15''$$

che corrisponde all'indice ε (1,55338).

Quindi abbiamo le seguenti differenze lette sulla vite micrometrica:

$0^\circ.27'.16''$	per α_D	della mica
2 15 50	" β_D	"
2 43 08	" γ_D	"

E aggiungendovi l'angolo calcolato di

$$55^\circ . 15' . 26''$$

corrispondente all'indice ε del quarzo, avremo per la mica

$55^\circ.42'.42''$	per α_D,
57 31 16	" β_D,
57 58 34	" γ_D.

E per conseguenza si hanno i seguenti tre indici principali della *mica di Mergozzo*:

$\alpha_D = 1{,}56188$,
$\beta_D = 1{,}59472$,
$\gamma_D = 1{,}60274$ [1],

con l'incertezza nella 5° decimale.

Essendo risultato d'indice α quasi costante per tutte le posizioni del cerchio orizzontale, ne viene che la direzione negativa a è quasi perpendicolare al clivaggio.

L'angolo degli assi ottici intorno ad a è dato dalla formola

$$\operatorname{sen} V = \sqrt{\frac{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}}{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}}}$$

(1) B. Hecht per una mica potassica di ignoto giacimento dà i seguenti indici: $\alpha_D = 1{,}5573$, $\beta_D = 1{,}5866$, $\gamma_D = 1{,}5904$; vedi Neues Jahrbuch, BB. 6, pag. 273. E secondo Ad. Matthiessen pure per una mica potassica sono: $\alpha = 1{,}5692$, $\beta = 1{,}6049$, $\gamma = 1{,}6117$ (Zeitsch. Math. Phys. 1878, 23, 187). Secondo Pulfrich pure per una moscovite di ignota provenienza: $\alpha = 1{,}5601$, $\beta = 1{,}5936$, $\gamma = 1{,}5977$ (Wiedemann Ann. 1887, 30, 499).

e perciò

$$2V_D = -51°,41 \text{ [1]}.$$

con un errore medio massimo di $\pm 30'$ ed errore probabile $\pm 18'$.

III. *Gesso delle Miniere di Romagna.*

Questo gesso in bellissimi cristalli trasparenti in forme spiccatamente asimmetriche, con figure di corrosione naturali su talune faccie, con faccie vicinali a dovizia e faccie ricurve (ossia poliedria variabile secondo Scacchi) fu donato dall'egregio ing. Cavalletti al Museo del R. Ufficio geologico insieme a cristalli di zolfo di notevole bellezza. Mentre mi propongo d'illustrare e descrivere i detti cristalli in una apposita memoria, dò qui le costanti ottiche misurate sul clivaggio perfetto (010) del gesso:

$\alpha_D = 1,52038$ ($\alpha_D = 1,5204$ pel gesso di Sicilia, C. Klein [3]))
$\beta_D = 1,52246$ ($\beta_D = 1,5229$ id.) $2V_D = +56°.30'$
$\gamma_D = 1,52961$ [2] ($\gamma_D = 1,5296$ id.)

con un errore di alcune unità nella quinta decimale per gli indici e di $\pm 25'$ al massimo per l'angolo degli assi ottici.

L'angolo degli assi ottici calcolato è

$$2V = +56°.55'.50'' \quad (2V = +63°.4 \text{ C. Klein}).$$

Il piano degli assi ottici è (010), e la direzione positiva C fa 52° con (100).

[1] L'angolo degli assi ottici varia molto per le miche potassiche. Così p. e. secondo W. I. Grailich (Sitzber. Akad. Wien 1853, 11, 46) è $2E = 50°12'$ per una mica grigia del granito di Kollin (Boemia), secondo lo stesso osservatore (Zeitsch. für Krystall. ecc., 2, 45) è $2E = 60°.12'$ per una moscovite di Rothenkopf (Tirolo) e finalmente secondo Max Bauer (Poggend. Ann. 1869, 138, 350) è $2E = 74°,36'$ per una mica di Venezia.

[2] Questi valori si avvicinano di molto a quelli determinati da Dufet pel gesso di Montmartre:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = 1,52046\\ \beta = 1,52260\\ \gamma = 1,52962\end{array}\right\}.$$

[3] C. Klein, *Optische Studien I.* Köngl. preuss. Akademie der Wiss. Sitzb. 1899, XIX, 361.

Geologia. — *Contributo allo studio del Miocene nell' Umbria.* Nota di A. Verri e G. de Angelis d'Ossat, presentata dal Socio Taramelli.

Per l'orientamento si premettono alcuni cenni sulla struttura dei sistemi montuosi dell'Umbria.

Catena occidentale della Valdichiana. — I poggi di Fighine e di Allerona, che proseguono e terminano la catena, al sud della ellissoide mesozoica costituente la montagna di Cetona, sono composti da una formazione calcareo-arenaceo-marnosa, prevalentemente marnosa, con banchi compenetrati dal manganese; la quale probabilmente appartiene all'eocene inferiore, ed alla quale è addossata una formazione arenaceo-marnosa con intercalati strati di calcari policromi, banchi di calcaree e brecciole nummulitiche del piano bartoniano. A sua volta s'addossa a questa, verso il termine della catena, una formazione di calcari policromi, di calcari marnosi bianchicci ricchi di piriti, di argille scagliose, che involgono nuclei ofiolitici. La disposizione stratigrafica generale declina verso la valle della Paglia, e le formazioni indicate si succedono a scaglioni seguendo tale inclinazione.

Catena che separa la Valdichiana dalla valle del Tevere. — La sezione che passa attraverso le ellissoidi mesozoiche perugine mostra ad occidente, a contatto dei calcari rosati della creta, una grande massa di marne. A questa si addossa una formazione arenaceo-marnosa con interpolati strati di calcari policromi, di calcari e brecciole con Orbitoidi e Nummuliti, che lo studio dei fossili riferisce all'eocene medio. Le brecciole talvolta sono composte da elementi grossi qualche centimetro, tra cui si distinguono frammenti di rocce petroselciose e diasprigne. Le ellissoidi mesozoiche ad oriente presentano testate tronche, ed alcune con serie che, dai calcari rosati della creta, scende al trias. Da questa parte il terziario cambia tipo. Si ha come ad occidente una formazione arenaceo-marnosa, ma non ci sono i banchi con Orbitoidi e Nummuliti. Invece nelle arenarie e nei calcari arenacei sta una fauna, nella quale prevale il genere *Pecten*; nelle marne abbondano i Pteropodi, che non sono stati trovati nelle ricerche sulle marne ad occidente.

Al nord delle ellissoidi mesozoiche tale formazione viene a contatto colle roccie ad orbitoidi dell'eocene medio, anzi salendo il monte Favalto, specialmente dalla valle dell'Erchi, si vedono sino al Camposanto di Monte S. Maria Tiberina i banchi con Pettini e le marne con Pteropodi declinare verso ovest, e dopo il Camposanto i banchi con Orbitoidi seguire la stessa declinazione: tantochè pare che i primi si sottopongano ai secondi. Nella sezione dei monti Cortonesi la formazione con Nummuliti declina sempre verso la

Valdichiana, ma gli strati che stanno sopra pare siano più antichi di quelli sottoposti.

Al sud delle ellissoidi perugine i gruppi di Montale e del Monterale presentano la formazione arenaceo-marnosa con strati di calcari policromi, banchi di calcari e brecciole con Nummoliti ed Orbitoidi dei piani Parisiano e Bartoniano. Attorno all'ellissoide mesozoica del monte Peglia si ritrova la massa delle marne, alle quali è addossata la formazione arenaceo-marnosa con calcari e brecciole contenenti Orbitoidi e Nummuliti. Sulla catena non si ritrovano le argille scagliose con ofioliti; invece, nei poggi di Paciano e del Monterale, sta sopra l'eocene medio una potente formazione di arenarie, nella quale fu trovato incluso un banco di ciottoli di calcari scuri, quarziti, graniti, dioriti, ecc., ecc., eguale ai banchi di cui si dirà parlando del monte Deruta.

Nelle colline e nei monti vicino Perugia, di tratto in tratto si vedono, tra la formazione marnoso-arenacea con Pettini e Pteropodi, piccoli affioramenti di calcari e marne eoceniche: la presenza di ciottoli poco arrotondati e di qualche blocco di ofiolite nei depositi vallivi — siano questi pliocenici o pleistocenici — fa supporre che tali frammenti siano stati staccati da lenti ofiolitiche comprese in quelle marne, e che oggi sarebbero sepolte.

Sperone dei monti Martani tra la valle del Tevere e la vallata di Fuligno. — Le formazioni con Orbitoidi e Nummuliti dal monte Peglia proseguono nei monti di Todi, e se ne ritrova un lembo sino presso Toscella, villaggio vicino Collazzone. Questo lembo va sotto altro di marne policrome, includenti un calcare marnoso bianchiccio con piriti — carattere che hanno i calcari delle formazioni con ofioliti. Sopra sta la formazione arenaceo-marnosa con Pettini e Pteropodi. Viene appresso il monte Deruta, nel quale alle marne con Pteropodi è addossata una grande pila di arenarie intercalate con banchi di ciottolame composto da calcari scuri, quarziti, graniti, gneiss, ecc. Nel monte Deruta si ha pure una formazione ricca di fossili, e la quale parrebbe che fosse sovrapposta alle brecce poligeniche. Interessa notare che le brecce, le quali sono incluse in questa ultima formazione, contengono anche ciottoli di calcari verdi eocenici non molto arrotondati.

Catena a sinistra della valle superiore del Tevere e della valle di Fuligno. — Sulle pendici delle montagne mesozoiche, che fiancheggiano a destra e sinistra l'ultimo tronco della Valtopina, si hanno le formazioni marnose dell'eocene inferiore, e formazioni dell'eocene medio: ma in queste più non si vedono i banchi delle arenarie e delle brecciole notate nelle montagne occidentali; bensì calcari bianchicci, color giallo-grigio o del tutto grigio, nei quali si trovano anche dei Pettini, ma sono più o meno ricchi di Orbitoidi e Nummuliti: con questo tipo dipoi l'eocene si presenta nelle valli superiori della Nera e del Farfa.

Dalla Valtopina in su frequenti sono gli affioramenti delle argille scagliose con ofioliti, e si trovano come comprese entro la formazione marnoso-

arenacea con Pettini. A partire dal monte Catria le masse mesozoiche si staccano dalla dorsale Apenninica, e questa è costituita dalla formazione anzidetta; la quale da Bocca Trabaria si vede estendere verso le Marche con le marne a Pteropodi.

Raccolti sui monti ad ovest di Città di Castello alcuni fossili nella formazione marnoso-arenacea con Pettini, furono inviati al Museo Geologico di Bologna. Il dott. Foresti giudicò che il complesso della fauna fosse miocenico [1].

Scoperte le formazioni ofiolitiche delle montagne comprendenti i bacini del Topino, del Chiascio, dell'Assino, delle Carpine, nel 1880 si emetteva l'opinione che fossero da riferire all'eocene; ponendo nel miocene le formazioni marnoso-arenacee con Pettini sovrapposte, e quelle consimili che non avevano sicuro riferimento stratigrafico [2].

Nello stesso anno il prof. De Stefani, visitata la collezione Bellucci, riferiva quei fossili al piano tortoniano [3].

Siccome la collezione Bellucci contiene fossili tratti dalla formazione marnoso-arenacea di luoghi diversi, e questa si osservava sottoposta in qualcuno alle argille scagliose con ofioliti, nel 1883 fu concluso che le ofioliti dei bacini del Topino, del Chiascio, ecc. dovrebbero, in base a tale criterio, essere considerate come mioceniche [4].

Tale conclusione non fu tenuta buona: invero era trascurato, tra altro, di considerare che l'interponimento potrebbe essere effetto di ribaltature. Riprese quindi le osservazioni, riesaminata dal Foresti la fauna inviata a Bologna, studiati dal Neviani i briozoi che l'accompagnano, nel 1893 furono ascritte al miocene solo le formazioni arenaceo-marnose dimostrate dai fossili e quelle che si trovano nettamente sopra alle argille scagliose; queste, seguendo il parere prevalente negli scenziati, furono riportate all' eocene superiore. Fu ommesso di parlare specificatamente sulla formazione marnoso-arenacea sottoposta, nella quale non era riuscito trovare nummuliti, nemmeno nelle sezioni al microscopio [5].

Dipoi, col favore della residenza, furono moltiplicate ed estese le osservazioni, le quali portarono a conoscere la presenza dei Pteropodi nelle marne,

[1] Verri, *Avvenimenti nell'interno del bacino del Tevere antico.* Atti Soc. Sc. nat. di Milano, vol. XXI, 1878.

[2] Verri, *Alcune note sui terreni terziarî e quaternarî del bacino del Tevere.* Atti Soc. Sc. nat. di Milano, vol. XXII, 1880.

[3] De Stefani, *Il Tortoniano nell'alta valle del Tevere.* Atti Soc. Tosc. di Sc. Nat. Ad. 14 Nov. 1880.

[4] Verri, *Appunti sui bacini del Chiascio e del Topino.* Boll. Soc. Geol. It. vol. II, 1883.

[5] Verri ed Artini, *Le formazioni con ofioliti nell' Umbria e nella Valdichiana.* Rend. Ist. Lom. Sc. e Let., Serie II^a, vol. XXVI, 1893.

e ne fu inviata una collezione al prof. Pantanelli; il cui parere fu che rappresentassero una fauna miocenica. Nel 1897, interessando disegnare una sezione, che dasse un'idea della struttura dell'Umbria, per la riunione della Società Geologica in Perugia — in base alle nuove osservazioni ed ai nuovi dati, persistendo negativa la ricerca delle nummuliti nelle rocce sottostanti alle argille scagliose, presentandosi quelle roccie con tipi simili alle soprastanti — fu creduto opportuno figurare l' inclusione delle argille scagliose con ofioliti tra la formazione marnoso-arenacea con Pettini come effetto di ribaltamento (1).

Nè tale conclusione era del tutto azzardata. Difatti in quella sezione si vedono, come sono di fatto, le formazioni terziarie dell' Umbria interna settentrionale costituire la vallata del Tevere incuneate tra due faglie delle formazioni mesozoiche. Gli arricciamenti che, sopratutto in masse nelle quali prevalgono le marne, devono avvenire in conseguenza della coercizione subìta in movimenti di tal natura favorirebbero l' ipotesi dei ribaltamenti; tanto più che questi di preferenza erano notati dalla parte della valle Tiberina, costituente la depressione massima.

L'ing. Lotti, incaricato dal R. Comitato Geologico del rilievo delle formazioni umbre, ha creduto venire a conclusioni diverse, e cioè che le formazioni marnoso-arenacee con Pettini e Pteropodi dell'Umbria interna settentrionale appartengano tutte all'eocene. Desume egli le ragioni sopratutto dalle osservazioni sulla stratigrafia, nella quale si vede appunto spesso quelle formazioni passare sotto alle argille scagliose con ofioliti (2).

Il Bonarelli, prof. di geologia, ecc. nell' Istituto agrario di Perugia, scrive non aversi ancora sicuro indizio di terreni miocenici nell' Umbria interna settentrionale. Non dice su quali argomenti fonda la sua opinione; anzi, compilando quella illustrazione del territorio umbro per un' opera di geologia applicata all'agricoltura, si limita ad esporre le sue idee, senza parlare delle opinioni di altri, che hanno tentato dipanare l'intricata matassa (3).

Disponendo di varî appunti presi su tutte le contrade dell' Umbria, e d'una piccola collezione raccolta su quei terreni, ci accingiamo a dire poche parole sulla quistione. Non intendiamo pel momento di trattarla in modo esteso, ma solo di rilevare che nell'Umbria vi sono formazioni, le quali, e per disposizione stratigrafica, e per criterî desumibili dai fossili, di preferenza si crederebbe inscrivere nel miocene. Ora prescinderemo dall' esame delle formazioni che, per una causa o per l'altra, si vedono sotto alle ar-

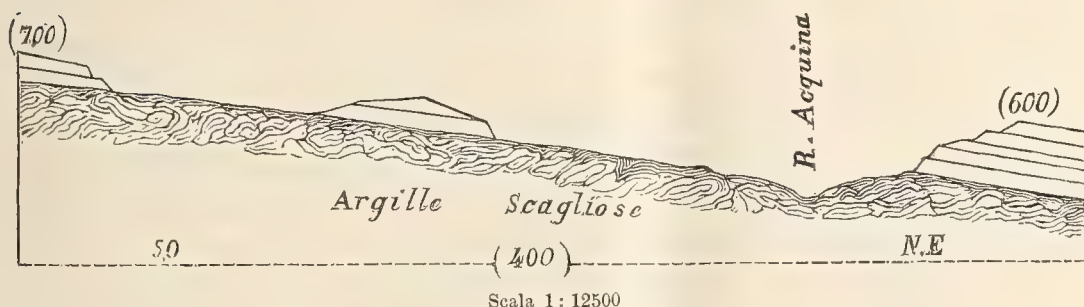
(1) Verri, *Cenni sulle formazioni dell'Umbria interna settentrionale*. Boll. Soc. Geol. Ital., vol. XVI, 1897.

(2) Lotti, *Studi sull'eocene dell'Apennino Toscano*. Boll. R. Com. Geol., 1898.

(3) Bonarelli in Parona, *Nozioni di Geologia dinamica, storica, agraria*, 1898.

gille scagliose, nelle quali può anche darsi che ulteriori studî riconoscano caratteri tali, da accertarle appartenenti all'eocene medio.

Parecchie sezioni presentano formazioni arenaceo-marnose con Pettini e Pteropodi distintamente sopra il piano delle argille scagliose. Bellissime tra altre sono una presa nella valle della Rasina, ed altra nella valle dell Acquina, circa un chilometro a monte di Carestello.

Scala 1 : 12500

In questa sezione si vedono le argille scagliose andare a nord-est sotto una pila della formazione arenaceo-marnosa, che si svolge declinando sino al piano di Gubbio; a sud-ovest posa isolato sulle argille scagliose un lembo di marne con un banco di Pettini. Più avanti seguono altri lembi, che accennano ad allacciarsi al monte Salajole ed ai poggi di Castiglione: invece là avviene la complicazione stratigrafica.

La sezione nella valle della Rasina è anche più decisiva, vedendosi lo scoglio fossilifero che sorge al bivio delle strade di Schifanoja e Casa Gastalda sulla destra della Rasina, sulla sinistra riapparire un centinaio di metri più in alto sopra l' eocene superiore, formando a C. Bagnole un lembo isolato, che si raccorda sulla sinistra del fosso Acquasanta col banco di C. San Giorgio.

Altre formazioni non hanno piano visibile di riferimento stratigrafico, ma per caratteri speciali riteniamo doversi considerare come mioceniche. Tra queste interessa notare le marne con Pteropodi tra Cesi e Sangemini, le quali rilegano al miocene dell'Umbria settentrionale alcune formazioni nel bacino della Nera, che furono indicate oligoceniche; così le brecce poligeniche che rilegano alle arenarie di Deruta quelle del Monterale, le quali furono indicate come eoceniche [1].

La raccolta di fossili, di cui disponiamo, proviene da molte località. Per questo studio però sono stati determinati solo gli esemplari che, per migliore conservazione, permettevano un sicuro riferimento specifico. Per ciascuno di questi indichiamo l' ubicazione coi numeri seguenti:

[1] Verri, *Studi geologici sulle conche di Terni e Rieti.* R. Acc. Lincei, 1882-83; Verri ed Artini, Nota citata.

1. Colle Raso, nella salita da Borgo San Sepolcro a Bocca Trabaria.

2. Città di Castello, tra la vecchia Dogana e Monte S. Maria Tiberina. (Fossili determinati p. p. dal Foresti e Neviani).

3. San Paterniano, presso Umbertide, tra le valli dell' Assino e del Musino.

4. Tra il monte Portole e Castiglione Aldovrandi, sopra alle argille scagliose con ofioliti.

5. Collemincio, nella valle dell' Arone sopra le argille scagliose con ofioliti.

6. Busche, presso Gualdo Tadino.

Presso Perugia: 7. Monte Bagnolo. 8. Monte Pacciano. 9. Fosso Piazzo di Volpe (Fossili determinati dal Pantanelli). 10. Monte Morcino vecchio. 11. Colline di Prepo. 12. Valle dell' Acquacaduta sotto Monte Tabor.

13. Fra Monte Murcie ed il Belvedere, nei monti d' Assisi.

14. Casale San Lorenzo e fosso di Castelleone, presso Deruta.

15. Molino dell' Attone e colline a destra, presso Bevagna.

16. Fosso di S. Caterina, presso Cesi.

Abbiamo fossili, che sembrano dello stesso piano geologico, anche di altre località, esse sono: Candeggio, Pieve di Saddi, Monte Analdo, Carestello, Schifanoia, Valfabbrica, Fratticciola selvatica, Torgiano, Cerqueto.

Passiamo senz' altro alla enumerazione delle forme.

Bathysiphon taurinensis Sacco. È specie abbondante nel Langhiano e meno diffusa nelle zone marnose dell' Aquitaniano e dell' Elveziano inferiore (Sacco 1893, Corti 1896) *8. 13.*

Echinolampas angulatus Mérian. *Schlier* di Camerino (de Loriol 1884). Rosignano (de Alessandri 1897). *2.*

Echinocyamus Studeri Sismd. Miocene piemontese (Sismonda 1841) Elveziano piem. (Sacco 1889) *2.*

Schizoporella linearis Hass. Fossile dal Miocene inferiore; vivente. *2.*

Micropora (sot. gen. *Rosselliana*) *Rosselli* Aud. *sp.* Fossile nel Miocene. *2.*

M. (s. g. *Calpensia*) *impressa* Moll. *sp.* Fossile dal Cretaceo; vivente. *12.*

Onychocella angulosa Reuss *sp.* Fossile dal Cretaceo; vivente. *2.*

Membranipora reticulum L. *sp.* Fossile dal Cretaceo; vivente. *2. 12.*

Osthimosia coronopus S, Wood *sp.* Miocene di Catalogna (de Angelis 1898), Miocene medio sardo (Neviani 1897). Pliocene abbondante. *2.*

Smittia cucullata Bussk *sp.* Fossile dal Miocene e vivente. *2.*

Cavolinia bisulcata Kittl. Mioc. Ungheria (Kittl. 1886) Miocene med. piem. (Audenino 1897). *2. 9.*

Clio pedemontana May *sp.* Mioc. Piem. (Michelotti 1841, Audenino 1897) Mioc. med. e sup. Piemonte (Bellardi 1872). Mioc. med. Lazio (de Angelis 1898) Langhian. Toscana (Trabucco 1895). Mioc. Ungheria (Kittl. 1886) *9. 11.*

Clio Bellardi Aud. Miocene med. Piemont. (*Auct.* 1897). *9*

Clio triplicata Aud. Mioc med. Piemont. (*Auct.* 1897). *9.*

Clio sinuosa Bell. sp. Mioc. med. Piemont. (Bellardi 1872). *9. 15. 16.*

Vaginella depressa Daudin. Mioc. med. Piemont. (Bellardi 1872). Mioc. med. Lazio (de Angelis 1898). Mioc. med. Francia (Benoist 1889). Pliocene Roma (Ponzi 1876). Vivente Mediterraneo (Tiberi 1880). *2. 9. 16.*

Vaginella acutissima Aud. Mioc. med. Piemont. (*Auct.* 1897). *2. 9. 15. 16.*

Carinaria Hugardi Bell. Mioc. med. Piemont. (Bellardi 1872). Mioc. med. Lazio (de Angelis 1897). *9.*

Teredo norvegica Spleng. Alcuni frammenti, sempre con determinazione empirica, si potrebbero riferire alla *T. appenninica*. Frequente anche nei terreni miocenici. *2. 3. 15.*

Modiola Brocchi May. Mioc. bacino Vienna (Hörnes M. 1870). *14.*

Lucina pomum Duj. Mioc. Brisighella e Bologna (Manzoni 1876) Langhiano prov. Forlì (Scarabelli 1880), Elveziano, Sicilia (Cafici 1880), Elvez. Dicomano (de Stefani 1880); molte altre località mioceniche italiane (Gioli 1887). *14.*

Lucina Dicomani Mengh. sp. È citata in moltissime località mioceniche italiane (de Stefani 1891). *6. 14.*

Lucina globulosa Desh. Alcuni vogliono questa specie sinonimo della precedente (Fuchs). Frequente nel Miocene medio (Schaffer 1898) *6. 14.*

Lucina miocenica Michtti. Tortoniano e Tongriano Piemonte (Sacco 1889) Miocene Calabria e Messina (Seguenza 1880). In Sicilia con la *Cardita Jouanneti* (de Gregorio 1883). Mioc. sardo (Parona 1887). Bacino Vienna (Hörnes 1870). *14.*

Limea strigilata Broc. sp. Mioc. Calabria (Seguenza 1880), Marche (de Angelis-Luzj 1899). Mioc. Vienna (Hörnes). Pliocene profondo (Brocchi, Pantanelli). *11.*

Pecten latissimus Broc. Comparve nell' Elveziano ed è vivente (Parona 1887). *2.*

Pecten Besseri Andr. Elvez. Piement. (Sacco 1889). Mioc. Vienna (Hörnes 1870). *2. 12.*

Pecten solarium Lk. Miocene di Reggio C. (Seguenza 1880), di Montese (Pantanelli e Mazzetti 1887), di Sardegna (Parona 1887), di Corsica (Locard 1876), di Vienna (Hörnes 1870) ecc. *2.*

Pecten scabrellus Lk e *var.* Le varietà corrispondono a quelle frequenti nel Miocene e somiglianti a quelle del Mioc. di Barcellona (Almera 1897). *2. 12.*

Spondylus crassicostata Lk. Elveziano piemontese e calabro. Miocene medio Sardo-corso (Sacco, Seguenza, Parona, Locard) *2.*

Ostrea plicatula Gmel. Elvez. Piemontese (Sacco). *2.*

Ostrea langhiana Trab. Una piccola ostrica, molto abbondante, deve riferirsi a questa specie, che Trabucco (1895) crede caratteristica del Langhiano. Nello *Schlier* delle Marche (de Angelis e Luzj). *1. 4. 7. 10.*

Nella località *14* furono altresì rinvenuti anche Gasteropodi, ma lo stato di conservazione non concede una sicura determinazione.

Le sezioni microscopiche delle marne indurite costantemente mostrano abbondanti foraminiferi, fra i quali predominano specialmente le *Globigirinidae.*

A noi sembra che la fauna determini sicuramente il Miocene medio. Infatti delle forme citate, solo alcuna fu pure esumata in terreni eocenici, mentre che tutte furono già riconosciute nel Miocene medio: un piccolo numero visse nel Pliocene e taluna è ancora vivente. Se non teniamo conto dei Briozoi, i quali godono di non preciso valore cronologico, noi otteniamo una fauna miocenica tipica, come può desumersi specialmente dalle forme: *Bathysiphon taurinensis, Cavolinia bisulcata, Clio pedemontana, C. sinuosa, Carinaria Hugardi, Lucina pomum, L. Dicomani, Pecten Besseri, P. solarium, Ostrea langhiana.* Anche le seguenti specie furono descritte come appartenenti finora al Miocene medio: *Clio Bellardi, C. triplicata, Vaginella acutissima.*

Considerando la fauna fossile in relazione col materiale sedimentario che l'include, non è difficile riconoscere che la *facies* langhiana è quella che predomina nell'Umbria; cioè la zona profonda del mare miocenico, che corrisponde allo *Schlier.* Non mancano però sedimenti e fossili che attestano la zona delle laminarie, caratterizzati faunisticamente dai grossi Briozoi e dagli svariati Pettini. È un calcare che ricorda quello a *Cellepora* delle Marche e della Romagna equivalente a quello di Rosignano e che corrisponde all'Elveziano. Secondo alcuni questo piano sarebbe sincrono al calcare di *Leitha* del bacino di Vienna, mentre per altri, fra cui il Depéret (1893) e lo Schaffer (1898), corrisponderebbe agli strati di Grund.

In tal modo il Miocene medio dell'Umbria, per caratteri litologici e paleontologici, verrebbe non solo ad estendere lo *Schlier* delle Marche e del Bolognese, ma collegherebbe queste ben conosciute regioni mioceniche con quelle del versante Tirreno.

Paleontologia. — *Una nuova località di Ellipsoidica ellipsoides.* Nota del dott. A. Silvestri, presentata dal Socio Taramelli.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Anatomia. — *Ricerche sugli organi biofotogenetici dei pesci.* Parte I. *Organi di tipo ghiandolare.* Nota preliminare di P. Chiarini e M. Gatti, presentata dal Socio Grassi.

Gli organi fosforescenti o, come noi preferiamo denominarli, gli organi biofotogenetici dei pesci, dei quali sarà fatta parola in questa Nota, furono già studiati dal Leuckart, dall' Ussow, dal Leydig, dal Solger, dall' Emery e dal Lendenfeld. Senza fare la critica degli studi di questi autori, che ci riserbiamo per il lavoro in esteso, diamo subito una breve relazione delle nostre ricerche, e delle conclusioni, che ci pare, se ne possano trarre (1).

Gli organi biofotogenetici sono stati da noi studiati in quasi tutte quelle forme della Ittiofauna mediterranea, che ne sono provviste, e precisamente in sei rappresentanti delle Fam. *Sternoptychidae (Maurolicus amethystino-punctatus Cocco, Maurolicus Poweriae Cocco, Argyropelecus hemigymnus Cocco, Coccia ovata Cocco, Chauliodus Sloani Bl., Gonostoma denudatum* (*Rafn.*)), in due specie della Fam. *Stomiatidae* (*Stomias boa* (*Risso*), *Bathophilus nigerrimus Gigl.*), in dieci specie della Fam. *Scopelidae* (*Scopelus Rissoi, Benoiti, caninianus, metopoclampus, Rafinesquii. Gemellari, maderensis, crocodilus, elongatus, Humboldii*). Ci siamo occupati anche del *Porichthys porosissimus* (*Cuv. e Val.*) *Gntz*, un *Batrachidae*, che come si sa, non fa parte della fauna dei nostri mari.

Nelle nostre ricerche ci siamo proposto 1) di venire ad una esatta conoscenza della struttura delle varie forme di organi biofotogenetici; 2) di seguirne lo sviluppo embriologico; 3) di determinare a quali altri organi cutanei dei pesci ossei ordinari fossero essi più affini o, per dirla più brevemente, quale potesse essere il loro significato morfologico.

Prima di parlare della struttura di questi organi, è bene stabilirne la funzione. Ci si domanderà: Sono essi davvero capaci di emettere luce? e se sono tali, la funzione è esclusivamente questa? Alla prima domanda non si può non rispondere di sì, chè per gli *Scopelus* possediamo, fra le altre, la osservazione dell' ittiologo Günther, la cui autorità è sì grande. da farci accogliere con piena fiducia l'affermazione che le così dette macchie splen-

(1) Dandoci a studiare gli organi biofotogenetici dei pesci, il prof. Grassi mise a nostra disposizione il ricco e prezioso materiale da lui medesimo raccolto nelle acque di Sicilia, ed ottimamente conservato in formalina; e ci comunicò in pari tempo alcune sue osservazioni inedite sulla funzione degli organi in discorso. Noi gliene rendiamo i più sentiti ringraziamenti; e gli esprimiamo la più viva gratitudine per la benevolenza con la quale ci ha accolto nel suo laboratorio, e per aver egli diretto le nostre ricerche e controllatone i risultati.

denti hanno la proprietà di produrre luce; e per ciò che riguarda gli *Sternoptychidae*, tacendo di altri zoologi, il prof. Grassi constatò di persona la luminosità di cui sono capaci gli organi dell'*Argyropelecus hemigymnus* e del *Chauliodus Sloani*. La sua osservazione, comunicataci verbalmente, fu fatta sopra vari esemplari, che ebbe la fortuna di aver vivi per qualche minuto in un vaso di vetro. La luce era azzurra e intermittente. Morto l' animale, gli organi cessarono immediatamente di emettere luce. Vedremo in seguito che gli organi biofotogenetici presentano nelle varie forme di pesci, in cui li abbiamo studiati, differenze di struttura che ci permettono di raggrupparli in due tipi differenti, all'uno dei quali appartengono quelli degli *Sternophychidae*, degli *Stomiatidae* e del *Batrachidae*; all'altro quelli degli *Scopelus*. Essendo stata accertata con sicurezza la luminosità nei due tipi, noi, per ragioni di somiglianza di struttura, riterremo per organi veramente biofotogenetici quelli di tutte le altre forme, a proposito delle quali mancano le osservazioni dirette, o queste non sono del tutto sicure. All' altra domanda, che ci siamo fatta in principio, rispondiamo alla fine di questa Nota.

Gli organi biofotogenetici dei pesci da noi esaminati, sono costruiti secondo due tipi, che si presentano affatto differenti, almeno a sviluppo completo. Il primo denominiamo degli *organi biofotogenetici ghiandolari*; il secondo, degli *organi biofotogenetici elettrici*.

Organi biofotogenetici ghiandolari. Si riscontrano in tutti gli Sternoptichidi e Stomiatidi, che abbiamo avuto a nostra disposizione, e nel *Porichthys porosissimus*. Essi hanno generalmente la forma di una ampolla, nella quale si possono distinguere un *corpo* sferico od elissoidale ed un *collo* cilindrico o imbutiforme. Il corpo è dorsale mediale, il collo ventrale laterele; l' asse longitudinale dell' organo è inclinato in guisa che il corpo è rivolto, rispetto all'animale, rostralmente, e il collo caudalmente. Questa posizione è la regola, ed è della massima importanza, perchè serve a far luce sulla morfologia dell' organo. In una sezione longitudinale dell'ampolla condotta in modo che vi siano compresi corpo e collo, si vede che essa è costituita, andando dalla superficie verso il centro, delle seguenti parti: 1) *un involucro pigmentato*, 2) *uno strato a splendore argenteo*, 3) *un involucro di tessuto connettivo*, 4) *un corpo centrale*.

Le prime tre parti formano la parete dell' ampolla, che è approfondata nel corpo dell' animale. Alla superficie di questo è visibile soltanto l' imboccatura del collo, la quale, attraverso un sottile strato di tessuto connettivo gelatinoso ond'è chiusa, lascia scorgere un po' del corpo centrale. L' involucro pigmentato, lo strato a splendore argenteo ed il rivestimento connettivale possono essere ridotti ai minimi termini; il corpo centrale invece assume sempre uno sviluppo considerevole, È quindi naturale e legittimo il pensiero che esso sia la parte essenziale o specifica degli organi. Vediamone breve-

mente la costituzione, Risulta in generale di due parti: l'una che riempie il corpo dell' ampolla, l' altra che ne occupa il collo. La prima è fatta di cellule tipicamente granulose, con uno o due nuclei. che non senza difficoltà si riesce a mettere in evidenza e che sono circondati da una zona di protoplasma più o meno estesa e colorabile con ematossilina, carminio ecc.; e con il resto del protoplasma, occupato da granulazioni o goccioline splendenti più o meno fine e che si tingono con l' eosina, l' acido picrico, ecc. La seconda porzione del corpo centrale è costituita da cellule a protoplasma denso, apparentemente omogeneo, che si colora poco con l' eosina, e racchiude un nucleo bene evidente.

Per la disposizione e la struttura degli elementi costitutivi del corpo centrale, gli organi biofotogenetici ghiandolari vengono da noi divisi in tre gruppi principali.

Ad un primo gruppo appartengono quelli del *Maurolicus amethystino-punctatus*, dell' *Argyropelecus hemigymnus* e del *Porichthys porosissimus*. Notiamo anzitutto che la maggior parte degli organi delle due prime forme hanno la tendenza a fondersi; e sono i corpi delle ampolle che si fondono, mentre i colli si conservano sempre bene distinti. La fusione si osserva specialmente negli organi ventrali, e interessa non solo quelli di un lato ma anche i corrispondenti del lato opposto; e ne deriva che i corpi delle ampolle di due serie parallele di organi sono rappresentati da un unico grosso canale, il quale scorre lungo la linea mediana della parete inferiore dell' addome. Caratteristiche di questo gruppo sono 1) che le cellule granulose, a contorni irregolarmente poligonali in sezione, non sono molto grandi, e, circondate da una trama connettivale bene sviluppata, non presentano una disposizione regolare; 2) che le cellule a protoplasma apparentemente omogeneo del collo, sempre un po' più piccole delle granulose, sono o tutte simili fra di loro (*Maurolicus, Porichthys*) o di due sorta (*Argyropelecus*). Nell'uno e nell' altro caso, tendono a disporsi, come appaiono sui tagli, in travate, che decorrono in senso obliquo o parallelo all' asse longitudinale del collo (*Maurolicus*) oppure in senso obliquo o trasversale (*Argyropelecus*). Abbiamo detto che le cellule granulose presentano una disposizione irregolare: dobbiamo però aggiungere che, in vicinanza della parte prossimale del collo, esse si mostrano frequentemente in semicerchi nel *Maurolicus* e in cerchi concentrici nell'*Argyropelecus*. Da questo gruppo di organi, si passa ad un altro anch'esso del tipo ghiandolare, ma dove la disposizione degli elementi è regolarissima. E siccome questa è tipicamente radiale, e gli elementi cellulari assumono enormi dimensioni, così, in contrapposto agli organi del primo gruppo, i quali potremo chiamare *a cellule piccole e poste senz'ordine evidente*, noi denomineremo questo secondo gruppo degli:

Organi biofotogenetici ghiandolari a cellule grandi ed a disposizione radiale. Sono quelli della *Coccia ovata*, del *Maurolicus Poweriae*, del

Chauliodus Sloani, dello *Stomias boa* e del *Bathophilus nigerrimus*. Il corpo dell'ampolla è sferico. Dal suo involucro di connettivo partono sepimenti della stessa natura, che vanno fino al centro, dove si incontrano e si congiungono: e da ciò deriva che tutta la sezione del corpo dell' ampolla presenta un aspetto raggiato. In ciascuna camera deliminata dal connettivo si annida una grossa cellula piramidale molto allungata con l' apice al centro e la base alla periferia dell' organo. Di queste cellule una piccola porzione che è basilare, si tinge abbastanza intensamente con tutti i colori nucleari ed è cosparsa di vacuoli; il rimanente assorbe con avidità l'eosina, l'acido picrico e simili colori, ed è pieno di granulazioni, talvolta così grandi, da meritare il nome di goccioline. Quasi al limite fra le due parti, ma sempre nella prima, si riesce a mettere in evidenza uno o più spesso due piccoli nuclei nucleolati. Nelle sezioni condotte pel centro dell'organo e trattate con ematossilina ed eosina, il corpo centrale appare come un disco, nel quale si distinguono una zona marginale, fortemente colorata dall'ematossilina, con i nuclei collocati tutti presso a poco al medesimo livello; ed una centrale, più grande granulosa e tinta in rosa dall' eosina. Così come l' abbiamo descritto, si presenta una parte del corpo centrale in tutti gli organi di questo secondo gruppo. E noi tralasciamo ogni particolarità, per accennare all'altra sua porzione, composta di cellule a protoplasma omogeneo, che nella solita celorazione con ematossilina ed eosina, prende per lo più una tinta giallo pallida, tendente al verdognolo. Essa occupa solamente tutto il collo (*Coccia*) o una porzione di questo, mentre arriva ad invadere un segmento del corpo sferico, presentandosi sotto la forma di clava *nel Maurolicus Poweriae* o di lente biconvessa *nel Chauliodus*. Il resto del collo cilindrico è riempito da cellule granulose, in tutto simili a quelle che abbiamo descritto nel corpo dell'ampolla.

Ciò basti per il secondo gruppo, chè ci pare di sentire il lettore domandarci con quali criteri riteniamo per ghiandole organi così caratteristici; e descriviamo rapidamente un terzo gruppo di organi, che dà la chiave della spiegazione. Il terzo gruppo è stato da noi studiato nel *Gonostoma denudatum*. Il corpo centrale si divide in due parti: una sferica che occupa il corpo dell' ampolla, l' altra piriforme situata nel collo. La loro struttura è identica. Esse risultano costituite di tubi conici di connettivo disposti in senso raggiato con l' apice verso il centro e la base verso la periferia dell' organo. I tubi sono pieni di cellule che ne tappezzano le pareti, lasciando nell' asse del tubo un piccolo condottino capillare. Tutti i condottini dei tubi che costituiscono la parte sferica del corpo centrale, mettono capo a una cavità, che si trova nel centro dell' organo ed è rivestita da un epitelio di cellule quasi cubiche, le quali presentano un margine cuticulare evidente. Da questa cavità centrale parte un canale, rivestito da elementi simili a quelli della cavità medesima, il quale si dirige verso il collo dell' ampolla

e percorre in tutta la sua lunghezza la porzione piriforme del corpo centrale. In questo canale, del quale non è possibile trovare uno sbocco all' esterno dell' organo, immettono i condottini dei tubi, che costituiscono la porzione piriforme del corpo centrale. Importante si è che, entro il canale collettore, ci è riuscito più volte di vedere accumulato un secreto, in forma di una massa omogenea o granulosa, che si tinge fortemente coll' eosina e con l' acido picrico. Le cellule presentano anche qui due zone: l' una, appoggiata alla parete del tubulo, è colorabile con reagenti nucleari ed è fornita di nucleo; l' altra, rivolta verso il lume del condottino, si tinge invece con l' eosina. Sulla natura ghiandolare di questi organi ci pare dunque che non si possa sollevare alcun dubbio. Il secreto viene elaborato dalla porzione della cellula ove è il nucleo, si raccoglie nell' altra che è avida di eosina, e poi fuoriesce sboccando nel condottino.

Per ciò che riguarda il primo e il secondo gruppo, noi non abbiamo riscontrato il secreto extracellulare: anzi, basandoci sul numero grandissimo di preparati fatti, affermiamo in modo assoluto che non vi si trova mai. Nonostante questo fatto e le differenze di forma e dimensioni che a primo aspetto possono colpire l'osservatore, dopo un attento esame si giunge facilmente alla conclusione che la parte specifica di tutti gli organi dei tre gruppi presenta una struttura simile. E fondandoci appunto sulla identità di struttura e sull' avidità che ha sempre una porzione della cellula per l' eosina, per l' acido picrico e per simili colori, riteniamo come secernenti le cellule granulose, che abbiamo imparato a conoscere nei tre gruppi. La differenza essenziale fra gli organi ghiandolari dei due primi gruppi e fra quelli del terzo, consiste nel fatto, che negli uni il secreto rimane sempre intracellulare e dentro le cellule stesse si consuma, mentre che negli altri diventa extracellulare e si consuma fuori delle cellule. Si tratta però in tutti i casi di *ghiandole chiuse*.

Chiarita l' importanza e la funzione di una parte del corpo centrale, ci rimane a spiegare quale sia l' ufficio dell' altra, e precisamente di quell' insieme di cellule a protoplasma omogeneo, che abbiamo visto occupare in generale il collo dell' ampolla. Intanto essa manca nel *Gonostoma denudatum*. Dobbiamo perciò considerarla come una parte accessoria nella produzione del fenomeno luminoso. Potrebbe venire il sospetto che fosse dovuta alla trasformazione regressiva delle cellule granulose; oppure che fosse destinata alla produzione di una speciale sostanza, che, unendosi all' altra segregata dalle cellule granulose, desse luogo all' emissione della luce. Questo secondo sospetto viene subito allontanato, pensando all' omogeneità del protoplasma, ed al fatto che il secreto delle cellule granulose si consuma, come è stato assodato, dentro le cellule che lo producono. L'altro sospetto viene anch'esso rimosso, riflettendo, 1) che noi non abbiamo trovato figure

cariocinetiche; 2) che in centinaia di preparati abbbiamo osservato sempre la medesima apparenza negli elementi costitutivi, nel loro insieme e nella loro posizione; 3) che gli organi biofotogenetici del *Pyrosoma* risultano di un semplice ammasso di cellule secernenti, entro le quali dovrà consumarsi il secreto durante la funzione, e mancano di ogni traccia di cellule con protoplasma omogeneo. E allora, quale funzione potranno avere queste cellule? Noi siamo d' avviso che esse servano come una lente; e ciò ne viene suggerito sopra tutto dall' omogenità del protoplasma, dalla loro posizione, dalla forma ecc. Gli organi del *Gonostoma*, che ne sono sprovvisti, hanno in compenso il secreto extracellulare, che viene raccolto in gran quantità entro il canale collettore, il quale lo porta fin presso l' imboccatura del collo, inoltre l' involucro di pigmento lascia allo scoperto una maggiore porzione dell' organo, il che non avviene nel primo e nel secondo gruppo.

Per ciò che riguarda le altre parti accessorie, l' involucro pigmentato servirebbe ad impedire la dispersione dei raggi luminosi; lo strato a splendore argenteo dirigerebbe i raggi luminosi verso l' imboccatura del collo.

Così tutto sarebbe disposto in modo, da favorire negli organi ghiandolari la produzione del fenomeno luminoso.

Anatomia. — *Ricerche sugli organi biofotogenetici dei pesci. Parte II. Organi di tipo elettrico. Parte III. Sviluppo.* Nota preliminare di M. Gatti, presentata dal Socio Grassi.

Anatomia. — *Osservazioni sopra l' anatomia degli Pseudoscorpioni.* Nota del dott. Felice Supino, presentata dal Socio B. Grassi.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Blaserna, relatore, a nome anche del Socio Beltrami, legge una Relazione sulla Memoria del prof. N. Pierpaoli intitolata: *Coefficienti di temperatura dei coristi normali dell' Ufficio centrale pel corista uniforme.*

Il Socio Capellini, relatore, a nome anche del Socio Taramelli, legge una Relazione sulla Memoria del dott. P. E. Vinassa de Regny intitolata: *Studî sugli Idroidi fossili appartenenti alle Idractinie.*

Ambedue le precedenti Relazioni concludono col proporre l' inserzione dei lavori negli Atti accademici.

Le conclusioni delle Commissioni esaminatrici, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Blaserna presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci Lorenzoni, Jordan, e dai signori Battelli e Stefanini, Favaro, Fritsche, Beguinot.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 4 giugno 1899.

Albert Ier de Monaco. — Exploration océanographique aux régions polaires. Paris, 1899. 8°.

Id. — Première campagne scientifique de la Préncesse-Alice IIe. Paris, 1899. 4°.

Alberti V. — Riassunti decadici e mensuali delle osservazioni meteorologiche fatte nel r. Osservatorio di Capodimonte negli anni 1896-99. Napoli, 1897/9. 8°.

Angelitti F. — Formole e teoremi relativi all' ellissoide terrestre e calcolo nell' ellissoide di Bessel di alcuni elementi per la latitudine di Capodimonte. Napoli, 1898. 8°.

Beguinot A. — *Herbarium Camillae Doriae.* II. Prodromo ad una flora dei Bacini Pondino ed Ausonio e del versante meridionale dei monti limitrofi (Lepini-Ausoni). Genova, 1897. 8°.

Bertelli A. e *Stefanini A.* — Ricerche crioscopiche ed ebullioscopiche. Pisa, 1899. 8°.

Botti U. — Dei piani e sotto-piani in geologia. 2a ediz. Reggio Calabria, 1899. 8°.

Boussinesq J. — Complément à une étude récente concernant la théorie de la bicyclette etc. Paris, 1899. 4°.

Ciscato G. — Determinazioni di latitudine e di azimut fatte alla Specola di Bologna nei mesi di giugno e luglio 1897. Venezia, 1899. 4°.

Contarino F. — Determinazioni assolute della componente orizzontale della forza magnetica terrestre fatte nel R. Osservatorio di Capodimonte negli anni 1893-97. Napoli, 1898. 8°.

Id. — Determinazioni assolute della inclinazione magnetica del R. Osservatorio di Capodimonte eseguite negli anni 1896-97. Napoli, 1898. 8°.

Favaro A. — Intorno alle opere scientifiche di Galileo Galilei nella edizione nazionale. Venezia, 1899. 8°.

Fritsche H. — Die Elemente des Erdmagnetismus für die Epochen 1600, 1650, 1700, 1780, 1842 und 1885 und ihre saeculären Aenderungen etc. St. Petersburg, 1899. 8°.

Lorenzoni G. — L'effetto della flessione del pendolo del tempo della sua oscillazione. Venezia, 1897. 8°.

Nobile A. — Appunti sul moto del sole fra le altre stelle. Napoli, 1897. 8°.

Report on Norwegian Marine Investigations 1895-97 (Bergens Museum). Bergen, 1899. 4°.

Roberto G. — Teoria della grandine e dei temporali accompagnati da trombe. Torino, 1899. 8°.

Rogers H. H. — The universe. A new Cosmology. Buffalo, 1899. 8°.

Studî e ricerche istituite nel Laboratorio di Chimica Agraria della R. Università di Pisa. Fasc. 14° e 15°. Pisa, 1897, 1898. 8°.

Tedeschi V. — Variazioni delle declinazione magnetica osservate nella R. Specola di Capodimonte negli anni 1893-97. Napoli. 18978/9. 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 giugno 1899.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica terrestre. — *Riassunto della sismografia del terremoto del 16 novembre 1894.* Parte 1ª: *Intensità, linee isosismiche, registrazioni strumentali.* Nota del Corrispondente A. RICCÒ.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Zoologia. — *Ancora sulla malaria.* Nota preliminare del Socio B. GRASSI.

Siccome non era facile di continuare le ricerche all'ospedale, perchè i Ditteri succhiatori di sangue con cui ci restava di sperimentare non si prestano facilmente a pungere, come gli Anofeli, applicandoli alla cute per mezzo di provette, così ho trovato opportuno di condurre a Maccarese nella villetta del Principe tre malarici: uno della pratica privata con gameti terzanari nel sangue (terzana comune) e due dell'ospedale di S. Spirito (gentilmente concessimi dai colleghi Bignami e Bastianelli); l'uno con gameti terzanari (terzana comune) e l'altro con gameti in parte terzanari (terzana comune) e in parte semilunari (terzana estivo-autunnale). Soltanto il primo e il terzo poterono essere usufruiti, perchè già al primo giorno i gameti scomparvero dal sangue del secondo. Tutte le zanzare, che accorrevano a pungerli venivano raccolte in vasi, che si mettevano in petto per tenerli a temperatura sufficiente fino al momento in cui si potevano passare nel termostato. Si fece così una serie di esperienze che a suo tempo verranno riferite in esteso. Qui ci basta dire che i *Culex* esaminati superarono il centinaio e tra essi erano

rappresentate le specie *annulatus*, *Richiardii*, *pulchritarsis*, *penicillaris*; *albopunctatus*, *nemorosus*, *pipiens*, *ciliaris* e *malariae*. Nessuno di essi si infettò; invece si infettarono, e per lo più molto, quasi tutti gli *Anopheles* in gran parte *bifurcatus*, in piccola parte *claviger*, che punsero nelle medesime condizioni. Così pure si infettarono contemporaneamente quattro *A. claviger*, nati in laboratorio, che avevano punto i due malarici, nelle medesime condizioni suddette.

Esperimenti simili fatti con due *Phlebotomus* e con *ventidue* serapiche (nome volgare, il quale indica un genere di ditteri ematofagi, che non ho potuto ancora determinare) diedero del pari risultato negativo.

Questi fatti inducono a ritenere con fondamento che la malaria umana sia dovuta esclusivamente agli *Anopheles*.

Certamente non sarà inutile di fare nuovi esperimenti coi *Culex* e io stesso sto facendoli, nonostante che nutra poca fiducia di poter modificare il giudizio sopra espresso.

Il malato suddetto, infetto di gameti terzanari e estivo-autunnali, venne punto anche da cinque *Anopheles pseudopictus* (1); quattro di essi si infettarono. Cinque altri *pseudopictus* presi nella stessa località e che non avevano punto individui malarici, non si presentarono infetti.

Colla dimostrazione che anche l'*A. pseudopictus* propaga la malaria, resta provato che *tutte le specie italiane* del genere *Anopheles* propagano la malaria. Ed è ben lecito indurne che *tutte le specie* di *Anopheles* di qualunque paese possano essere malariferi, date le condizioni opportune di temperatura.

In Italia l' *Anopheles claviger* è certamente la forma di gran lunga più diffusa delle altre. L'*Anopheles bifurcatus* vive a gran preferenza nelle macchie, ed è certamente fattore precipuo della malaria, che si prende nei boschi. L'*Anopheles pictus* (2), detto meglio *superpictus*, l' *Anopheles pseudopictus* sono molto poco comuni tranne in certe località.

L' esperimento, riferito nell' ultima Nota, di far pungere individui sani con *Anopheles* di diverse specie nati nel laboratorio di Anatomia Comparata e perciò non infetti, venne proseguito con molto zelo. Un altro individuo si prestò a farsi pungere. I risultati furono sempre negativi. Questo esperimento

(1) Forse l'*A. pictus* del Ficalbi è identico all'*A. pseudopictus* Grassi.

(2) Sono venuto nella convinzione che l'*A. pictus*, da me descritto, è differente da quello di Loew sopratutto per la diversa distribuzione dei colori nelle ali. Quello di Loew in realtà si avvicina assai al mio *pseudopictus*: questo è caratterizzato sopratutto dal terzo paio di tarsi, nel quale il penultimo articolo è completamente bianco-paglia sì nel maschio che nella femmina. A suo tempo ne darò la descrizione in esteso. Occorre perciò cambiare nome al mio *A. pictus* e denominarlo *A. superpictus* (*mihi*).

però si continua ancora oggi nelle migliori condizioni desiderabili, con larve e ninfe provenienti dai luoghi più malarici delle Maremme Toscane, della Campagna Romana e delle Paludi Pontine, larve e ninfe, le quali si sviluppano in acqua e vegetali raccolti insieme ad esse.

Le uova di *A. claviger*, in una camera tenuta alla temperatura variabile da 20° a 25°, impiegarono circa trenta giorni a diventare insetti perfetti. Questi, dopo altri venti giorni, depositarono le uova.

L'*A. claviger* e lo *pseudopictus* ovificano in primavera in luoghi dove l'acqua è piuttosto profonda, sicchè, per raccoglierne le larve, in generale occorre entrare nell'acqua oltre al ginocchio. Dalla fine di maggio in poi ho trovato larve dove l'acqua era alta pochi centimetri.

L'*A. bifurcatus* depone le uova in luoghi dove l'acqua è piuttosto bassa, sicchè quando non fa caldo, se si trovano larve in acque aventi pochi centimetri di profondità, si è quasi sicuri che appartengono agli *A. bifurcatus*.

Si noti che le uova si dispongono quasi a stella, e che le larve sono caratterizzate dalle setole semplici degli angoli anteriori del capo, le quali sono invece fatte ad alberetto nell'*A. claviger*.

Gli *A. pseudopictus* e *superpictus* ovificano quasi nelle stesse località preferite dall'*A. claviger*.

In vita libera gli *Anopheles* ovificano soltanto nelle acque ricche di vegetazione; gli *A. claviger* preferiscono molto i punti dove abbondano le Confervoidee. Nelle acque coperte di *Lemna* non ho mai trovato larve. Le larve di *A. bifurcatus* si trovano molto abbondanti nelle acque in cui prospera il crescione.

Basta un piccolo movimento dell'acqua per sparpagliare le uova di *A. claviger* e *bifurcatus*; ciò spiega in parte il fatto che di regola le larve di *Anopheles* si trovano isolate.

Ho trovato larve dei vari Anofeli anche lungo le rive, abbondanti di vegetazione, di acque poco mobili.

Le larve di *A. claviger* prosperano anche nell'acqua leggermente salmastra: ciò ho osservato a Metaponto.

Ho trovato uova di *A. claviger* in vita libera per la prima volta il 12 febbraio. Dopochè mi sono accorto della difficoltà di trovare le larve, ho sospettato che possano trovarsi anche nei mesi invernali, molto più che d'inverno accade di tanto in tanto di trovare degli Anofeli colle uova mature.

Le generazioni degli *Anopheles* si succedono *irregolarmente*, sicchè dalla fine di marzo in poi ho sempre trovato larve di differentissime dimensioni. Il loro numero andò sempre crescendo.

Matematica. — *Un teorema sulle varietà algebriche a tre dimensioni con infinite trasformazioni proiettive in sè.* Nota del prof. GINO FANO, presentata dal Socio CREMONA.

È noto che ogni curva algebrica, la quale ammetta un gruppo continuo ∞^1 di trasformazioni proiettive in sè, è razionale. E così pure è razionale ogni superficie algebrica, la quale ammetta un gruppo continuo *transitivo* (e perciò almeno ∞^2) di trasformazioni proiettive (1).

In questa Nota io mi propongo di dimostrare che anche per le varietà algebriche a tre dimensioni sussiste la proposizione analoga alle precedenti; vale a dire che *È razionale ogni varietà algebrica a tre dimensioni, la quale ammetta un gruppo continuo transitivo* (e quindi almeno ∞^3) *di trasformazioni proiettive* (2).

Ci varremo a tal uopo della proposizione seguente: *È razionale ogni varietà algebrica a tre dimensioni la quale contenga una congruenza razionale e del 1° ordine di curve razionali, dotata di superficie unisecante* (questa superficie potendo anche ridursi a una linea, ovvero a un solo punto). Una tal varietà può infatti rappresentarsi birazionalmente sullo spazio S_3, riferendo la congruenza considerata a una stella di rette di questo spazio, e rappresentando ogni curva di quella congruenza sul raggio corrispondente di questa stella, in modo che alla superficie unisecante della congruenza corrisponda il centro della stella (3).

Sia dunque V una varietà algebrica a tre dimensioni, G un gruppo proiettivo dello spazio a cui questa varietà appartiene; e supponiamo che il gruppo G trasformi in sè questa varietà, e sia transitivo rispetto ad essa.

(1) Enriques, *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse* (Atti del R. Ist. Veneto, ser. 7ª, t. IV e V, 1893); Fano, *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1° sem., 1895).

(2) La determinazione, già effettuata, di tutti i *tipi* di gruppi cremoniani continui dello spazio S_3 (Enriques-Fano, *I gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio.* Annali di Matem., ser. 2ª, t. XXVI; Fano, *I gruppi di Jonquières generalizzati.* Mem. della R. Acc. di Torino, ser. 2ª, t. XLVIII. 1897-98) permetterà perciò di assegnare anche per le varietà algebriche a tre dimensioni con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sè, un numero finito (e precisamente $=16$) di tipi determinati, tali che quelle varietà possano tutte riferirsi birazionalmente a una di queste ultime, in modo che si conservi il carattere proiettivo delle loro trasformazioni.

(3) Enriques, *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un' equazione algebrica* $f(x\,y\,z)=0$ *con funzioni razionali di due parametri* (Math. Ann., t. XLIX, pag. 20).

Sia anzitutto G un gruppo *integrabile* (1). Esso contiene allora almeno un sottogruppo invariante ∞^1, il quale in questo caso può supporsi (al pari di G) algebrico (2), e avrà perciò traiettorie algebriche e anzi razionali γ. Queste traiettorie formeranno sopra V una congruenza (algebrica) del 1° ordine, invariante rispetto a G, e dotata altresì di superficie unisecante; perchè i punti uniti che il gruppo ∞^1 considerato ha sopra una qualunque delle γ devono descrivere al variare di questa curva, se distinti, due luoghi (superficie, curve,..) anche distinti, ciascuno unisecante le γ medesime (3). E se quei due punti uniti coincidessero sopra ogni γ, si avrebbe un luogo unico, anche unisecante le γ. Rimane perciò soltanto a vedere se la congruenza delle γ sia razionale.

Ora, dall' esistenza di questa varietà unisecante le γ, si deduce immediatamente che sopra V esistono anche infinite superficie e sistemi lineari di superficie unisecanti le stesse γ. Costruendo pertanto un sistema lineare di tali superficie, il quale sia altresì semplice (4) e invariante rispetto a G (e ve ne saranno certo infiniti), noi potremo rappresentare birazionalmente V sopra un' altra varietà V', sulla quale *alle γ corrisponderanno rette* c, *e al gruppo* G *corrisponderà un gruppo anche proiettivo*. Questo nuovo gruppo opererà dunque *proiettivamente* e *transitivamente* sulla conguenza delle c; e quest' ultima potrà perciò concepirsi come una superficie algebrica con un gruppo proiettivo transitivo di trasformazioni proiettive in sè. Essa sarà dunque razionale, e razionale sarà pure la congruenza delle γ su V (5).

Supponiamo ora che il gruppo G sia *non integrabile*. Esso contiene allora almeno un sottogruppo ∞^3 semplice (6); ed è noto che entro un tal gruppo ogni sottogruppo ∞^1 è algebrico (7). Il gruppo G conterrà perciò ancora dei sottogruppi ∞^1 algebrici; e le traiettorie di questi gruppi saranno ancora curve razionali, formanti congruenze del 1° ordine dotate di superficie unisecanti. Queste congruenze potrebbero tutte coincidere; e per quest' unica congruenza, che sarebbe invariante rispetto a G, si potrebbe allora ripetere il

(1) Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. I, p. 265; vol. III, p. 679-81.

(2) Enriques-Fano, Mem. cit., § 9.

(3) Enriques-Fano, Mem. cit., § 7.

(4) Tale cioè che le superficie di esso passanti per un punto generico di V non passino di conseguenza per altri punti variabili col primo.

(5) Questo ragionamento può estendersi, per induzione completa, al caso di una varietà algebrica a un numero qualunque di dimensioni, la quale ammetta un gruppo continuo, transitivo, integrabile di trasformazioni proiettive in sè.

(6) Lie, op. cit., vol, III, p. 757. Cfr. anche Engel, *Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie*, II (Leipz. Ber., 1887).

(7) Ciò risulta immediatamente dalle equazioni generali di un gruppo proiettivo semplice ∞^3, che si trovano nel § 3 della mia Memoria: *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè* (Mem. della R. Acc. di Torino, ser. 2ª, t. XLVI, 1895-96).

ragionamento di poc' anzi. In caso contrario, si considerino due diverse Γ e Γ' fra queste congruenze, e si indichino con γ e γ' due loro curve generiche. Le γ che si appoggiano a una stessa γ' (o viceversa) formeranno una serie ∞^1 *razionale;* esse incontrano infatti questa γ' (o γ) secondo gruppi di punti tali, che un punto di quest' ultima curva individua completamente la γ (o γ') che lo contiene, e quindi anche il gruppo della serie considerata su γ' (o γ) cui esso appartiene; sicchè questa serie di gruppi di punti (che è evidentemente algebrica) sarà un' involuzione, e perciò razionale.

Noi possiamo così costruire infinite superficie F, ciascuna delle quali conterrà una serie razionale ∞^1 di curve γ (tutte quelle che si appoggiano a una data γ'); e di queste F ne avremo una doppia infinità, ovvero soltanto una semplice infinità, secondo che le γ appoggiantisi a una γ' generica non incontrano oppure incontrano in conseguenza anche infinite altre di queste curve.

Nel primo caso per ogni γ passeranno ∞^1 superficie F; e queste formeranno anche una serie razionale σ, perchè conterranno rispettivamente le singole γ' appoggiantisi a quella γ, ovvero i gruppi di un' involuzione in questa serie di γ' (che è razionale). Considerando pertanto la congruenza Γ come una superficie, e le serie ∞^1 di γ contenute rispettivamente nelle F di una serie σ come curve di questa superficie, la Γ ci apparirà come *una superficie contenente una serie razionale ∞^1 di curve razionali.* E una tale superficie è sempre razionale (¹).

Per giungere alla stessa conclusione nel secondo caso, quando cioè vi è soltanto una semplice infinità di superficie F, basterà dimostrare che è razionale questa serie ∞^1. Ora, anzitutto le ∞^1 superficie F formano un fascio, ossia per un punto generico di V ne passa una sola: quest' una deve infatti contenere la (unica) γ passante per questo punto, e quindi tutte le γ' che si appoggiano a questa γ; è dunque completamente individuata. Di più, se esiste su V una congruenza Γ'' analoga a Γ e Γ', le cui linee γ'' non stiano sulle F, il fascio delle F dovrà segare ciascuna di queste γ'' (che sono curve razionali) in gruppi di un' involuzione, e sarà perciò anche razionale. Se invece lo stesso fascio appartiene a tutte le altre congruenze analoghe a Γ e Γ', esso (come unico del suo tipo) sarà necessariamente invariante rispetto al gruppo proiettivo G; e questo gruppo, transitivo rispetto alla varietà V, dovrà operare su di esso in modo almeno ∞^1: di qui segue appunto la razionalità del detto fascio.

Osserviamo a tal uopo che una serie continua qualsiasi σ di varietà algebriche F di uno spazio S_r può sempre considerarsi come una varietà μ di uno spazio opportuno, tale che alle eventuali collineazioni di S_r le quali mutino la serie σ in sè stessa corrispondano sopra μ trasformazioni anche pro-

(¹) Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1° sem. 1894).

iettive. Ciascuna delle F può infatti considerarsi come intersezione completa di un certo numero di varietà algebriche M_{r-1} di S_r; quindi anche come intersezione di un certo numero (eventualmente anche superiore) di M_{r-1} *di uno stesso ordine* n (abbastanza grande), e perciò ancora come varietà base del sistema lineare di $M_{r-1}{}^n$, così individuato. Alle F noi sostituiamo così dei *sistemi lineari di varietà* $M_{r-1}{}^n$, i quali possono concepirsi come spazi minori S_k (per un certo valore di k) entro lo spazio di dimensione

$$R = \binom{n+r}{r} - 1$$

formato da tutte le M^n_{r-1} di S_r, e quindi anche come *punti* dello spazio di dimensione $\binom{R+1}{k+1} - 1$ a cui appartiene l'insieme di tutti quegli S_k. E in queste rappresentazioni verrà sempre conservato il carattere proiettivo delle collineazioni considerate in S_r (1).

Il fascio di superficie F dianzi considerato si può dunque concepire come una curva algebrica con (almeno) ∞^1 trasformazioni proiettive in sè; esso è quindi razionale, come appunto si voleva dimostrare.

Cristallografia. — *Sopra alcuni minerali italiani.* Nota di C. VIOLA, presentata dal Socio BLASERNA.

IV. *Ortoclasia del granito di Calabria.*

Già fin dalla mia prima gita in Calabria, nel 1890, raccolsi nel granito presso Paola dei cristalli trasparenti di ortoclasia, che ora si presentano molto utili per una determinazione delle costanti ottiche col riflettometro totale di Abbe. Potei ottenere delle sezioni bene levigate secondo le due sfaldature (010) e (001).

Anche per questo lavoro trovai aiuto nel Sig. Giuseppe Scalfaro, al quale faccio i miei più sinceri ringraziamenti.

Con la prima sezione ebbi le seguenti differenze rispetto al limite della riflessione totale per l'indice ω del quarzo:

(1) Quest'osservazione permetterebbe anche di abbreviare leggermente l'ultima parte del ragionamento relativo al caso di un gruppo G integrabile.

Cerchio orizzontale	Limite esterno		Limite interno		
	Vite micrometrica	Nicol		Vite micrometrica	Nicol
0° — 180°	1°.03′.10″	163		1°.10′.35″	73
20 — 200	1 02 33	168		1 07 55	78
27 — 207	—	—	β	*1 07 30*	78
40 — 220	1 02 15	168		1 08 20	78
60 — 240	1 02 25	172		1 11 53	82
80 — 260	1 02 35	172		1 15 45	82
100 — 280	1 02 30	182		1 19 15	92
117 — 297	—	—	α	*1 19 45*	95
120 — 300	1 02 55	187		1 19 37	97
140 — 320	1 02 50	197		1 18 23	107
160 — 340	1 03 20	182		1 15 43	92
Media = γ	1 02 44				

Il fatto caratteristico che la curva limite esterna rimane quasi circolare, dimostra che la faccia (010) è un piano di simmetria e precisamente quello perpendicolare alla direzione positiva c. Ciò viene confermato anche dalla distanza angolare, che è di 90° fra il massimo corrispondente a β, e il minimo corrspondente ad α.

Per il calcolo degli indici principali di rifrazione avremo da togliere dall'angolo ω del quarzo che è 54°.46′.25″, le differenze date dalla tabella; dunque si ha:

$$\left.\begin{matrix} 54^\circ.46'.25'' \\ 1\ \ 19\ \ 45 \end{matrix}\right\} = 53^\circ.26'.40'' = \varphi_\alpha$$

$$\left.\begin{matrix} 54\ \ 46\ \ 25 \\ 1\ \ 07\ \ 30 \end{matrix}\right\} = 53\ \ 38\ \ 55 \ = \varphi_\beta$$

$$\left.\begin{matrix} 54\ \ 46\ \ 25 \\ 1\ \ 05\ \ 43 \end{matrix}\right\} = 53\ \ 43\ \ 42 \ = \varphi_\gamma$$

Ed essendo

$$l \text{ sen } \varphi_\alpha = 9{,}9048668\,,$$
$$l \text{ sen } \varphi_\beta = 9{,}9060099\,,$$
$$l \text{ sen } \varphi_\gamma = 9{,}9064541\,,$$

si ha

$$\alpha_D = 1{,}51852$$
$$\beta_D = 1{,}52252$$
$$\gamma_D = 1{,}52408\,.$$

Con la sezione (001) ebbi le seguenti differenze pure rispetto all'angolo limite per ω del quarzo:

Cerchio orizzontale	Limite esterno		Limite interno	
	Vite micrometrica	Nicol	Vite micrometrica	Nicol
0° — 180°	1°.06′.10″	98°	1°.17′.55″	188°
20 — 200	1 06 10	88	1 14 32	178
40 — 220	1 06 32	90	1 10 10	180
60 — 240	1 05 57	170	1 06 50	80
80 — 260	γ *1 03 00*	180	β *1 07 00*	90
100 — 280	1 06 05	200	1 06 45	110
120 — 300	1 06 40	100	1 10 15	190
140 — 320	β' 1 07 00	95	1 15 10	185
160 — 340	1 06 20	97	1 18 58	187
170 — 350	—	98	α *1 19 40*	188

Essendo la sfaldatura (010), come abbiamo veduto poc' anzi, perpendicolare alla direzione positiva c, sarà necessariamente la sfaldatura (001) parallelo a questa direzione. Ciò risulta anche dallo specchietto qui sopra, poichè il raggio γ e il raggio β coincidono, e il raggio α sta ad essi perpendicolare.

Per ottenere gli angoli limiti avremo da togliere le differenze principali desunte dalla ultima tabella, dall' angolo 54°.46′.25″ relativo a ω del quarzo; quindi si ha:

$$\varphi_\alpha = 53°.26'.45''$$
$$\varphi_\beta = 53 \quad 39 \quad 25$$
$$\varphi_\gamma = 53 \quad 43 \quad 25$$

e

$$\alpha_D = 1{,}51855$$
$$\beta_D = 1{,}52268$$
$$\gamma_D = 1{,}52399$$

Facendo le medie di queste e delle precedenti osservazioni, avremo finalmente per l' ortoclasia del granito di Calabria le seguenti costanti ottiche:

$\alpha_D =$ *1,518154* ($\alpha_D = 1{,}5192$ Adular del San Gottardo secondo F. Kohlrausch [1])
$\beta_D =$ *1,52260* ($\beta_D = 1{,}5230$ id. id.)
$\gamma_D =$ *1,52404* ($\gamma_D = 1{,}5246$ id. id.).

[1] F. Kohlrausch, Phys. med. Ges. Würzb. 1877, 12.

Per il calcolo dell' angolo degli assi ottici 2 V faremo uso della formola:

$$\cot g\, V = \sqrt{\frac{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}}{\frac{1}{\beta^1} - \frac{1}{\gamma^2}}}$$ (1) (V attorno la bisettrice negativa)

analoga a quella di Michel Lévy la quale ci dà:

2V = — 61°.26′ (2V = — 66°.5′ secondo Kohlrausch (2))

Il piano degli assi attici fa con (001)

$$+ 4° \tfrac{1}{2}$$

V. *Salgemma delle miniere di Lungro in Calabria.*

Non ci sono ancora note le proprietà fisiche del salgemma di Lungro, benchè quelle miniere offrano dei cristalli limpidissimi di salgemma colorati e scolorati, bene sviluppati, per lo più cubici, con sfaldatura perfetta secondo C^s_{34}(100). Nemmeno il giacimento del salgemma è perfettamente noto, poichè coloro che fecero degli studî a Lungro supposero che esso sia del Miocene e dell'Eocene (3); ma credo non vi sia escluso il Trias.

Avendo io potuto disporre di qualche cristallino trasparente cubico, e avendo potuto ottenere una sezione bene levigata, intrapresi alcune esperienze sulle figure di corrosione e sulle costanti ottiche del salgemma. Mente riferisco ora su queste ultime, mi riservo di pubblicare le prime in un'altra Nota.

Con l'apparecchio di Abbe ebbi la seguente media di 4 letture:

120°.02′.20″,

(1) Questa formola è facilmente trasformabile nella seguente:

$$\cot g\, V = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\varphi_\alpha + \varphi_\beta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi_\beta - \varphi_\alpha)}{\operatorname{sen}(\varphi_\gamma + \varphi_\beta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi_\gamma - \varphi_\beta)}},$$

ove entrano solo gli angoli limiti, ed è escluso l'indice di rifrazione del vetro. Questa espressione può avere una certa preferenza sopra altre pure logaritmiche, poichè per calcolarla numericamente si trae profitto direttamente dagli angoli della riflessione totale, senza calcolare dapprima gli indici. Essa è anche riducibile nella più semplice, ma approssimata:

$$\cot g\, V = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\varphi_\beta - \varphi_\alpha)}{\operatorname{sen}(\varphi_\gamma - \varphi_\beta)}}.$$

(2) Op. cit.

(3) Vedi: O. Foderà e P. Toso, *Miniere di Lungro* (Rivista del servizio minerario del 1886, Annali di agricoltura, 1888); E. Cortese, *Descrizione geologica della Calabria.* Roma 1895, pag. 291, 146.

e contemporaneamente per l'indice ω del quarzo:

$$120^\circ.01'05''.$$

Abbiamo dunque una differenza di $0^\circ.01'.15''$, che dobbiamo togliere dall'angolo calcolato corrispondente a ω del quarzo:

$$\left.\begin{matrix} 54^\circ.46'.25'' \\ 0\ \ 01\ \ 15 \end{matrix}\right\} 54^\circ.45'.10'' = \varphi_n .$$

Quindi l'indice di rifrazione del Salgemma di Lungro è

$$n_D = 1{,}54384 .$$

A. Mülheims ([1]) ottenne col metodo della riflessione totale pel salgemma di Friedrichshall

$$n_D = 1{,}54381$$

e J. Stefan ([2])

$$n_D = 154400$$

VI. *Sanidina dei Cimini* (prov. di Roma).

Si presenta in piccoli cristalli trasparenti aggregati fra loro e con la mica nera, cementati, nei blocchi erratici del tufo di Viterbo. Ma i cristalli di sanidina non sono isolabili da questi blocchi, cosicchè mi limitai a determinarne gli indici di rifrazione per la luce. A quest'uopo levigai una sezione parallela a (001).

Feci le seguenti letture:

	$121^\circ.17'.00''$	per l'indice	α_D	
	121 01 20	»	β_D	
	120 59 20	»	γ_D	
e	120 01 05	»	ω_D	del quarzo.

Avremo dunque le seguenti differenze:

$1^\circ.15'.55''$	per	α_D
1 00 15	»	β_D
0 58 15	»	γ_D

e perciò gli angoli limiti sono:

$$\varphi_\alpha = 53^\circ.30'.30'' ,$$
$$\varphi_\beta = 53\ \ 46\ \ 10 ,$$
$$\varphi_\gamma = 53\ \ 48\ \ 10 ,$$

([1]) A. Mülheims, Groth. Zeitschr. f. Krystall. 1888, 14, pag. 202.
([2]) J. Stefan, Wien. Ak. der Wiss. Bericht., 63(2), 1871, pag. 139.

Per il calcolo dell' angolo degli assi ottici 2 V faremo uso della formola:

$$\operatorname{cotg} V = \sqrt{\frac{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}}{\frac{1}{\beta^1} - \frac{1}{\gamma^2}}} \text{ (1) (V attorno la bisettrice negativa)}$$

analoga a quella di Michel Lévy la quale ci dà:

$$2V = -61^\circ.26' \; (2V = -66^\circ.5' \text{ secondo Kohlrausch (2)})$$

Il piano degli assi attici fa con (001)

$$+4^\circ \tfrac{1}{2}$$

V. *Salgemma delle miniere di Lungro in Calabria.*

Non ci sono ancora note le proprietà fisiche del salgemma di Lungro, benchè quelle miniere offrano dei cristalli limpidissimi di salgemma colorati e scolorati, bene sviluppati, per lo più cubici, con sfaldatura perfetta secondo $C^s_{34}(100)$. Nemmeno il giacimento del salgemma è perfettamente noto, poichè coloro che fecero degli studî a Lungro supposero che esso sia del Miocene e dell'Eocene (3); ma credo non vi sia escluso il Trias.

Avendo io potuto disporre di qualche cristallino trasparente cubico, e avendo potuto ottenere una sezione bene levigata, intrapresi alcune esperienze sulle figure di corrosione e sulle costanti ottiche del salgemma. Mente riferisco ora su queste ultime, mi riservo di pubblicare le prime in un'altra Nota.

Con l'apparecchio di Abbe ebbi la seguente media di 4 letture:

$$120^\circ.02'.20'',$$

(1) Questa formola è facilmente trasformabile nella seguente:

$$\operatorname{cotg} V = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\varphi_\alpha + \varphi_\beta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi_\beta - \varphi_\alpha)}{\operatorname{sen}(\varphi_\gamma + \varphi_\beta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi_\gamma - \varphi_\beta)}},$$

ove entrano solo gli angoli limiti, ed è escluso l'indice di rifrazione del vetro. Questa espressione può avere una certa preferenza sopra altre pure logaritmiche, poichè per calcolarla numericamente si trae profitto direttamente dagli angoli della riflessione totale, senza calcolare dapprima gli indici. Essa è anche riducibile nella più semplice, ma approssimata:

$$\operatorname{cotg} V = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\varphi_\beta - \varphi_\alpha)}{\operatorname{sen}(\varphi_\gamma - \varphi_\beta)}}.$$

(2) Op. cit.

(3) Vedi: O. Foderà e P. Toso, *Miniere di Lungro* (Rivista del servizio minerario del 1886, Annali di agricoltura, 1888); E. Cortese, *Descrizione geologica della Calabria.* Roma 1895, pag. 291, 146.

e contemporaneamente per l'indice ω del quarzo:

$$120^{\circ}.01'05''.$$

Abbiamo dunque una differenza di $0^{\circ}.01'.15''$, che dobbiamo togliere dall'angolo calcolato corrispondente a ω del quarzo:

$$\left.\begin{array}{r} 54^{\circ}.46'.25'' \\ 0\ \ 01\ \ 15 \end{array}\right\} 54^{\circ}.45'.10'' = \varphi_n .$$

Quindi l'indice di rifrazione del Salgemma di Lungro è

$$n_{\mathrm{D}} = 1{,}54384 .$$

A. Mülheims (1) ottenne col metodo della riflessione totale pel salgemma di Friedrichshall

$$n_{\mathrm{D}} = 1{,}54381$$

e J. Stefan (2)

$$n_{\mathrm{D}} = 154400$$

VI. *Sanidina dei Cimini* (prov. di Roma).

Si presenta in piccoli cristalli trasparenti aggregati fra loro e con la mica nera, cementati, nei blocchi erratici del tufo di Viterbo. Ma i cristalli di sanidina non sono isolabili da questi blocchi, cosicchè mi limitai a determinarne gli indici di rifrazione per la luce. A quest'uopo levigai una sezione parallela a (001).

Feci le seguenti letture:

	$121^{\circ}.17'.00''$	per l'indice	α_{D}
	121 01 20	"	β_{D}
	120 59 20	"	γ_{D}
e	120 01 05	"	ω_{D} del quarzo.

Avremo dunque le seguenti differenze:

$1^{\circ}.15'.55''$	per	α_{D}
1 00 15	"	β_{D}
0 58 15	"	γ_{D}

e perciò gli angoli limiti sono:

$$\varphi_{\alpha} = 53^{\circ}.30'.30'' ,$$
$$\varphi_{\beta} = 53\ \ 46\ \ 10 ,$$
$$\varphi_{\gamma} = 53\ \ 48\ \ 10 ,$$

(1) A. Mülheims, Groth. Zeitschr. f. Krystall. 1888, 14, pag. 202.
(2) J. Stefan, Wien. Ak. der Wiss. Bericht., 63(2), 1871, pag. 139.

e infine

$\alpha_D = 1,51977$ (1,520278 della Sanidina dell'Eifel secondo Offret [1]))
$\beta_D = 1,52488$ (1,524853 id. id.)
$\gamma_D = 1,52553$ (1,524972 id. id.).

Chimica. — *Soluzioni solide e miscele isomorfe fra composti a catena aperta, saturi e non saturi.* Nota II, di G. Bruni e F. Gorni [2], presentata dal Socio Ciamician.

Nella nota precedente [3] noi abbiamo esposto i risultati delle nostre ricerche intorno alle relazioni che sussistono tra la configurazione dei composti che differiscono fra di loro per la presenza o meno di un doppio legame in una catena aperta, quali esse possono dedursi dalla loro attitudine a formare soluzioni solide e miscele isomorfe. Abbiamo così stabilito che, dei due composti non saturi isomeri nello spazio, è quello che ha la configurazione fumaroide che forma soluzione solida ed ha quindi somiglianza di configurazione col rispettivo composto saturo. Nella prima parte di questo lavoro esponiamo il seguito delle ricerche eseguite su tale argomento.

I.

Fra i composti di cui interessava conoscere le relazioni erano l'acido stearico ed i corrispondenti acidi della serie non satura. Come venne già detto nella nota precedente, Garelli e Montanari avevano trovato che soluzioni di acido oleico in stearico si comportano nel congelamento in modo affatto normale. In seguito ai fatti da noi scoperti si rendeva ora necessario l'esaminare le soluzioni dell'isomero nello spazio.

Come è noto, dei tre acidi esistenti della formola $C_{18}H_{34}O_2$ si ammette generalmente che l'acido oleico e l'elaidinico siano stereoisomeri, e l'acido isooleico sia isomero di struttura coi primi due [4]. Su questo però, e tanto meno poi sulla configurazione nello spazio da attribuirsi a questi acidi non si hanno ancora nozioni sufficientemente esatte. Anche i recenti studî di A. Albitzkj [5] non hanno ancora condotto ad un risultato definitivo.

Lo studio crioscopico delle soluzioni di acido elaidinico in stearico diede i seguenti risultati:

[1] Bull. Soc. min. franç. Paris 1890, 13, 635.
[2] Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.
[3] Rendiconti di questa Accademia 1899, 1° sem., pag. 454.
[4] Richter (Anschütz) Organische Chemie, VIII aufl., pag. 304.
[5] Journ. russ. phys.-chem. Gesellsch. XXXI. 76.

Concentrazione.	Abbassamento termometrico.	Peso molecolare (K = 44) $C_{18} H_{34} O_2 = 282$.
0,8611	0°,125	303
2,0184	0,29	306
2,0864	0,305	301
3,5608	0,505	310
3,6565	0,51	315

Come si vede il comportamento di tali soluzioni è decisamente anormale. L' anomalia non è molto forte; però essa è sufficientemente spiccata, e riuscirebbe invero assai difficile lo spiegarla altrimenti che colla formazione di soluzione solida. Però una causa doveva qui rendere meno visibile l' anomalia, il fatto cioè che l' acido elaidinico fonde più basso dello stearico.

Pensammo quindi di eseguire determinazioni impiegando come solvente l' acido elaidinico. Non essendo esso stato prima impiegato dovemmo determinare almeno approssimativamente la depressione molecolare. Come sostanze presumibilmente normali vi sciogliemmo il dibenzile e l' acido salicilico, ed avemmo come media delle misure così eseguite il valore K = 39. Le soluzioni di acido stearico ci diedero ora i seguenti risultati:

Concentrazione.	Abbassamento termometrico.	Depressione molecolare.	Peso molesolare (K = 39) $C_{18} H_{36} O_2 = 284$.
0,6875	0°,075	31,0	358
0,8539	0,09	30,0	370
1,7015	0,185	30,9	358
3,2141	0,36	31,8	348

L' anomalia è, come noi avevamo previsto, spiccatissima e non può evidentemente attribuirsi ad altro che a formazione di soluzione solida.

Dalle nostre esperienze risulta dunque che all' acido elaidinico deve attribuirsi una configurazione fumaroide, mentre dalle precedenti osservazioni di Garelli e Montanari (l. c.) deve dedursi che all' acido oleico è da ascriversi una configurazione maleinoide. Queste conclusioni stanno bene in accordo colle proprietà fisiche e chimiche di questi corpi. L' acido elaidinico fonde infatti a temperatura notevolmente più elevata dell' isomero; esso è altresì più stabile dell' oleico dal quale si ottiene per azione di varî reagenti. È evidente però che non può dalle nostre esperienze trarsi alcuna conclusione definitiva sulla questione se l' acido oleico e l'elaidinico siano realmente fra di loro isomeri nello spazio, ovvero siano isomeri di struttura; però la prima ipotesi è resa probabile dal fatto che ai due acidi risulta spettare due configurazioni opposte.

Sarebbe stato interessante di esaminare anche altri gruppi di composti delle stesse serie come i seguenti: acidi valerianico, angelico e tiglico; acidi

arachico, erucico e brassidinico. Però la troppo bassa temperatura di congelamento dell'acido valerianico che impedisce di usarlo come solvente, la poca accessibilità ed il prezzo elevatissimo degli altri, non ci permise di compiere ricerche sistematiche intorno ad essi. Questo campo di esperienze deve però ritenersi dalle esperienze fin qui esposte, come sufficientemente chiarito.

II.

In questa seconda parte verranno studiate le relazioni di configurazione e di forma cristallina che possono esistere fra sostanze le quali differiscono fra loro per la sostituzione in una catena aperta dei gruppi — NH — ed — N = ai gruppi — CH_2 — e — CH =.

Fra composti a catena chiusa relazioni di tal genere erano note da vario tempo. È noto infatti che se in un composto aromatico si sostituiscono ad uno od a due gruppi metinici rispettivamente i gruppi — N = oppure — HN —, si ottengono composti che conservano col primo spiccate analogie di configurazione, talchè sciolti in esso dànno nel congelare soluzioni solide. Come esempio di ciò possono citarsi le relazioni ben note esistenti fra le seguenti serie di composti: benzolo, piridina e pirrolo; naftlalina, chinolina ed indolo; fenantrene, acridina e carbazolo; nonchè fra numerosi loro derivati.

Inoltre è noto che composti i quali differiscono fra loro per contenere nella catena chiusa l'uno un gruppo — CH_2 — e l'altro un gruppo — NH — hanno lo stesso comportamento crioscopico anormale rispetto all' idrocarburo fondamentale. Esempî: ciclopentadiene e pirrolo in benzolo; indene ed indolo in naftalina; fluorene e carbazolo in fenantrene.

Tutto ciò risulta da numerose osservazioni eseguite da una serie di ricercatori [1] specialmente in questo laboratorio.

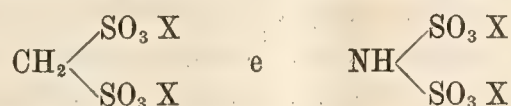
Non erano però fino a poco tempo fa state eseguite ricerche intorno alle relazioni esistenti fra composti che presentano le differenze sopraindicate in una catena aperta. Solo recentemente W. Muthmann [2] fece l' importante osservazione che i sali potassico ed ammonico dell' acido metandisolfonico da lui ottenuti e misurati cristallograficamente da H. Zirngiebl, sono perfettamente isomorfi coi sali corrispondenti dell' acido imidodisolfonico misurati da Münzing [3]. La sostituzione di un gruppo — NH — ad un gruppo — CH_2 —

(1) Paternò, Gazz. chim. ital. 1889. 640. — Magnanini, Ibid., 1889. 141. — Ferratini e Garelli, Ibid. 1892. II. 245; 1893. I. 442. — Garelli, Ibid. 1894 II, 263; 1896 II, 380. — Garelli e Montanari, Ibid. 1894. II. 229. — Bruni, Ibid. 1898. I. 259.

(2) Berichte, XXXI. 1884.

(3) Zeitschr. f. Kryst. XIV. 62.

lascia quindi in questo caso sussistere una così perfetta analogia di configurazione, che i composti delle formole:

$$CH_2\langle^{SO_3\,X}_{SO_3\,X} \quad e \quad NH\langle^{SO_3\,X}_{SO_3\,X}$$

sono perfettamente isomorfi.

Questa osservazione attrasse la nostra attenzione e ci spinse a ricercare se tali analogie fossero di indole generale, e se esse si trovassero altresì nel comportamento crioscopico. Come esempio di due corpi che stessero fra loro nello stesso rapporto dei sali studiati da Muthmann, scegliemmo il difenilmetano e la difenilammina:

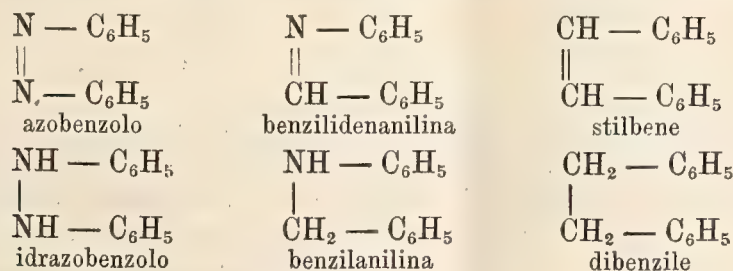
$$CH_2\langle^{C_6H_5}_{C_6H_5} \quad e \quad NH\langle^{C_6H_5}_{C_6H_5}$$

Il difenilmetano venne impiegato come solvente usando la costante $K = 66$ che risulta dalle misure di Eykman [1]. L' eventuale comportamento anormale avrebbe dovuto in questo caso rivelarsi in modo assai spiccato poichè la difenilammina fonde a temperatura più elevata del difenilmetano. Invece il comportamente crioscopico delle sue soluzioni si rivelò perfettamente normale:

Concentrazioni.	Abbassamento. termometrico.	Peso molecolare ($K = 66$) $C_{12}H_{11}N = 169$).
0,4788	0°,19	166
1,3397	0,52	170
2.9238	1,14	169
4,4231	1,70	172

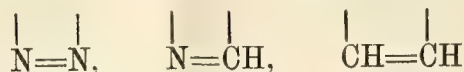
Fra questi due composti la sostituzione di un gruppo — NH — ad un — CH_2 — distrugge quindi ogni analogia di configurazione. Sulle cause di questo comportamento opposto a quello osservato da Mutmann, sarebbe ora prematuro il trarre conclusioni occorrendo perciò nuove ricerche. Nessuna conclusione può trarsi da dati cristallografici, esistendo solo poche ed incomplete misure circa la difenilammina.

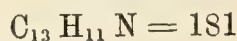
Dopo il risultato negativo di queste esperienze, ci rivolgemmo allo studio delle relazioni esistenti fra le sostanze costituenti il seguente gruppo:

$N - C_6H_5$ ‖ $N - C_6H_5$ azobenzolo	$N - C_6H_5$ ‖ $CH - C_6H_5$ benzilidenanilina	$CH - C_6H_5$ ‖ $CH - C_6H_5$ stilbene
$NH - C_6H_5$ | $NH - C_6H_5$ idrazobenzolo	$NH - C_6H_5$ | $CH_2 - C_6H_5$ benzilanilina	$CH_2 - C_6H_5$ | $CH_2 - C_6H_5$ dibenzile

(1) Zeitschr. f. physik. Ch. IV. 497.

Lo studio venne eseguito seguendo i due metodi cristallografico e crioscopico, usando come solvente l' azobenzolo [1]. Questa sostanza era stata studiata come solvente da Eykman [2], il quale aveva trovata la costante K=83,5. Siccome però tale studio era assai incompleto, noi lo abbiamo completato sciogliendo nell' azobenzolo come sostanze presumibilmente normali, le seguenti: naftalina, difenile, p. bibromobenzolo ed etere dimetilico dell' idrochinone. Come media di queste misure e di quelle di Eykman, adottammo il valore K=82,5.

Anzitutto sperimentammo sciogliendo in azobenzolo la benzilidenanilina e lo stilbene. L' analogia di questi composti appare infatti come la più stretta, contenendo essi rispettivamente gli aggruppamenti:

$$\overset{|}{N}=\overset{|}{N}, \quad \overset{|}{N}=\overset{|}{C}H, \quad \overset{|}{C}H=\overset{|}{C}H$$

nei quali tutti è contenuto un doppio legame in una catena aperta. Il comportamento crioscopico delle soluzioni di benzilidenanilina si mostrò infatti fortemente anormale, come risulta dai seguenti risultati:

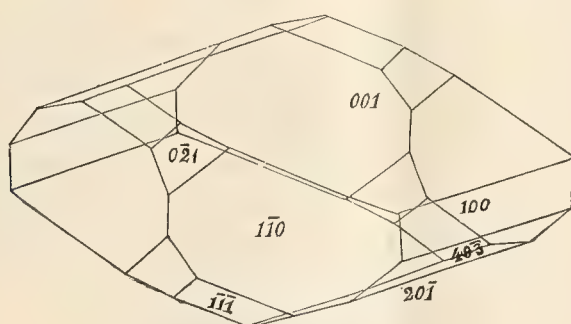
Concentrazione	Abbass. termometrico	Peso molec. (K = 82,5)
0,3685	0°,095	320
0,5694	0,15	313
1,1344	0,295	317
1,3442	0,35	317
2,5344	0,65	322
3,6889	0,93	327
		$C_{13}H_{11}N = 181$

Più rimarchevole ancora si rivelò il comportamento dello stilbene, il quale fino dalle più basse concentrazioni innalza il punto di congelamento del solvente, come risulta dalle seguenti tabelle:

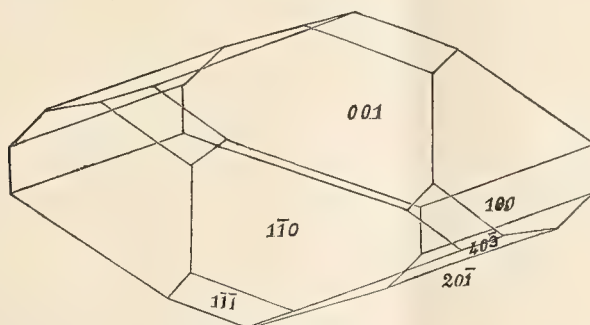
Concentrazione	Innalzam. termometrico
0,3306	0°,18
0,6334	0,33
1,2266	0,68
2,1983	1,16
3,3316	1,76

(1) Contemporaneamente a questa, un' altra serie di ricerche su queste sostanze venne eseguita nel laboratorio chimico dell'Università di Ferrara da F. Garelli e F. Calzolari, i quali però usarono come solventi il dibenzile e la benzilanilina. In seguito noi ci riferiremo talvolta ai risultati di queste ricerche, che ci furono privatamente e gentilmente comunicati, e che del resto verranno alla luce contemporaneamente a questo lavoro.

(2) Zeitschr. f. physik., Ch. IV, 497

Il comportamento delle miscele di azobenzolo e stilbene è quindi quello proprio delle miscele isomorfe. Era perciò interessante l' esaminare le relazioni esistenti fra la forma cristallina di questi composti. Per l' azobenzolo e lo stilbene esistevano misure di Calderon (¹) e di vom Rath (²), però alquanto incomplete; per la benzilidenanilina invece non esistevano dati. Lo studio cristallografico di queste sostanze fu da noi affidato al dott. G. Boeris del Museo Civico di Milano, il quale ci comunicò gentilmente i risultati che ora esponiamo.

Anzitutto la benzilidenanilina si rivelò affatto inadatta alle misure cristallografiche, non riuscendo ad ottenersi da essa cristalli sufficientemente

Azobenzolo.

ben formati. Per l'azobenzolo e lo stilbene invece si giunse ad un risultato interessantissimo e completamente concorde con quello delle nostre esperienze crioscopiche.. L'azobenzolo e lo stilbene sono cristallograficamente isomorfi.

Stilbene.

Non si tratta di quelle limitate relazioni che i cristallografi chiamano morfotropiche, ma bensì di un isomorfismo perfetto che si manifesta anche nell'abito esterno dei cristalli, come risulta già a prima vista dai disegni che qui sotto riproduciamo, ed in modo più completo, dai dati numerici che seguono.

(¹) Zeitschr. f. Krist. IV, 232.
(²) Berichte V, 624.

Azobenzolo

—

Sistema cristallino: monoclino

a:b:c = 2,10756:1:1,33123 $\beta = 65°,34'$

Forme osservate: {100} {001} {110} {021} (1) $\{\bar{1}11\}$ $\{\bar{2}01\}$ $\{\bar{4}03\}$

Angoli	Limiti	Medie	Calcolato	N
	° ′ ° ′	° ′		
$(110):(\bar{1}10)$	55,00-55, 6	55, 3	*	10
(100):(001)	65,21-65,41	65,35	65,34	4
$(001):(\bar{4}03)$	49,28-49,49	49,36	49,38	4
$(\bar{4}03):(\bar{2}01)$	17,43-17,57	17,50	17,49	8
$(20\bar{1}):(100)$	46,43-46,53	46,48	46,59	6
(001):(110)	78,52-79, 5	78,59	*	22
$(001):(\bar{1}11)$	61, 4-61,11	61, 7	61,10	3
$(\bar{1}11):(\bar{1}10)$	39,42-40,10	39,52	39,51	4
$(\bar{2}01):(\bar{1}11)$	57,52-57,58	57,56	57,52	4
$(\bar{1}11):(110)$	50,22-50,35	50,29	50,30	3
$(110):(20\bar{1})$	71,30-71-37	71,34	71,37	8
$(11\bar{1}):(100)$		81,39	81,49	1
$(\bar{1}11):(11\bar{1})$		75,24	75,22	1
$(11\bar{1}):(40\bar{3})$	53, 8-53,14	53,11	53,14	5
$(40\bar{3}):(110)$	78,33-78,45	78,41	78,39	7
$(021):(\bar{1}11)$	23,36-24, 4	23-49	23,43	3
(021):(110)	26,46-26,50	26,48	26,47	3
$(021):(1\bar{1}0)$	41,32-41-54	41-40	41,41	4
$(021):(11\bar{1})$		56,50	56,48	1
(021):(100)	80,46-81,10	80,53	80,56	3
(021):(001)	67,26-67-46	67,35	*	16
$(021):(02\bar{1})$	44,42-44,59	44,48	44,50	3
$(021):(\bar{4}03)$		75,54	75,42	1

Stilbene

—

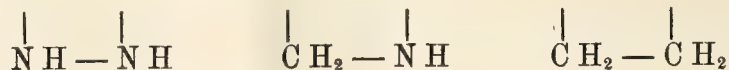
Sistema cristallino: monoclino

a:b:c = 2,17015:1:1,40033 $\beta = 65°,54'$

Forme osservate: {100} {001} {110} $\{\bar{4}03\}$ $\{\bar{2}01\}$ $\{\bar{1}11\}$ (1)

Angoli	Limiti	Medie	Calcolato	N
	° ′ ° ′	° ′		
$(110):(\bar{1}10)$	53,28-53,38	53,24	*	9
(100):(001)	65,43-66,30	65,55	65,54	12
$(001):(\bar{4}03)$	50,12-50,31	50,21	50,26	6
$(\bar{4}03):(\bar{2}01)$	17,25-17,52	17,36	17,41	12
$(20\bar{1}):(100)$	45,50-46,16	46, 1	45,59	10
(001):(110)	79,10-79,32	79,24	*	15
$(001):(\bar{1}11)$		62,24	62,23	1
$(\bar{1}11):(\bar{1}10)$		38,17	38,13	1
$(\bar{2}01):(\bar{1}11)$		58,55	58,53	1
$(\bar{1}11):(110)$		49,23	49,22	1
$(110):(20\bar{1})$	71,40-71,52	71,45	*	12
$(11\bar{1}):(100)$		81,20	81,25	1
$(\bar{1}11):(11\bar{1})$		73, 2	72,50	1
$(11\bar{1}):(40\bar{3})$	54,18-54,33	54,24	54,28	6
$(40\bar{3}):(110)$	78,27-78,39	78,32	78,28	9

Passando ora a studiare le soluzioni delle sostanze corrispondenti a quelle ora esaminate, ma che non contengono doppi legami nella catena aperta, e che presentano invece gli aggruppamenti:

$$\overset{|}{N}H-\overset{|}{N}H \qquad \overset{|}{C}H_2-\overset{|}{N}H \qquad \overset{|}{C}H_2-\overset{|}{C}H_2$$

ottenemmo i risultati seguenti:

(1) Nuova per la sostanza.

(1) Nuova per la sostanza.

Idrazobenzolo. C_{12} H_{14} N_2=184.

Concentrazione	Abbass. termometrico	Peso molecolare (K=82,5)
0,6408	0°,275	192
0,7310	0,31	195
1,4041	0,58	200
1,6837	0,71	196
2,3643	0,96	203

Benzilanilina. C_{13} H_{13} N=183

0,4993	0°,18	229
0,6871	0,255	222
1,5273	0,585	216
1,8563	0,71	216
3,1622	1,26	207
3,2477	1,27	211

Dibenzile. C_{14} H_{14}=182

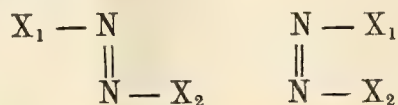
0,6299	0,225	231
0,8668	0,315	227
1,8077	0,665	224
2,3154	0.85	225
3,4106	1,255	224
3,9388	1,46	223

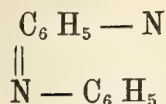
Il dibenzile è quindi spiccatamente anormale e l'anomalia deve indubbiamente esser attribuita a formazione di soluzione solida. Dalle ricerche di Garelli e Calzolari risulta, come ci fu privatamente comunicato, che anche nel caso inverso l'anomalia è assai spiccata. Il fatto è assai interessante per ciò che (come i suddetti autori ci hanno comunicato) il dibenzile è cristallograficamente completamente isomorfo coll'azobenzolo e lo stilbene. Inoltre lo stilbene innalza il punto di congelamento del dibenzile.

Da questo assieme di fatti possono trarsi le seguenti conclusioni: Lo stilbene essendo isomorfo col dibenzile deve avere (secondo le nostre precedenti ricerche) delle due forme possibili nello spazio, la fumaroide; ciò che è reso assai probabile dalle sue proprietà fisiche e dalla sintesi di essa fatta da Anschütz (1) dall'etere difenilico dell'acido fumarico, e dall'etere fenilico

(1) Berichte XVIII, 1948.

dell'acido cinnamico. L'azobenzolo poi, essendo isomorfo coi due precedenti, deve avere una configurazione simile ad essi. Ora è lecito ritenere che siano possibili per l'azobenzolo due forme stereoisomere, come fu verificato per gli antidiazo — e sindiazo — derivati:

$$\begin{matrix} X_1 - N \\ \quad\; \| \\ \quad\; N - X_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} N - X_1 \\ \| \quad\;\; \\ N - X_2 \end{matrix}$$

In tal caso all'azobenzolo noto deve spettare indubbiamente la forma anti:

$$\begin{matrix} C_6H_5 - N \\ \| \qquad\qquad \\ N - C_6H_5 \end{matrix}$$

Degli altri composti studiati anche la benzilanilina ha comportamento anormale. Non è però possibile in tal caso asserire con sicurezza che l'anomalia sia dovuta a formazione di soluzione solida, essendo in essa contenuto il gruppo imminico, che secondo le ricerche di Auwers, dà talora luogo ad anomalie per formazione di molecole complesse. Questo dubbio è avvalorato dal fatto, che Garelli e Calzolari trovarono che l' azobenzolo sciolto in benzilanilina dà valori completamente normali.

Si sarebbe potuto infine prevedere che le relazioni di isomorfismo esistenti fra dibenzile e stilbene, si sarebbero mantenute fra azo- ed idrozo-benzolo. Invece quest' ultimo, sciolto nel primo, ha un comportamento che può dirsi del tutto normale. Ciò sta d'accordo coll' osservazione di Garelli e Calzolari, che l' idrazobenzolo è affatto normale, tanto in soluzione di dibenzile, che di benzilanilina. Queste due ultime osservazioni sono in accordo colle nostre circa il comportamento della difenilammina in difenilmetano, ed assieme a queste in contraddizione con quelle suaccennate di Muthmann.

Sarebbe ora stato interessante compiere una serie di osservazioni usando come solvente la benzilidenanilina, e noi vi ci eravamo accinti. Questa sostanza però si dimostrò (sopratutto per i fenomeni di sopra fusione che presenta) del tutto inadatta a determinazioni crioscopiche, onde non ci fu possibile raggiungere lo scopo.

Concludendo, da queste ricerche può dedursi quanto segue:

1° Gli aggruppamenti $\overset{|}{C}H = \overset{|}{C}H$ (forma fumaroide) e $\overset{|}{C}H_2 - \overset{|}{C}H_2$ sono, secondo le espressioni di Groth, isomorfotropi coll' altro $\overset{|}{N} = \overset{|}{N}$. La loro reciproca sostituzione lascia intatta la configurazione molecolare e la forma cristallina del composto.

2° Anche la sostituzione dell' aggruppamente $\overset{|}{N} = \overset{|}{C}H$ ai precedenti, conserva relazioni morfotropiche ed i composti che per tal guisa si corrispondono, sono capaci di formare soluzioni solide.

3° La sostituzione invece dell' aggruppamento $\overset{|}{N}H—\overset{|}{N}H$, toglie invece ogni somiglianza di configurazione e conseguentemento ogni capacità a formare soluzioni solide.

4° Sull' effetto della sostituzione dell' aggruppamento $\overset{|}{C}H_2—\overset{|}{N}H$, non si possono per le ragioni suesposte trarre conclusioni sicure.

Queste regole, per quanto ben verificate dal complesso delle esperienze ora descritte, debbono naturalmente essere intese con riserva, occorrendo nuove e più vaste ricerche per dimostrare la loro generale applicabilità.

Chimica. — *Sul comportamento crioscopico di sostanze aventi costituzione simile a quella del solvente* [1]. Nota IV di F. Garelli e F. Calzolari, presentata dal Socio G. Ciamician.

Le nuove ricerche eseguite da Bruni [2] sulle relazioni esistenti fra la configurazione molecolare dei corpi e la loro attitudine a formare tra di essi soluzioni solide, hanno avuto per risultato di confermare in massima le norme principali dedotte dalle esperienze fin qui eseguite su tale argomento. Bruni anzi ha dimostrato che non è difficile realizzare, anche fra corpi a catena aperta, quelle interessanti anomalie crioscopiche che, nella quasi totalità, eransi rinvenute fra composti a catena chiusa.

Il problema tuttavia presenta ancora molti punti oscuri. Dopo una serie di fatti che obbediscono alle regole indicate da numerose esperienze, non è raro trovare risultati impreveduti, eccezioni che sembrano e sono, per ora, non spiegabili. Queste consigliano certo a procedere con somma circospezione prima di enunciare leggi generali, ma non distruggono l' importanza che deve avere il ripetersi, con una certa regolarità, dei fatti più salienti. È certo che le anomalie crioscopiche osservate non sono casuali, ma dipendono dalla somiglianza di configurazione molecolare, dalla forma cristallina, dal punto di fusione e da altre proprietà fisiche secondo leggi non ancor ben chiare. La scoperta di queste ultime richiede, per necessità, una serie di numerose e ben dirette ricerche sperimentali.

Nella presente Nota si comunicano i risultati delle esperienze fatte sulle coppie di sostanze organiche seguenti:

1) Mentolo e timolo — 2) dibenzile e stilbene — 3) benzilanilina e benzilidenanilina — 4) dibenzile e benzilanilina — 5) dibenzile e benzil-

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale della L. Università di Ferrara.

[2] Gazz. Chim. ital. 1898, pag. 277 e questi Rendiconti, 7 maggio 1899.

idenanilina — 6) dibenzile e azobenzolo — 7) dibenzile e idrazobenzolo — 8) trifenilmetano e trifenilammina.

Dall'enumerazione appare chiaramente come, con la prima serie di esperienze intendevamo constatare ancor una volta se l' addizione di atomi di idrogeno, in numero anche rilevante, ad atomi di carbonio costituenti un ciclo, non produce grande cambiamento nella configurazione molecolare; laddove con la seconda e la terza serie di esperienze volevamo vedere se il medesimo effetto si aveva addizionando l'idrogeno ad atomi di carbonio e di azoto facenti parte di catene aperte.

La quarta, la quinta, la sesta e la settima serie di esperienze miravano a riconoscere come influiva sul fenomeno delle soluzioni solide la sostituzione al gruppo CH_2, in catena aperta, del gruppo NH e dell' azoto. Infine, con l'ottava esperienza volevamo vedere qual cambiamento produceva nella configurazione molecolare di un corpo, la sostituzione di un atomo di azoto ad un metino non facente parte di un nucleo.

I. — Mentolo e timolo.

Era assai probabile che questi due corpi fornissero un' anomalia crioscopica perchè ambedue a struttura ciclica e differenti solo per 6 atomi di idrogeno. Per renderla più evidente volemmo impiegare il mentolo come solvente ed il timolo come corpo sciolto, avendo quest' ultimo punto di fusione più elevato. Ma, per la tendenza del mentolo a rimaner sovrafuso, per la lentezza con la quale esso assume lo stato cristallino ci fu impossibile determinarne con esattezza la costante.

Dal calore latente di fusione (cal. 18, 9, Bruner) [1], si calcolerebbe $K = 105$, laddove le nostre esperienze (che verranno comunicate altrove in dettaglio), piuttosto discordi fra loro, darebbero in media $K = 120$. Non ci riescì poi di stabilire, neppure con approssimazione, qual' è l'abbassamento del punto di congelazione che produce il timolo sciolto nel mentolo. La presenza del primo corpo (che ha esso pure gran tendenza a rimaner sovrafuso), ritarda tanto la cristallizzazione del mentolo, che le determinazioni delle temperature di congelamento riescono impossibili.

Migliori risultati invece abbiamo ottenuti sciogliendo il mentolo nel timolo. Anche questo corpo presenta in parte gli inconvenienti del mentolo, ma in grado molto minore, tanto che è possibile determinarne la costante, trovata già da Eykman [2] uguale a 83,5. Eseguimmo tuttavia noi pure alcune determinazioni in timolo sciogliendovi la naftalina, essendo i valori delle costanti facilmente variabili di qualche unità, a seconda della purezza maggiore o minore dei prodotti impiegati e del metodo seguito per far le

[1] Berichte, XXVII, pag. 2106.
[2] Zeitschrift für phys. chem., IV, pag. 497.

misure. Poniamo di confronto i risultati avuti con la naftalina e col mentolo:

Solvente: Timolo, p. f. 48°,5

Mentolo, $C_{10}H_{20}O = 156$

concentrazione	abbassamento	abbass. mol.	peso mol. K = 83
	°		
1,157	0,57	76,8	168
2,411	1,14	73,7	175
4,206	1,97	73,0	177
6,246	2,94	73,4	176

Naftalina, $C_{10}H_8 = 128$

concentrazione	abbassamento	abbass. molecolare	peso mol. K = 83
	°		
1,083	0,73	86,3	123
2,525	1,61	81,5	130
4,467	2,78	79,6	133

Riesce evidente che il mentolo ha, in timolo, comportamento crioscopico anomalo, e se l'anomalia non è più manifesta, ciò va attribuito anche al modo tutto speciale col quale questi corpi si comportano nel congelamento. L'anomalia va spiegata con la separazione di soluzione solida giacchè, data la natura del solvente che ha sensibile azione dissociante, non si può invocare in tal caso la formazione di molecole complesse. Non esiste studio cristallografico del mentolo, nè si poterono ottenere cristalli misurabili, onde per questo rispetto non lo si può comparare col timolo.

Ci sembra quindi d'esser nel vero asserendo che mentolo e timolo formano soluzione solida: onde anche questi due corpi, assai diversi da quelli sin qui studiati e che pur differiscono per ben 6 atomi di idrogeno, seguono, rispetto al fenomeno della soluzione solida, la regola secondo la quale l'idrogeno addizionato, finchè non distrugge la struttura ciclica, non induce nei corpi rilevanti variazioni di configurazione molecolare.

II. — Determinazioni in dibenzile.

Col dibenzile presenta grande somiglianza lo stilbene. Tuttavia non si poteva dire, a priori, che le due sostanze avrebbero formato soluzione solida perchè i due atomi di idrogeno che sono in più nel dibenzile sono attaccati a due carbonii in catena aperta. I casi fino ad un certo punto analoghi fin qui studiati (diidroisapiolo ed isapiolo), rendevano anzi possibile che il fenomeno più non si avverasse.

Riconoscemmo subito che lo stilbene innalza, anche a concentrazioni molto basse, il punto di congelazione del dibenzile. I due corpi congelando insieme, mostrano quindi il comportamento delle sostanze isomorfe e noi credemmo opportuno di studiare dettagliatamente il congelamento delle miscele di dibenzile e stilbene. Ciò specialmente pel nuovo interesse che hanno acquistato le miscele isomorfe, dopo che Bruni [1] ebbe dimostrato che le

[1] Gazz. chim., 1898, p. II, pag. 323.

regole di Küster, contro le quali uno di noi già aveva sollevato obbiezioni [1] sono in disaccordo, oltrechè coi risultati dell'esperienza, anche con le moderne teorie fondate sulla termodinamica.

Sostanze impiegate		Molecole in 100		Punto di congelam.		Differenze
Dibenzile gr.	Stilbene gr.	Dibenzile	Stilbene	osservato	calcolato secondo Küster	
10,00	—	100,—	—	51°,3	—	—
»	0,0592	99,41	0,59	51,54	51°,69	— 0°,15
»	0,0838	99,16	0,84	51,64	51,85	— 0,21
»	0,1213	98,79	1,21	51,80	52,10	— 0,20
»	0,2565	97,47	2,53	52,3	52,97	— 0,67
4,725	0,2124	95,66	4,34	52,65	54,16	— 1,51
»	0,3396	93,24	6,76	53,8	55,75	— 1,95
»	0,4841	90,62	9,38	56,9	57,47	— 0,57
»	0,6175	88,33	11,67	59,7	58,98	+ 0,72
»	0,7398	86,33	13,67	62,1	60,30	+ 1,80
»	0,8883	54,03	15,97	64,75	61,81	+ 2,94
»	1,0070	82,28	17,72	66,6	62,96	+ 3,64
»	1,2145	79,39	20,61	69,7	64,86	+ 4,84
»	1,4968	75,75	24,25	73,25	67,26	+ 5,99
»	1,8007	72,18	27,82	76,55	69,61	+ 6,94
»	2,160	68,39	31,61	79,85	72,10	+ 7,75
»	2,5672	64,54	35,46	82,8	74,63	+ 8,17
2,133	1,3947	60,23	39,77	86,3	77,47	+ 8,83
»	1,6860	55,60	44,40	89,2	80,53	+ 8,67
»	2,0328	50,93	49,07	92,3	83,59	+ 8,71
»	2,4124	46,65	53,35	94,9	86,40	+ 8,50
»	2,8494	42,54	57,46	97,2	89,11	+ 8,09
4,333	6,254	40,66	59,34	107,7	90,34	+ 17,36
3,6493	»	36,59	63,41	108,9	93,03	+ 15,87
3,0766	»	32,72	67,27	109,85	94,57	+ 15,28
2,4724	»	28,11	71,89	111,0	98,60	+ 12,40
1,8998	»	23,11	76,89	112,15	101,90	+ 10,25
1,3987	»	18,10	81,90	113,3	105,19	+ 8,11
0,9685	»	13,27	86,73	114,4	108,37	+ 6,03
0,5866	»	08,48	91,52	115,3	111,52	+ 3,78
0,3524	»	5,27	94,73	115,95	113,64	+ 2,31
0,1790	»	2,75	97,25	116,55	115,29	+ 1,26
0,0692	»	1,07	98,93	116,8	116,4	+ 0,40
—	»	—	100,—	117,1	—	—

(1) Gazz. chim., 1894, II, 263.

In questo come in casi simili nei quali la differenza dei punti di fusione fra le due sostanze è notevole, i punti di congelamento delle varie mescolanze differiscono molto da quelli calcolati secondo Küster.

Lo stilbene tende a prevalere nei cristalli primi a separarsi, onde la curva di congelamento si trova per la massima parte al disopra della retta colla quale dovrebbe coincidere secondo la regola di Küster.

Ma, prima di entrare nella discussione di queste esperienze, comunichiamo nel quadro seguente le determinazioni crioscopiche eseguite sulle soluzioni in dibenzile, dei corpi azotati che sono con esso in istretta relazione.

Diremo per incidenza che il dibenzile è, per molti rispetti, uno dei migliori solventi per crioscopia che ci fu dato sperimentare. Ne determinammo la depressione costante sciogliendovi *benzolo*, *acetofenone*, *etere malonico*, *naftalina* e trovammo, come media dei risultati concordantissimi, il valore 72. Come gli altri idrocarburi fin qui sperimentati, ha debole potere dissociante e l'acido acetico fornì quindi pesi molecolari quasi doppî dei teorici. Notizie più dettagliate su questo solvente saranno comunicate altrove: quì riportiamo solo i risultati ottenuti con l'*azobenzolo*, la *benzilanilina*, la *benzilidenanilina* e l'*idrazobenzolo*.

Azobenzolo, $C_{12}H_{10}N_2 = 182$.

concentrazione	abbass. termom.	depress. molecol.	peso molec. K = 72
0,4906	0°,165	61,21	214
1,0930	0,36	59,94	218
1,9350	0,63	59,27	221
2,717	0,87	58,28	225
3,891	1,235	57,76	228
5,456	1,705	56,88	230
6,975	2,165	56,49	232
8,850	2,70	55,52	236
10,845	3,27	54,88	238
14,348	4,20	53,28	245

Benzilidenanilina, $C_{13}H_{11}N = 181$

concentrazione	abbass. termom.	depress. molecol.	peso molec. K = 72
0,6686	0°,215	58,2	224
1,2630	0,415	59,4	219
1,9020	0,63	59,9	217
3,0710	1,035	61,0	213
4,5890	1,52	59,9	217
6,8400	2,235	59,1	220
8,6100	2,780	58,4	223

Benzilanilina, $C_{13}H_{13}N = 183$

0,5385	0°,190	64,5	204
1,056	0,38	65,8	200
2,106	0,765	66,4	198
3,329	1,20	65,9	200
4,729	1,65	63,8	206
6,116	2,09	62,5	210

Idrazobenzolo, $C_{12}H_{12}N_2 = 184$

0,6662	0°,27	74,57	177
1,673	0,65	71,49	185
2,868	1,11	71,21	186
6,209	2,28	67,57	196

Come si vede, di queste quattro sostanze, solamente l' idrazobenzolo si comporta in modo normale: le rimanenti forniscono pesi molecolari superiori ai teorici.

L'anomalia crioscopica dell'azobenzolo va sicuramente ascritta alla formazione di soluzione solida; nessun' altra spiegazione è possibile. Di più vedremo, che esistono strette relazioni cristallografiche fra i due corpi; ed i risultati avuti da Bruni e Gorni studiando le soluzioni di dibenzile in azobenzolo, gentilmente comunicateci, confermano i nostri.

Si dovrebbe conchiudere che i due gruppi $—CH_2—CH_2—$ e $—N=N—$ si possono sostituire in catene aperte senza causare grandi alterazioni nella configurazione molecolare; ma un solo esempio non può certo costituire una regola, tanto più che esporremo ora fatti dai quali risulta che la questione è assai complessa.

Anche per le soluzioni di benzilidenanilina in dibenzile non vi ha dubbio che l'anomalia deve ascriversi a soluzione solida: ciò sopratutto per l'andamento che mostrano i numeri ottenuti alle varie concentrazioni. Sarebbe stato utile studiare anche le soluzioni di dibenzile in benzilidenanilina, ma quest'ultimo corpo non serve bene come solvente in crioscopia, secondo quanto ebbe a comunicarci privatamente il dott. Bruni.

La benzilanilina in dibenzile è solo leggermente anomala: inoltre l'esistenza in questa base del gruppo NH, il quale sembra conferire a molti corpi attitudine a dare molecole complesse in soluzione di idrocarburi (es. acetanilide ed altre), permetterebbe anche di ascrivere in parte a quest'ultima causa l'anomalia osservata, benchè l'andamento del fenomeno non lo indichi chiaramente. Tale sospetto è tanto più giustificato, in quanto che vedremo che il dibenzile in benzilanilina ha comportamento quasi del tutto normale. È assai probabile dunque che i gruppi $—CH_2—CH_2—$, e $—CH_2—NH—$, in catene aperte presentino relazioni analoghe a quelle

degli altri già presi in esame; ma non si può per ora asserirlo con sicurezza.

Troviamo poi molto strano il comportamento normale dell'idrazobenzolo nel dibenzile e sarebbe prematuro, per ora, azzardare ipotetiche spiegazioni.

Fra il dibenzile, lo stilbene e l'azobenzolo esistono delle relazioni cristallografiche ben manifeste. Il dott. Boeris, che ha avuto la gentilezza di rivedere le vecchie misure esistenti e di sottoporre di nuovo questi corpi ad un accurato studio cristallografico, ci comunica:

Dibenzile.

Sistema cristallino: monoclino.
a : b : c = 2,08060 : 1 : 1,25217
β = 64°.6′

Forme osservate: (100) (001) ($\bar{2}$01) ($\bar{1}$11).

Angoli	Misurati limiti	Misurati medie	Calcolati	n
	° ′ ° ′	° ′		
(100):(11$\bar{1}$)	83,16-83,53	83,28	*	6
($\bar{1}$11):(11$\bar{1}$)	78,6 -78,15	78,9	*	4
($\bar{1}$11):(001)	59,25-59,31	59,28	*	3
(001):($\bar{2}$01)		66,30	66,21	1
(20$\bar{1}$):(100)	49,20-49,44	49,32	49.33	2
(001):(100)		63,50	64,6	1
($\bar{2}$01):($\bar{1}$11)	57,0 -57,3	57,1	56,56	3

	Azobenzolo	*Stilbene*
	Sist. crist.: monoclino	Sist. crist.: monoclino
	a:b:c = 2,10756:1:1,33123	a:b:c = 2,17015:1:1,40033
	β = 65°,34′	β = 65°,54′
Angoli		
	° ′	° ′
(100):(11$\bar{1}$)	81,49	81,25
($\bar{1}$11):(11$\bar{1}$)	75,22	72,50
($\bar{1}$11):(001)	61,10	63,23
(001):($\bar{2}$01)	67.27	68,7
(20$\bar{1}$):(100)	46,59	45,59
(001):(100)	65,34	65,54
($\bar{2}$01):($\bar{1}$11)	57,52	58,53

I tre corpi adunque si posson dire fra di loro isomorfi; di fatto vedemmo che le miscele di stilbene e dibenzile nel congelare si comportano come miscele isomorfe costituite da corpi aventi punti di fusione piuttosto distanti. L'azobenzolo, invece, quantunque fonda 18 gradi circa sopra il dibenzile, *ne abbassa il punto di congelamento*, in misura molto rilevante, benchè sempre

meno di quanto vorrebbe la teoria delle soluzioni. Il fatto merita di esser rilevato perchè è certo che, giudicando solo dalla comparazione cristallografica, si dovrebbe dire che tanto lo stilbene come l'azobenzolo in dibenzile costituirebbero miscele isomorfe. Noi scorgiamo anzi che le costanti geometriche dell'azobenzolo si avvicinano ancor più a quelle del dibenzile di quelle dello stilbene; ma, pur non tenendo conto di queste lievi differenze, bisogna convenire che l'azobenzolo e lo stilbene presentano lo stesso grado d'isomorfismo col dibenzile.

Da che procede dunque il diverso comportamento crioscopico dei due corpi? È arduo rispondere ora a tale quesito.

A nostro parere la comparazione cristallografica dei corpi si occupa di un'unica proprietà delle sostanze, la loro forma geometrica, importantissima senza dubbio, ma non la sola che influisca sulla possibilità dei corpi di formare cristalli misti.

Solo prendendo in esame tutte le proprietà fisiche dei corpi cristallizzati sarà possibile comparare razionalmente questi fra loro, e dedurne le relazioni stechiometriche. Del resto fin dal 96 (1) uno di noi rilevò che le relazioni di forma cristallina, pur avendo parte importante nel fenomeno delle soluzioni solide, non bastavano a spiegare tutti i fatti osservati. E contro le asserzioni di Küster (2) che volle asserire, anche in seguito, come tutti i casi presi in esame in tale Memoria non dipendessero per nulla dalle relazioni di costituzione, ma sempre si trattasse di miscele isomorfe, sia lecito a noi ricordare ancora che l'acido orto-amido-benzoico diverso dal benzoico pel grado di simmetria e per le costanti geometriche è tuttavia anormale crioscopicamente anche più dell'acido para amidobenzoico, che presenta col solvente relazioni morfortropiche. Ed altri casi potremo citare in seguito.

Tali fatti possono, è vero, trovare la loro spiegazione in fenomeni di isodimorfismo, o, in genere, di polimorfismo. Questa è l'opinione avanzata or son molti anni da Pasteur (3), il quale discutendo certi casi citati da Laurent (4), rileva l'impossibilità della formazione di cristalli misti fra due sostanze cristallizzate in due differenti sistemi, giacchè in tali condizioni non è immaginabile un riempimento uniforme dello spazio.

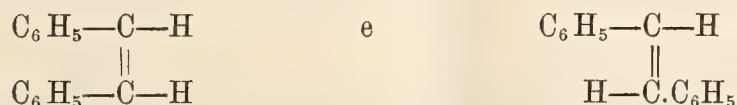
Le nostre osservazioni probabilmente si collegano con gli esempî portati da Muthmann (5) relativi a derivati dell'acido tereftalico e ad altri composti, i quali sono capaci di formare cristalli misti pur non mostrando, o solo lontane relazioni morfotropiche. Il Muthmann non crede neppure necessario di ricorrere all'ipotesi dell'isodimorfismo per spiegare tali fatti, e propone di

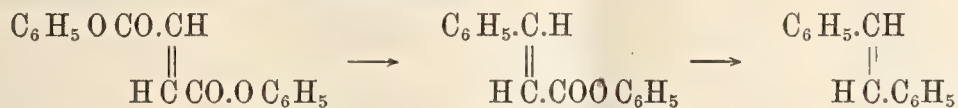
(1) Gazz. chim., 1896, I, pag. 61.
(2) Meyer, Jahrbuch, 1894, IV Band, pag. 94; 1896, pag. 19.
(3) Comptes-rendus, 1848, XXVI, pag. 535.
(4) Comptes-rendus, 1840, XI, pag. 635-876.
(5) Zeitschrift für Kryst., 1891, XIX, 357, 375.

chiamare tale fenomeno col nome di *sinomorfismo*. « *Sinomorfi sarebbero sostanze capaci di formare cristalli misti benchè non presentino alcuna somiglianza nella forma cristallina* ».

Comunque sia, facciamo rilevare la circostanza che le esperienze crioscopiche costituiscono ancora il mezzo migliore, più semplice e di applicazione generale, per svelare l'esistenza fra i corpi di queste relazioni d'isomorfismo, isopolimorfismo, sinomorfismo se vogliamo accettare altresì la distinzione fatta da Muthmann.

Le teorie stereochimiche fanno prevedere l'esistenza di due stilbeni isomeri e cioè:

$$\begin{array}{c} C_6H_5—C—H \\ \| \\ C_6H_5—C—H \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} C_6H_5—C—H \\ \| \\ H—C.C_6H_5 \end{array}$$

Non è noto fin'ora, con sicurezza, che un solo stilbene, quello che fonde a 124°. Nel 1897 R. Otto e F. Stoffel [1] annunziarono la scoperta del secondo stilbene, in una comunicazione preliminare alla quale non fece seguito nessun'altra. Questo nuovo stilbene sarebbe un olio che essi ricavarono dall'isobromuro di stilbene. Il comune stilbene, che servì alle nostre esperienze, a quale delle due forme corrisponde? La questione fu lasciata insoluta da Otto e Stoffel, da Wislicenus e Seeler [2], da Aronstein e Hollemann [3] che se ne occuparono. Taluni di questi autori anzi pare tendano ad attribuire al comune stilbene la forma prima, malenoide. Contro questo modo di vedere stanno a parer nostro, le proprietà fisiche dello stilbene (stabilità, elevato punto di fusione, ecc.) ed una sintesi fattane da Anschütz [4] partendo dall'etere difenilico dell'acido fumarico.

$$\begin{array}{c} C_6H_5O\,CO.CH \\ \| \\ H\,C\,CO.O\,C_6H_5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C_6H_5.C.H \\ \| \\ H\,C.COO\,C_6H_5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C_6H_5.CH \\ \| \\ H\,C.C_6H_5 \end{array}$$

nello stesso modo che Weselsky [5] ottenne il dibenzile dall'etere difenilico dell'ac. succinico.

A risolvere definitivamente la questione contribuiscono le nostre esperienze crioscopiche coadiuvate da quelle recentissime di Bruni e Gorni [6]. Questi autori, in accordo con le previsioni fatte da uno di noi nel 1894 [7], trovarono che gl'isomeri geometrici non mostrano, in genere, relazioni morfotropiche: onde, mentre l'etere dimetilico dell'acido fumarico è crioscopicamente anormale nell'etere dimetilico dell'acido succinico, è normale l'etere dime-

(1) Berichte, XXX, pag. 1799.
(2) Berichte, XXVIII, pag. 2693.
(3) Berichte, XXI, pag. 2831.
(4) Berichte, XVIII, pag. 1948.
(5) Berichte, II, pag. 518.
(6) Questi Rendiconti, seduta del 7 maggio 1899.
(7) Gazz. chim., 1894, parte II, pag. 261.

tilico dell' acido maleico. Dei due isomeri è dunque col fumarico che l' acido succinico ha relazione di configurazione, mentre questa non esiste più col maleico.

Ora dall' etere succinico si ottiene il dibenzile, dall' etere fumarico il comune stilbene. Questo per formare soluzione solida col dibenzile, deve avere con esso le relazioni di configurazione che passano fra etere succinico ed etere fumarico, cioè lo stilbene che fonde a 124° deve avere la forma fumarica.

Se verrà isolato lo stilbene malenoide si può sin d' ora prevedere, con gran probabilità d' esser nel vero, che avrà in dibenzile comportamento normale.

III. — Determinazioni in benzilanilina.

In questo solvente interessava sperimentare sopratutto il comportamento crioscopico del dibenzile, per le ragioni già dette, e quello della benzilidenanilina che presenta con la benzilanilina le stesse relazioni che passano fra dibenzile e stilbene. Studiammo inoltre anche l' azobenzolo e lo stilbene.

La benzilanilina non si presta bene come solvente. Con una certa difficoltà determinammo la costante impiegando come corpi normali, la naftalina, il benzolo, il trifenilmetano. La media dei valori ottenuti per l'abbassamento molecolare è 87.

Dibenzile, $C_{14}H_{14} = 182$.

concentrazione	abbass. termom.	abbass. molecolare	peso molec. K = 87.
1,180	0°,55	84,8	187
3,449	1,52	80,2	197
5,287	2,22	76,4	207

Stilbene, $C_{14}H_{12} = 180$.

concentrazione	abbass. termom.	abbass. molecolare	peso molec. K = 87.
1,323	0°,61	82,9	188
3,152	1,38	78,8	198
5,354	2,24	75,3	208

Azobenzolo, $C_{12}H_{10}N_2 = 182$.

concentrazione	abbass. termom.	abbass molecolare	peso molec. K = 87.
1,342	0°,65	88,1	179
3,283	1,50	83,1	190
5,473	2,36	78,4	201

Benziliden-anilina, $C_{13}H_{11}N = 181$.

concentrazione	abbass. termom.	abbass. molecolare	peso molec. K = 87.
1,097	0°,53	87,4	180
2,535	1,17	73,5	188
4,915	2,13	78,4	200
6,062	2,63	78,5	200

Tutti questi risultati sono certo assai dissimili da quelli che prevedevamo: essi sono fors' anche dovuti alla poca esattezza con la quale riescono le determinazioni in benzilanilina. D' altra parte sembrano indicare che l' anomalia crioscopica della benzilanilina in dibenzile (già da noi dimostrata) e quella della benzilanilina in azobenzolo (verificata da Bruni e Gorni e comunicataci in via privata), sono da ascriversi ad associazioni molecolari causate dai gruppi NH. Forse ambedue le cause concorrono nel fenomeno e lo rendono più complesso.

Ancor meno prevedibile era il comportamento normale della benzilidenanilina, giacchè fra questi due corpi passano le stesse relazioni come fra stilbene e dibenzile.

Forse le considerazioni sull' influenza della configurazione stereochimica fatte a proposito dello stilbene (si possono immaginare pure due benzilidenaniline stereoisomere), potranno spiegare questa eccezione inaspettata ad una delle regole meglio confermate dai fatti.

IV. — Trifenilmetano e trifenilammina.

Allo studio della modificazione che si produce nella configurazione molecolare di un corpo sostituendo ad un metino, non faciente parte di un nucleo, un atomo di azoto, si prestano bene il trifenilmetano e la trifenilammina.

Abbiamo determinato la costante del trifenilmetano sciogliendovi naftalina, azobenzolo e difenilammina, e trovammo, con soddisfacente accordo, il numero 124,5 — Invece la trifenilammina fornì una depressione alquanto minore.

Trifenilammina, $C_{18}H_{15}N = 245$.

concentrazione	abbass. termom.	abbass. molecolare	peso molec. K = 124.5
0,8033	0°,38	115,9	263
1,5098	0,76	116,5	261
2,828	1,31	113,5	268
4,393	2,05	114,4	266
5,707	2,70	115,9	263

L' anomalia, benchè non molto forte, esiste indubbiamente. Lo studio cristallografico dei due corpi, quale si desume dalle misure finora note [1], non lascia vedere relazioni morfotropiche fra di essi: sarà certo interessante appurare questa circostanza.

La conclusione che si può trarre dalle esperienze descritte in questa nota, ad onta delle eccezioni fatte rilevare, ci sembra la seguente: rispetto

[1] Hintze, Zeitschrift für Kryst., 1884, 9, 545.

alla formazione di soluzione solida fra sostanze sature e non sature, fra corpi azotati ed i corrispondenti idrocarburi, differenti fra di loro in catene aperte, sembrano valere in genere, le stesse regole già enunciate pei corpi ciclici. Però la possibile esistenza di stereoisomeri complica il fenomeno, pur rendendolo più interessante.

Paleontologia. — *Una nuova località di Ellipsoidina ellipsoides.* Nota del dott. A. SILVESTRI, presentata dal Socio TARAMELLI.

L' *Ellipsoidina ellipsoides*, specie fossile assai caratteristica, scoperta nel 1859 dal Seguenza in alcune marne terziarie del Messinese, ed in seguito da lui e da altri ritrovata in diverse marne pure terziarie della Sicilia e della Calabria, mi risulta finora sconosciuta recente o vivente, e fossile soltanto in rocce del distretto di Messina [1], dei dintorni di Siracusa [2], della provincia di Palermo [3], del territorio di Reggio-Calabria [4], dei dintorni di Catanzaro [5], delle Isole Salomone [6], e delle Isole Trinità e Barbados [7]. Notevole si è poi il fatto che le formazioni cui appartengono tali rocce siano tutte da attribuirsi al pliocene od al pleistocene [8], ed in Italia esclusivamente al piano più antico del pliocene inferiore, che il Seguenza volle distinguere col nome di *zancleano* [9]; le roccie stesse consistono in Italia in marne biancastre, giallastre o grigiastre, fra le prime delle quali si comprendono i così detti trubi della Sicilia, e ci rappresentano tutte sedimenti di antichi mari. Resultando dunque la *E. ellipsoides* come specie affatto pliocenica

(1) Seguenza, Costa, Fornasini.

(2) Seguenza.

(3) Seguenza, Ciofalo, De Amicis.

(4) Seguenza.

(5) Fornasini.

(6) Brady.

(7) Brady e Guppy.

(8) Sento il dovere di ringraziar qui e vivamente i sigg. Millett e Fornasini per le notizie favoritemi in proposito. Al sig. Millett sono poi in particolar modo riconoscente, avendomi egli partecipato il contenuto d'una lettera direttagli il 18 novembre 1889 da quell'autorità in fatto di Rizopodi che portava il nome di H. B. Brady, nella quale lettera si dice: « I have now got a considerable series of *post tertiary Ellipsoidinae* and have been spending a good deal of time on the genus ».

(9) È discutibile se allo *zancleano* debba mantenersi il valore di piano geologico distinto, o convenga invece attribuirsi quello di *facies* profonda dell'*astiano:* in questa nota adotto però i criterî del Seguenza.

o pleistocenica [1] e caratteristica nelle formazioni italiane dello *zancleano*, mi sembra di particolare interesse il poterne oggi segnalare la presenza in una roccia dell' Alta Valle del Tevere, o Valle Tiberina Toscana, cavata

[1] Si consultino in proposito le seguenti pubblicazioni:

Seguenza G., *Intorno ad un nuovo genere di Foraminiferi fossili del terreno miocenico di Messina* (Eco Peloritano, Giornale di sc., lett. ed arti, anno V, ser. 2ª, fasc, IX; Messina, 1859).

Idem, *Descrizione dei Foraminiferi monotalamici delle marne mioceniche del distretto di Messina* (Messina, 1862).

Idem, *Notizie succinte intorno alla costituzione geologica dei terreni terziarî del distretto di Messina* (Messina, 1862).

Brady H. B., *On Ellipsoidina, a new genus of Foraminifera*, etc., *with further notes on its structure and affinities* (Ann. and Mag. Nat. Hist., ser. 4ª, vol. I; London, 1868).

Seguenza G., *Studî stratigrafici sulla formazione pliocenica dell' Italia meridionale* (Boll. R. Comit. geol. it., vol. IV. Roma, 1873).

Idem, *Sulla Relazione di un Viaggio geologico in Italia del dott. T. Fuchs, coll' aggiunta di notizie e considerazioni del dott. A. Manzoni* (Boll. R. Comit. geol. it, vol. V. Roma, 1874).

Schwager C.. *Saggio di una classificazione dei Foraminiferi avuto riguardo alle loro Famiglie naturali* (Boll. R. Comit. geol. it., vol. VII e VIII; Roma, 1876 e 1877).

Ciofalo S., *Enumerazione dei principali fossili che si rinvengono nella serie delle rocce stratificate dei dintorni di Termini-Imerese* (Atti Acc. Gioenia Sc. nat., ser. 3ª, vol. XII; Catania, 1878).

Seguenza G., *Le formazioni terziarie nella provincia di Reggio* (*Calabria*) (Atti R. Acc. Lincei, Cl. sc. fis., mat. e nat., ser. 3ª, vol. VI; Roma, 1880).

Brady H. B., *Report on the Foraminifera dredged by H. M. S. Challenger, during the years 1873-1876* (Report on the scientific results of the voyage of H. M. S. Challenger during the years 1873-76. Zoology, vol. IX; Edimburg, 1884).

Idem, *Note on the so-called « Soapstone » of Fiji* (Quart. Journ. geol. soc., vol. XLIV; London, 1888).

Fornasini C., *Primo contributo alla conoscenza della microfauna terziaria italiana. Lagenidi pliocenici del Catanzarese* (Mem. R. Acc. sc. nat. Bologna, ser. 4ª, vol. X; Bologna, 1889).

Brady H. B., *Foraminifera from Barbados* (Quart. Journ. Geol. Soc., vol. XLVIII; London, 1892).

Fornasini C., *Foraminiferi delle marne messinesi, collezione Seguenza (Museo di Bologna)* (Mem. R. Acc. Sc. Ist. Bologna, ser. 5ª, vol. III; Bologna, 1893).

Gruppy J. L., *On some Foraminifera from the microzoic deposits of Trinidad, West Indies* (Proc. Zool. Soc. London, 1894).

De Amicis G. A., *La fauna a foraminiferi del pliocene inferiore di Bonfornello presso Termini-Imerese* (*Sicilia*). (Proc. verb. Soc Toscana Sc. nat. Pisa, 1894).

Fornasini C., *Contributo alla conoscenza della microfauna terziaria italiana, Foraminiferi delle marne messinesi. Collezioni Costa O. G. e G. Seguenza (Museo di Napoli).* (Mem. R. Acc. Sc. Ist. Bologna, ser. 5ª, vol. IV e V; Bologna, 1894 e 1895).

Rhumbler L., *Entwurf eines natürlichen Systems der Thalamophoren* (Nachr. K. Gesellsch. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse; Göttingen, 1895).

De Amicis G. A., *I Foraminiferi del pliocene inferiore di Bonfornello presso Termini Imerese in Sicilia.* (Naturalista Siciliano, anno XIV; Palermo, 1895).

a profondità comprese da 3 a 4 m. dalla superficie del suolo, a nord-est della città di Sansepolcro, ed a circa 200 m. di distanza dalla città medesima ([1]).

Detta roccia è una marna di color gialliccio, che trovasi immediatamente sottostante ad uno strato non molto potente (dai 2 ai 3 m.) costituito per la parte superficiale dal terreno coltivato, e per la sottostante da un ammasso confuso di terriccio e piccoli blocchi erratici di calcare e calcare marnoso, nonchè da grossi frammenti irregolari d' arenaria ([2]); trattata con la levigazione e col filtramento attraverso a stacci assai sottili, essa lascia un residuo sabbioso piuttosto grossolano e di color giallastro rossiccio, nel quale sono contenuti abbondanti Foraminiferi, alcuni Ostracodi, pochi dentini di Pesci, ed uno scarso tritume irriconoscibile di conchiglie a guscio calcareo, probabilmente di piccoli Molluschi.

Dati i Foraminiferi che racchiude, la roccia in questione è con la massima certezza un sedimento marino e, dallo studio dei Foraminiferi stessi ([3]), ritengo possa con qualche probabilità considerarsi formata in seno alle acque d' un estuario zancleano, e ad una profondità compresa dai 180 ai 500 m., ossia in quella suddivisione della zona batimetrica dei Brachiopodi e Coralli denominata dal Fischer zona dei *Brissopsis* ([4]). È poi molto notevole la rassomiglianza di *facies* da me riscontrata fra detti Foraminiferi e quelli trovati dal Seguenza nelle marne zancleane della Calabria, sulla quale rassomiglianza mi riserbo d' insistere, ma che gioverà mettere in evidenza fin da ora col presente elenco, in cui sono contrassegnate con asterisco tutte le forme precedentemente comparse nello zancleano della Calabria e Sicilia.

([1]) Debbo alla gentilezza del ch. ing. G. Martelli numerosi saggi della roccia, dalla sua prima comparsa alla profondità massima raggiunta nell'escavazione (4 m.). Non avendomi essi offerto nella costituzione litologica e nel contenuto in fossili, differenze della benchè minima importanza, ho reputato inutile di considerarli separatamente.

([2]) Alcuni di questi sono fossiliferi, e si riconoscono costituiti da agglomeramento di sabbie marine; dubito siano geologicamente contemporanei alla marna sottoposta, ma rimossi dalla loro posizione originaria, che forse veniva data da un letto sottile stratificato sulla marna.

([3]) Da pubblicarsi fra breve.

([4]) Fischer P., *Manuel de Conchyliologie et de Paléontologie conchyliologique.* Paris, 1887; pag. 186.

Foraminiferi della marna gialliccia di Sansepolcro.

Classe RHIZOPODIA. — Sottoclasse FORAMINIFERIAE.

Ord. IMPERFORIDA. — Sottord. MILIOLIDAE.

Famiglia **Nubecularinae.**

Nubecularia Defrance.

* *Nubecularia lucifuga?* Defrance.

Famiglia **Miliolininae.**

Spiroloculina d'Orbigny.

Spiroloculina planulata Lamarck, sp.

Biloculina d'Orbigny.

* *Biloculina depressa* d'Orbigny.

Famiglia **Cornuspirinae.**

Cornuspira Schultze.

Cornuspira involvens Reuss.

Sottordine ARENACIDAE.

Famiglia **Lituolinae.**

Haplophragmium Reuss.

Haplophragmium? sp?

Ordine PERFORIDA. — Sottordine LAGENIDAE.

Famiglia **Nodosarinae.**

Cristellaria Lamarck.

* *Cristellaria cassis* Fichtel e Moll, sp.
* " *rotulata* Lamarck, sp.
* " *cultrata* Montfort, sp.
" sp.?
" *gibba* d'Orbigny.
" *convergens* Bornemann.
* " *latifrons* Brady.

Rhabdogonium Reuss.

* *Rhabdogonium tricarinatum* d'Orbigny.

Frondicularia Defrance.

* *Frondicularia inaequalis* Costa.
" " var. *longissima* n. var.
" *biturgensis* n. sp.

Vaginulina d'Orbigny.

* *Vaginulina badenensis* d'Orbigny.
* " *legumen* Linné, sp.
" *budensis* Hantken.
" sp.? (*a*).
" sp.? (*b*).

Amphicoryne Schlumberger.

Amphicoryne sp.?

Marginulina d'Orbigny.

* *Marginulina glabra* d'Orbigny.
* " *costata* Batsch, sp.

Lingulina d'Orbigny.

* *Lingulina carinata* d'Orbigny.
" sp.?

Glandulina d'Orbigny.

* *Glandulina laevigata* d'Orbigny.
* " *aequalis* Reuss.

Nodosaria Lamarck.

Nodosaria ambigua Neugeboren.
" *geinitzi* Reuss.
* " *subaequalis* Costa.

Nodosaria ovalis Schmid.
» *reitzi?* Hantken, sp.
* » *simplex* Silvestri.
» sp. ? (*a*).
» *soluta* Reuss.
* » *pyrula* d'Orbigny.
* » *ovicula* d'Orbigny.
* » *longiscata* d'Orbigny.
» sp. ? (*b*)..
» sp. ? (*c*)
* » *scharbergana* Neugeboren, sp. (*N. binominata* Franzenau).
» sp. ? (*d*).
» *farcimen* Soldani, sp.
» sp. ? (*e*).
* » *communis* d'Orbigny sp.
» sp ? (*f*).
* » *roemeri* Neugeboren, sp.
* » *mucronata* Neugeboren, sp.
* » *badenensis* d'Orbigny, sp.
» *subulata* ? Neugeboren, sp.
* » *filiformis* d'Orbigny.
* » *emaciata* Reuss, sp.
* » *pauperata* d'Orbigny.
» *perversa* Neugeboren, sp.
* » *annulata* Reuss.
* » *monilis* Silvestri.
* » *hispida* d'Orbigny; var. *aspera* Silvestri.
» *perversa* Schwager.
* » *scalaris* Batsch, sp.
» *raphanus* Linné, sp.
* » *obliqua* Linné, sp.
* » *obliquata* Batsch, sp.
* » *pungens* Reuss, sp.

Famiglia **Lageninae.**

Ellipsoidina Seguenza.

**Ellipsoidina ellipsoides* Seguenza.

Lagena Walker e Boys.

**Lagena marginata* Walker e Boys, sp.
* » *laevis* Montagu, sp.
* » *globosa* Montagu, sp.
* » *distoma* Parker e Jones.
* » *gracillima* Seguenza.

Famiglia **Polymorphininae.**

Uvigerina d'Orbigny.

* *Uvigerina pygmaea* d'Orbigny.
» » var. *asperula* n. var.

Sottordine CHILOSTOMELLIDAE.

Famiglia **Chilostomellinae.**

Chilostomella Reuss.

* *Chilostomella ovoidea* Reuss.

Sottordine TEXTULARIDAE.

Famiglia **Testularinae.**

Gaudryina d'Orbigny.

* *Gaudryina pupoides* d'Orbigny.

Clavulina d'Orbigny.

* *Clavulina communis* d'Orbigny.
* » *parisiensis* d'Orbigny.

Testularia Defrance.

* *Textularia gibbosa* d'Orbigny.

Famiglia **Bulimininae.**

Bulimina d'Orbigny.

* *Bulimina ovata* d'Orbigny.
» *marginata* d'Orbigny.

Virgulina d'Orbigny.

Virgulina subsquamosa Egger.

Bolivina d'Orbigny.

Bolivina aenariensis Costa, sp.
» » var. *valdecostata* Mariani.

Bolivina robusta Brady.

Pleurostomella Reuss.

**Pleurostomella alternans* Schwager.

Sottordine ROTALIDAE.

Famiglia **Rotalinae.**

Anomalina Parker e Jones.

Anomalina grosserugosa Gümbel, sp.
* » *ammonoides* Reuss, sp.

Truncatulina d'Orbigny.

Truncatulina pygmaea Hantken.
» *wuellerstorfi* Schwager, sp.
» *praecincta* Karrer, sp.
* » *ungeriana* d'Orbigny, sp.
* » *haidingeri* d'Orbigny sp.

Rotalia Lamarck, *emend.* Parker e Jones.

Rotalia soldanii d'Orbigny, sp.
» » ? var. *gigantea* n. var.
» *broeckhiana* Karrer.

Pulvinulina Parker e Jones.

Pulvinulina brongniarti d'Orbigny, sp.

Sottordine GLOBIGERINIDAE.

Famiglia **Globigerinae.**

Globigerina d'Orbigny.

**Globigerina bulloides* d'Orbigny.
* » *aequilateralis* Brady.
» sp.? (*a*).
» sp.? (*b*).
* » *triloba* Reuss.
» *conglobata* Brady.
* » *gomitulus* Seguenza.

Orbulina d'Orbigny.

**Orbulina universa* d'Orbigny.
* » » var. *gemina* Terrigi, sp.

Famiglia **Sphaeroidininae.**

Pullenia Parker e Jones.

Pullenia sphaeroides d'Orbigny, sp.

Sottordine NUMMULITIDAE.

Famiglia **Polystomellinae.**

Nonionina d'Orbigny.

**Nonionina umbilicata* Montagu, sp.
» » var. *pompilioides* n. var.
» *depressula* Walker e Jacob, sp.

Polystomella Lamarck.

Polystomella macella Fichtel e Moll, sp.

La *Ellipsoidina ellipsoides* (fig. 1) mi si è presentata discretamente frequente; variabile in lunghezza da un minimo di 0,3 mm. ad un massimo di 1,13 mm., e sempre in una forma prossima alla tipica [1], ma leggermente più rigonfia secondo l'equatore, per cui molto rassomigliasi nel contorno a certe varietà della *Glandulina laevigata* d'Orb., anche perchè tutti gli esemplari raccolti resultano incompleti all'estremità orale. A causa della superficiale corrosione del loro guscio, comune del resto ai Foraminiferi rimanenti, e della rassomiglianza accennata, ho reputato opportuno di confermare la dia-

[1] Oltre alla forma tipica, si conoscono queste varietà della *E. ellipsoides*: var. *oblonga, abbreviata* e *sphaeroidalis* (Seguenza, sp.); var. *subnodosa* ed *exponens* (Brady, sp.).

gnosi mediante le sezioni, e queste sono riuscite fortunatamente tali da eliminare il più piccolo dubbio ed in pari tempo assai interessanti, mettendo chiaramente in evidenza la forma e disposizione delle logge, nonchè dei relativi raccordi tubolari (fig. 2 e 3).

Le *Ellipsoidinae* e gli altri Foraminiferi si osservano spatizzati, cioè riempiti di calcite cristallizzata e trasparente.

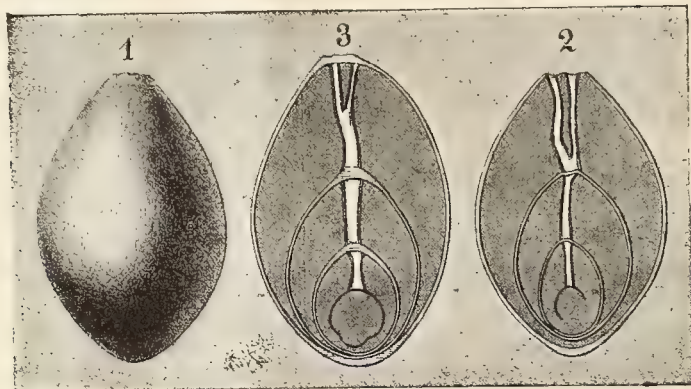



FIG. 1. — *Ellipsoidina ellipsoides*, Seguenza; aspetto esterno (× 45).
FIG. 2 e 3. — Idem. idem. sezione longitudinale principale (× 45).

Da queste prime ricerche sulla microfauna terziaria della Valle Tiberina Toscana, ritengo poter logicamente dedurre le seguenti conclusioni:

1.° Al principio del pliocene il fondo dell' Alta Valle del Tevere era ancora sommerso nelle acque d' un estuario.

2.° La costituzione dell' attuale vallata rimonta al massimo al secondo periodo del pliocene inferiore, ed è quindi decisamente posteriore al miocene.

3.° Esiste nella valle stessa una *facies* (marna) della formazione zancleana, che sembra contemporanea alla *facies* consimile (1) studiata dal Seguenza nel territorio di Reggio-Calabria.

(1) Il Seguenza distingue nello zancleano della Calabria tre *facies:* quella a *Molluschi* presentata dalle sabbie (depositi costieri), quella a *Molluschi* e *Foraminiferi* presentata dalle marne sabbiose (depositi di media profondità), ed infine quella a *Foraminiferi* offerta dalle marne comuni (depositi d'alto mare ed abissali).

Zoologia medica. — *Osservazioni generali sul modo di adesione dei Cestodi alla parete intestinale.* Nota di Pio Mingazzini, presentata dal Socio Francesco Todaro.

Dopo la pubblicazione della mia prima Nota: intorno al modo col quale le Tenie aderiscono alla mucosa intestinale [1], nella quale riferivo il risultato delle osservazioni fatte su due specie di Tenie del gatto (*Taenia crassicollis* e *Dipylidium caninum*), ho esteso le ricerche ad un certo numero di Vertebrati, che albergano differenti specie di Cestodi adulti, collo scopo di constatare se il fatto da me riscontrato per le due specie di Tenie del gatto, fosse generale per altre specie di Cestodi. Perciò ho esaminato l' intestino di varî Mammiferi (Topo, Cane, Pecora, *Plecotus*) quello di taluni Uccelli (Gallina, *Fulica atra* e *Glaucion clangula*) e Rettili (*Gougylus ocellatus* e *Lacerta muralis*) e di alcuni Pesci (*Mustelus laevis* e *Scyllium stellare*), avendo così l' opportunità di eseguire osservazioni sui generi disparati di Cestodi con scolice diversamente conformato. Così fra i Cestodi da me studiati ve ne sono di quelli provvisti di ventose e di rostello bene sviluppati (*Hymenolepis murina*, *Dipylidium caninum*) mentre altri non posseggono che le sole ventose (*Mesocestoides lineatus* e *Anoplotaeniae* della Pecora) ed infine ve ne ha di quelli provvisti non più di ventose, ma di botridî armati con forti uncini, quali i *Calliobothrium* parassiti degli Elasmobranchi.

L' esame di queste diverse specie di Cestodi fissate all' intestino, permette subito di constatare che la loro azione sulla parete del tubo digerente è alquanto diversa a seconda delle specie; perchè mentre la massima parte si limitano ad aderire alla superficie della mucosa, e coi loro uncini non penetrano che fra le cellule dell' epitelio, altre invece come i *Calliobothrium* penetrano cogli uncini fortissimi anche nel sottostante connettivo, distruggendo così l' epitelio nel punto traversato, e ve ne sono poi di quelle, come la *Stilesia*, che determinano attorno al punto in cui stanno infisse una notevole infiammazione della mucosa, estendentesi per un raggio di due o tre millimetri e protuberante verso il lume intestinale per una altezza di circa due millimetri, con neoformazione di vasi e di tessuto connettivo. Infine vi hanno anche talune specie, come i *Calliobothrium* suddetti, le quali in determinate circostanze si approfondano collo scolice e colla parte anteriore del corpo nei tessuti della mucosa, distruggendo per un tratto notevole l' epitelio, e penetrano in un vaso sanguigno, cioè in una vena, la quale perciò viene rotta e, nel tratto in cui contiene il corpo della Tenia, molto dilatata.

[1] Boll. Accad. Gioenia, fasc. LVI, Decembre 1898, Catania.

Le diverse parti dello scolice hanno nel processo di fissazione un differente comportamento sia per la varia natura loro, sia anche per quella

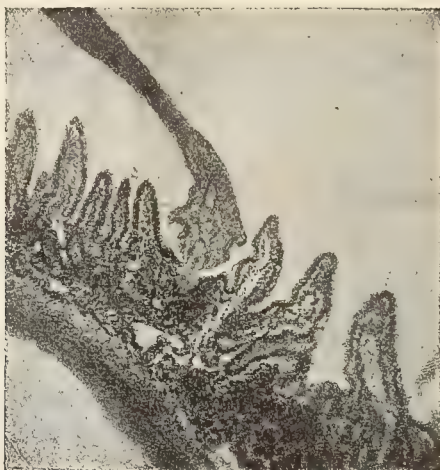



Fig. 1.
Sezione di intestino di *Mus decumanus* con *Hymenolepis murina* aderente.

delle pareti su cui aderiscono. Così l'*Hymenolepis murina* (fig. 1), che allo

Fig. 2.
Sezione di intestino tenue di cane con *Dipylidium caninum* aderente.

stato vivente, quando è fissata, sta sempre col rostello estroflesso (mentre fino ad ora se ne dubitava), penetra con esso più o meno profondamente

nel lume delle glandole del Lieberkühn; in taluni casi non giungendo che alla metà, ed in altri arrivando fino a toccarne il fondo, e non produce che una lieve alterazione nell' epitelio della glandola stessa, soltanto nei punti in cui la superficie del rostello e l' epitelio vengono a mutuo contatto. Gli uncini che trovansi all' estremità anteriore del rostello non perforano che le cellule epiteliali, e in molti casi le alterano alquanto, producendo un intorbidamento del loro contenuto e deformandole; in altri pochi casi possono anche distruggerle per un brevissimo tratto. Il *Dipylidium caninum* fissato col suo rostello sempre estroflesso alla mucosa del tenue del cane, o raggiunge semplicemente coll' apice del rostello le basi dei villi, ovvero si addentra di qualche poco nel lume delle glandole di Lieberkühn; altera pochissimo le cellule epiteliali delle glandole o delle basi dei villi ed i suoi uncini piccolissimi producono una semplice deformazione alle cellule epiteliali tra cui si trovano (fig. 2).

Non sempre le ventose si fissano all' epitelio, come avviene per la maggioranza delle specie da me studiate (Tenie del *Plecotus* e molte Tenie di Uccelli), ed aspirandolo determinano in esso quelle formazioni claviformi caratteristiche da me descritte a proposito delle due specie studiate nell' intestino del gatto. Ed a questo proposito farò rilevare che l' *Hymenolepis murina*, talora sì ed altre volte no, si vede aderire colle ventose all' epitelio intestinale del *Mus decumanus*; che quando l' adesione di esse avviene, l' epitelio forma entro la ventosa, il rialzo caratteristico, il quale assumendo la forma della cavità della ventosa che in questa specie non è regolarmente globulare, ma piuttosto cuboide, ha anche esso una figura cuboide. Ha poi un certo interesse lo studio del *Dipylidium caninum* fissato alla mucosa del cane, poiche questa tenia non si comporta nel cane come nel gatto; nel cane molto comunemente le ventose non determinano nell' epitelio alcun rilievo claviforme, ma si limitano ad aspirare da esso il succo che segrega, il quale si riscontra nella cavità delle ventose come una sostanza omogenea jalina, che ne riempie tutta la cavità. Quindi il *Dipylidium caninum* si attacca alla mucosa del cane meno fortemente che su quella del gatto, e ciò forse spiega la facile eliminazione colle feci di questo parassita dal cane, mentre ciò avviene assai raramente per il gatto.

Osservando i *Calliobothrium*, fissati alla mucosa dell' intestino di *Scyllium stellare* (figg. 3 e 4) si ha l' apparenza a prima giunta di un' aspirazione dell' epitelio determinata dai botridî; infatti in un gran numero di casi, sia nelle sezioni longitudinali, sia nelle trasverse si vede l' epitelio intestinale adattarsi alla varie cavità dei botridî, seguendo perfettamente gli infossamenti ed i rilievi di questi e presentando quindi un aspetto, che, per certi riguardi, si avvicina a quello che si ha colle ventose delle comuni tenie o *Tetracotylea*. Però con uno studio accurato, si può constatare come i botridî non abbiano una vera forza aspirativa simile a quella esercitata dalle

vere e proprie ventose od *acetabula*, ed i varî rilievi e infossamenti dell' epitelio si presentano tali piuttosto per la pressione esercitata da questi organi sul tessuto, che da un'azione di vero succhiamento. Infatti i *Calliobothrium*, col loro scolice notevolmente sviluppato, penetrano fra gli stretti interstizî esistenti tra le pieghe della mucosa e vanno fino al fondo di essi; dilatano perciò (fig. 5)

Fig. 3.
Sezione di intestino tenue di *Scyllium stellare* con un *Calliobothrium* aderente.

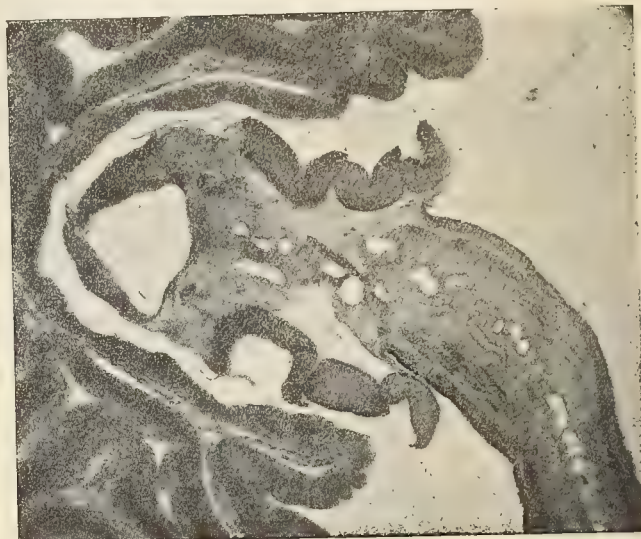



Fig. 4.
Sezione di intestino tenue di *Scyllium stellare* con un *Calliobothrium* aderente.

le lamine formanti le pieghe per poter effettuare la loro penetrazione e per effetto di ciò i botridî si applicano con forza sull' epitelio assai alto che riveste internamente la mucosa, il quale si adatta alla forma dei rilievi e avvallamenti di botridî stessi. Il verme sta fissato fortemente per opera dei fortissimi uncini di cui i botridî sono armati nella loro estremità anteriore, e per la pressione delle lamine allontanate dallo scolice del parassita. La mucosa intestinale dello *Scyllium* non viene alterata per opera del parassita, e nemmeno la lacerazione dell' epitelio e della tunica propria fatta dagli uncini non provoca alcun fenomeno infiammatorio in questi tessuti. Appena appena si può rilevare qualche alterazione dei tessuti circostanti quando i *Calliobothrium* lacerano un pezzo di mucosa e vanno con parte del loro corpo nel lume di una vena; in questo caso in diretta vicinanza del parassita, si ha un po' di sangue fuoriuscito dal vaso e il connettivo adiacente mostra una leggiera proliferazione; tutto il resto si presenta ben conformato e di aspetto normale (fig. 6).

Invece le Tenie del gruppo delle Anoplocefaline od *Anoplotaeniae* di Railliet, appartenenti ai generi *Moniezia* e *Stilesia* parassite della Pecora, determinano nella mucosa dell' intestino tenue di questo animale, come già

aveva notato il Rivolta, delle caratteristiche neoformazioni aventi la forma di elevazioncelle, fatte da noduli infiammatorî, della grandezza di un pisello, e nel caso in cui vi siano più Tenie vicine, aderenti col loro scolice alla mucosa, questi noduli sono maggiori e non più a contorno esterno circolare, ma piuttosto irregolare e dipendente dalla posizione e dal numero degli

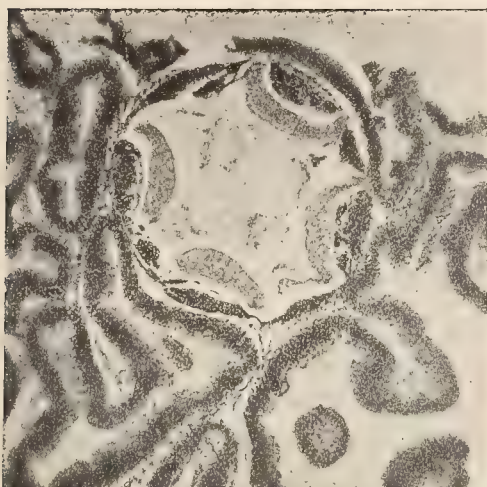



Fig. 5.
Sezione di intestino tenue di *Scyllium stellare* con un *Calliobothrium* aderente, il cui scolice è stato sezionato trasversalmente.

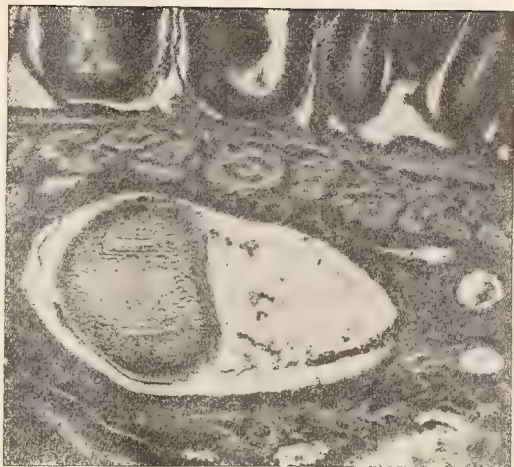



Fig. 6.
Sezione di intestino tenue di *Scyllium stellare* con un *Calliobothrium* il cui corpo era in parte contenuto nel lume di una vena.

scolici infissi. Tali noduletti sono crateriformi e nel loro centro si osserva una depressione corrispondente al punto di attacco della Tenia alla mucosa. Nelle sezioni traverse si notano per talune specie i seguenti fatti: *a*) attorno al punto in cui la Tenia sta infissa, le glandole del Lieberkühn sono notevolmente accresciute in altezza; tale accrescimento è progressivo dalla periferia del nodulo al centro; *b*) il connettivo sottomucoso presenta anch' esso un notevole accrescimento in corrispondenza del nodulo; l' accrescimento come per le glandole del Lieberkühn è progressivo dalla periferia al centro; *c*) in questo connettivo sottomucoso si formano dei follicoli linfatici, i quali sono in numero di tre o di quattro per ogni nodulo mediocremente sviluppato; *d*) la muscolare si presenta dello spessore normale in entrambi i suoi strati, ma in tutta l' area corrispondente al soprastante nodulo le sue fibre si mostrano infiltrate di corpuscoli linfoidi molto grandi con corpo intensamente colorabile; *e*) nella sierosa, in corrispondenza al nodulo si osserva una neoformazione di tessuto adiposo, il cui spessore è massimo a livello del centro del nodulo; *f*) in questo tessuto adiposo della sierosa si vedono neoformati grossi vasi sanguigni (arterie e vene) provenienti dalla proliferazione dei grossi vasi sanguigni del connettivo sottomu-

coso; *g*) la Tenia aspira fortemente colle sue ventose dai tessuti circostanti elementi figurati che si trovano entro la cavità della ventosa a formare un detrito granuloso che la riempie tutta o in gran parte. La testa della Tenia sta infossata profondamente entro il centro del nodulo e non si distacca che con difficoltà. Ma non tutte le specie appartenenti al gruppo delle *Anoplotaeniae* si comportano nello stesso modo; ve ne sono talune le quali determinano soltanto i fatti indicati nei paragrafi *a*) e *b*). Noi abbiamo in questi casi il fatto di Tenie inermi e sprovviste di rostello, determinanti gravi alterazioni locali nel punto in cui si fissano, estendentisi per un raggio di qualche millimetro all' intorno del punto di infissione. Al di là del limite di questi noduli tutto il resto della mucosa si presenta normale.

Dalle presenti ricerche risulta anche un fatto interessante circa l' aspetto reale che hanno i Cestodi allo stato vivente. Siccome nello studio da me eseguito essi vengono fissati e osservati nella stessa posizione e forma che posseggono allo stato vivente, e non hanno il tempo di ritrarsi e di alterare la conformazione dello scolice prima di essere fissati, come succede cogli ordinarî metodi delle indagini parassitologiche, mediante i quali i parassiti si staccano dalla mucosa quando sono ancora viventi o anche morti e quindi si fissano, così ne consegue che l' aspetto da essi presentato col metodo da me adottato è quello naturale del verme allo stato vivente. Ed io per un certo numero di di specie (*Hymenolepis murina*, *Dipylidium caninum*, *Hymenolepis diminuta*, *Mesocestoides lineatus* ecc.) ho ottenuto una configurazione dello scolice assai diversa da quella che viene ordinariamente disegnata dai più distinti parassitologi, sopratutto pel fatto del rostello estroflesso, della posizione degli uncini, della forma delle ventose e di tutto lo scolice. Lo stesso metodo di osservazione mi ha dato anche notevoli risultati per quanto riguarda la costituzione anatomica dello scolice e sopratutto del rostello, sul quale vi sono ancora molti dati incerti ed altri anche erronei. Così per il rostello dell' *Hymenolepis murina*, studiato da molti autori (Leuckart, Grassi e Calandruccio, R. Blanchard, Zograf) nel quale si ammettono muscoli circolari e longitudinali od anche semplicemente muscoli spirali (Zograf), io sono venuto alla conclusione collo studio comparato di rostelli estroflessi, introflessi ed in posizione intermedia, che vi sono semplicemente in esso dei muscoli longitudinali variabile di configurazione a seconda delle varie posizioni del rostello. Inoltre ho trovato assai complicata la formazione del detto rostello, sebbene fondamentalmente essa si possa riportare al tipo di quello della *T. crassicollis*, che è stato anch' esso oggetto di ricerche da parte di numerosi osservatori. Così ho visto che nell' interno di esso si ramificano due vasi acquiferi partenti dal sistema dei vasi acquiferi dello scolice; che lateralmente e verso il terzo posteriore vi sono due accumuli di piccole cellule ramificate, che potrebbero interpretarsi come gangli nervosi proprî del rostello, e che lateralmente, sul terzo anteriore vi è uno spazio interposto fra il tegumento e la massa mu-

scolare, nel quale si invagina porzione del tegumento stesso del terzo anteriore nell' atto della retrazione del rostello; e infine vi è una massa di muscoli proprî degli uncini, di forma lenticolare, posta all' apice del rostello e separata dai muscoli retrattori proprî del rostello da un cuscinetto conico di sostanza fibrillare e di aspetto caratteristico. La disposizione e la forma di tutte queste parti intrinseche del rostello, varia assai negli stati di estensione e di retrazione di esso, insieme alla forma generale di tutto l' organo.

Infine va rilevato che le Tenie fissate alla parete intestinale producono tutto al più lesioni locali limitate al punto in cui aderiscono, o che si estendono per un raggio di qualche millimetro all' intorno. È quindi poco probabile che nell'uomo soltanto esse possano produrre lesioni estese ad una gran parte della mucosa intestinale, come in molti casi è stato ammesso dai dai reperti necroscopici di persone invase da questi parassiti. Così fra le specie da me studiate vi è l'*Hymenolepis murina*, da taluni creduta identica od al più una semplice varietà dell' *H. nana* dell' uomo, la quale, come abbiamo visto, non determina che una piccolissima degenerazione dell'epitelio, localizzata nel punto di contatto fra il rostello e l' epitelio stesso, e talvolta un rialzo formato dall' aspirazione delle ventose. Sebbene Grassi e Calandruccio esaminando la stessa specie nello stesso ospite, abbiano asserito che nel punto in cui sta fissata, sembra circondata da connettivo ricco, di leucociti, io ho trovato, riesaminando lo stesso preparato che servì ai detti autori per asserire questo fatto, che in realtà il connettivo della tunica propria in vicinanza del punto di attacco non è più ricco di leucociti del normale. In ogni modo, se nell' intestino umano la *H. murina* o *nana* agisce come nell' intestino del topo, non si possono certamente attribuire a questo Cestode le gravissime alterazioni anatomiche riscontrate in qualche caso di *H. nana* nella mucosa intestinale dell'uomo (casi di Visconti e Segre e caso di Grassi) estese per gran parte del tenue; e ciò sembra tanto più probabile, perchè in una grandissima percentuale di reperti di *H. nana*, gli individui infetti non presentano alcun disturbo. È quindi ammissibile che le lesioni riscontrate nel tenue dell' uomo in presenza di *H. nana*, siano piuttosto attribuibili a fatti patologici concomitanti colla presenza del Cestode e non derivati da questo. Altrettanto però non si può dire per i fenomeni nervosi che si constatano in taluni bambini infetti da *H. nana* e che scompariscono dopo la eliminazione di questa, perchè forse essi possono attribuirsi ad un veleno segregato dal parassita, che non altera la costituzione anatomica dell' intestino, ma agisce sui centri nervosi.

Anatomia. — *Osservazioni sopra l'anatomia degli Pseudoscorpioni.* Nota del dott. Felice Supino, presentata dal Socio B. Grassi.

Quantunque sopra l'anatomia degli Pseudoscorpioni esista il completo lavoro di Croneberg [1], ho creduto tuttavia opportuno riprendere l'argomento, per chiarire alcune quistioni controverse e per spiegare talune cose che nella memoria del Croneberg mi sembravano poco soddisfacenti. Ond'è che nella presente Nota io, avendo nella maggior parte delle cose riscontrato esattamente quanto disse il Croneberg, anzichè esporre per intero l'anatomia degli Pseudoscorpionidi, per la quale rimando al suo lavoro, mi limiterò a trattare appunto di quelle quistioni e di quelle nuove interpretazioni che ho creduto di dare ad alcuni organi.

Non starò a parlare della tecnica da me adoperata, perchè non presenta niente di speciale; certo che, a differenza di quanto ha fatto il Croneberg, mi sono occupato ed ho dato maggiore importanza allo studio istologico dei varî organi che alla semplice dissezione.

Solo dirò che, essendo questi animali fortemente chitinizzati, occorre una buona fissazione ed inclusione, se si vogliono ottenere sezioni regolari nelle quali la chitina e le altre parti non si trovino spostate; ed io ho potuto avere buone preparazioni, uccidendo e fissando al tempo stesso gli animali con la soluzione acquosa satura di sublimato bollente.

Le colorazioni che mi hanno dato migliori risultati sono l'orceina, l'emallume, e l'emallume ed eosina o safranina.

Ho creduto opportuno di dare alcune figure a complemento della descrizione di quelle parti dell'anatomia che più mi sembrarono degne di attenzione. La specie da me presa in esame è il *Chernes Hanii* Koch o *Chelifer cimicoides* Fabr., la quale io trovai molto facilmente ed in abbondanza nel fieno e fra i calcinacci dei muri vecchi in vicinanza dei fienili.

Ghiandole. — Fra le ghiandole conviene prima di tutto menzionare quelle che si trovano nel cefalotorace. Esse, come già sappiamo e come descrisse giustamente anche il Croneberg, sono in numero di due, presentano grandezza variabile e si trovano collocate al di sopra del ganglio cefalico in modo da ricoprirlo completamente. I loro condotti escretori penetrano nei cheliceri e vanno a sboccare all'apice del dito mobile (fig. 1 *a*). Ma quello che più che altro qui ci interessa, è il significato fisiologico di queste ghiandole.

[1] Croneberg, *Beitrag zur Kenntniss des Baues der Pseudoscorpione.* Bull. Soc. Imp. d. Naturalistes. Moscou, n. 3, 1888.

Il Croneberg ammette che esse sieno gli organi della seta, ed è indotto a pensar ciò, prima di tutto perchè non ha trovato ghiandole della seta in nessuna altra parte del corpo, e poi perchè a lui sembra che l'intera struttura della chela sia più atta ad agire come organo riordinatore dei fili della seta, che non come organo di prensione.

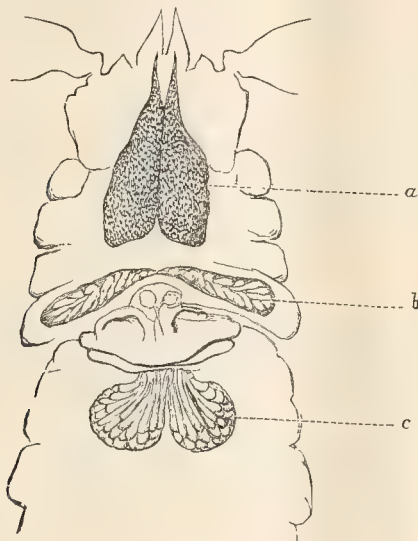



Fig. 1.

Figura in parte ricostruita per mostrare la posizione relativa delle varie ghiandole — *a*) ghiandole velenifere; *b*) ghiandole della seta; *c*) ghiandole adesive (Ob. 2 oc. 2 Koristka).

Secondo le mie ricerche le cose andrebbero diversamente.

Intanto io sarei indotto a non considerare queste ghiandole come organo della seta, e ciò sia perchè ho potuto riscontrare le ghiandole tessili in altra parte del corpo, come ora vedremo, sia perchè la loro struttura, il loro contenuto e anche la loro posizione, fa capire che non si può qui trattare di organi tessili.

Sembra logico escludere che si possa avere a che fare con ghiandole salivari, visto che non hanno alcun rapporto con l'apparato digerente; mentre confrontando queste ghiandole con quelle che si trovano in molti Araneidi, è logico interpretarle come organi velenosi. Anche la loro posizione fa pensare che esse non soltanto sieno analoghe alle ghiandole velenose che si trovano negli Araneidi, ma anche omologhe.

Di più, nel loro interno si vedono come tante goccioline che fanno pensare ad una sostanza liquida che non ha niente a che fare con sostanza serica; non presentano struttura tale che possa nemmeno farle assomigliare a ghiandole tessili, ed inoltre esse sboccano nei cheliceri, ciò che secondo me

è una prova di più che si tratta di organi velenosi. Infatti è più naturale ammettere che i cheliceri servano ad uccidere e prendere la preda, che non, come vuole il Croneberg, a riordinare i fili della seta.

Altre ghiandole che c' interessano, sono quelle che si trovano al di dietro (lato caudale) dell' apertura sessuale (fig. 1, *c*). Esse hanno forma diversa nei due sessi e la loro struttura fu descritta così bene dal Croneberg, che ritengo inutile di trattarla qui. Anche sul loro significato fisiologico io sono d' accordo col Croneberg, ritenendo che debbano considerarsi non come organi tessili, come vuole qualcuno, ma piuttosto come ghiandole di adesione facenti parte dell' apparato sessuale.

Ma oltre le ghiandole finora descritte, ne esistono delle altre la cui presenza è probabilmente sfuggita al Croneberg e agli altri osservatori, e queste sono appunto quelle che io ritengo ghiandole tessili.

FIG. 2.
Sez. di una ghiandola della seta molto ingrandita (Ob. 8. oc. 3 Koriostka).

Già Menge [1] aveva descritto nei Chernetidi i tubi tessili, e li aveva riscontrati prima dell' apertura sessuale; ma il Croneberg ha poi riconosciuto che ciò che Menge riteneva per tubi tessili, non erano invece che ripiegature chitinose, le quali perciò non avevano niente a che fare con ghiandole.

Io però ho riscontrato che dal lato cefalico o anteriore dell' apertura sessuale, esistono due ghiandole la cui struttura ed il cui contenuto non possono far dubitare di avere a che fare con organi della seta (fig. 1 *b*, 2). Le figure, mi pare, spiegano a sufficienza la cosa. Esse, in una sezione orizzontale, si presentano sotto forma di due sacchi molto allargati che possiedono, come tutte le ghiandole sericifere, una tunica propria e una tunica intima. Nel loro lume sporgono tanti tubilli cuticolari (fig. 2*a*) dai quali si vedono uscir

(1) Menge, *Ueber die Scheerenspinnen.* N. Schr. d. Naturf. Gesellsch. zu Danzig. Bd. 5. 1885.

fuori i fili della seta (fig. 2*b*). Queste ghiandole si trovano collocate alla base del cefalotorace a livello del quarto paio di arti, e il loro sbocco avviene, con un unico condotto per ciascuna ghiandola, in corrispondenza del primo segmento addominale.

Dunque, concludendo, esistono nel corpo degli Pseudoscorpionidi tre paia di ghiandole principali: un paio al cefalotorace, velenifere; un paio dal lato cefalico degli organi sessuali, tessili; e un paio dal lato caudale degli organi sessuali, adesive.

Ciò è importante per il fatto, che oggi da tutti si ritiene che le ghiandole della seta si trovino in questi animali al cefalotorace, ed anche in alcuni dei migliori trattati di Zoologia e Anatomia comparata, si accenna a questa disposizione, che io credo ormai aver dimostrata erronea. Con tale spiegazione, anche la funzione dei cheliceri ritorna, mi pare, nei suoi confini naturali.

Apparecchio digerente. — Ciò che di questo apparecchio ci interessa maggiormente, è il così detto fegato o ghiandola addominale. Più propriamente dovrebbe chiamarsi ghiandola epato-pancreo-nefrica, poichè essa ha insieme all' intestino parte importante nella digestione e probabilmente funge anche da organo escretore, mancando qui i tubi Malpighiani. Essa occupa quasi tutta la cavità del corpo dell' animale ed è costituita di tanti lobi quanti sono i segmenti. Questi lobi sono formati di un' esile membrana dentro la quale si trovano cellule ripiene di granulazioni e di goccioline di color bruno o giallo e formano nell' insieme un apparecchio molto complicato. I lobi comunicano tra loro e vanno a sboccare nell' intestino.

Apparecchio circolatorio. — Sul cuore degli Pseudoscropioni esistono controversie fra i vari autori. Lasciando da parte Menge che non ha potuto riscontrarlo, Daday [1] trovò che esso è costituito da un vaso dorsale avente quattro ostii per lato, e terminante alla sua estremità posteriore con un rigonfiamento a forma di rosetta. Questa rosetta è formata di otto ventricoli piriformi a pareti muscolari spesse, divisi in tre gruppi, uno centrale più grande costituito di due ventricoli, e due laterali simmetrici di tre ventricoli ciascuno. Il Winkler [2] invece ha osservato che il cuore dell' *Obisium* è costituito di un tubo terminante in punta e con un solo ostio da ogni lato collocato all' orlo inferiore del cuore.

Secondo il Croneberg le cose andrebbero altrimenti, ed io ho potuto riscontrare la verità delle sue asserzioni. Il cuore dunque è formato di un vaso

[1] Daday, *Az'Alskorpiók vérkeringési szervéröl.* Természetrajzi Füzetek. Vol. IV. p. 4. 1880.

[2] Winkler, *Das Herz der Acariden.* Wien 1886.

dorsale che va dal ganglio cefalico al quarto segmento addominale. Esso nel *Chernes* presenta tre ostii per lato e termina alla sua estremità posteriore tripartito. È rivestito, secondo le mie osservazioni, da una marcata muscolatura longitudinale ed obliqua che forma una fitta rete.

Organi sessuali. — Anche dell'apparecchio sessuale parlò molto diffusamente il Croneberg. A me preme solo accennare che l' apparecchio sessuale

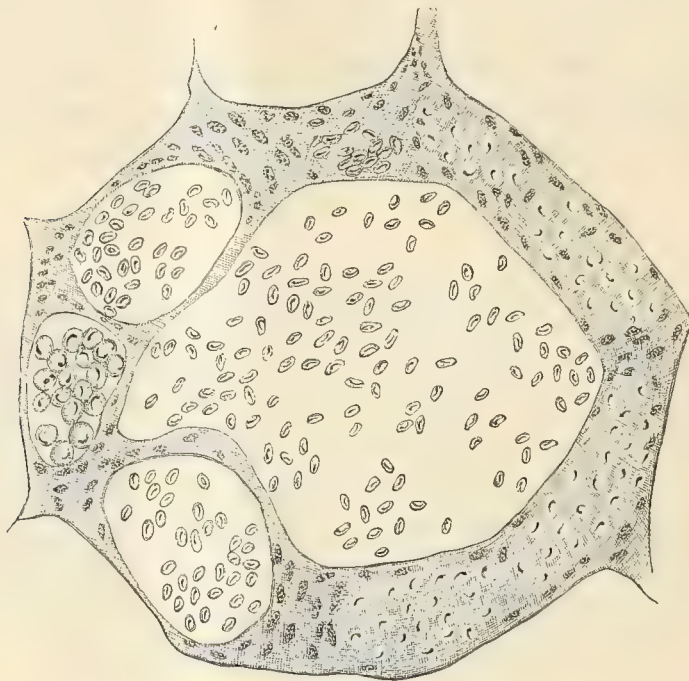



Fig. 3.
Sez. di testicolo molto ingrandito (Ob. 5, oc. 3 Koristka).

maschile consta di un testicolo impari mediano, la cui grandezza e forma è variabilissima potendo andare da quella allungata a guisa di tubo, a quella rotondeggiante, quasi sferica. Esso è diviso per mezzo di tessuto connettivo in vari scompartimenti nei quali si trovano gli spermatozoi a vario stadio di sviluppo, come appare dalla fig. 3. Senza che io mi dilunghi in descrizioni, uno sguardo alla figura servirà a spiegare bene la cosa.

In tutto il resto dell' anatomia degli Pseudoscorpioni, le mie osservazioni collimano perfettamente con quanto trovò il Croneberg, ed è perciò che non credo opportuno trattarne, rimandando gli studiosi alla sua monografia.

P. B.

INDICE DEL VOLUME VIII, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1899 — 1° Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

B

C

D

F

G

K

L

M

N

P

R

S

T

V

INDICE PER MATERIE

A

B

G

M

P

S

Z

ERRATA-CORRIGE

A pag. 10 nelle formole, che succedono alla segnatura (β) in margine, si ponga $a = 0$.

Le righe 9 a 12 della pag. 107, (Nota *Almansi*) debbono essere inserite a pag. 106 dopo la riga 15.

A pag. 208 quint' ultima riga invece di *insegnamento*, leggere *l' inconveniente*.

A pag. 331 lin. 11, la formula a destra $= 2H^2O + (CHO)_2 N^2 C^2 H^2$ diformiltetrazolina deve essere corretta nel seguente modo $= 2H^2O + (CHO)_2 N^4 C^2 H^2$ diformiltetrazolina

A pag. 439, alle ultime quattro linee si sostituisca:
« per i valori di $0f(x)$ eguali ai massimi o minimi di $f(x)$, cioè a $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3) \dots f(x_n)$ e per i valori $f(a)$ ed $f(b)$; si devono però eccettuare fra questi valori quei due che rappresentano i valori estremi della $f(x)$ nell'intervallo (a, b) ».

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell' 8 gennaio 1899.

Volume VIII.° — Fascicolo 1°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto. è messa a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 22 gennaio 1899.

Volume VIII.° — Fascicolo 2°

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei· qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto. è messa a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 febbraio 1899.

Volume VIII.° — Fascicolo 3°

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto. è messa a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 febbraio 1899.

Volume VIII.° — Fascicolo 4°

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto. è messa a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 marzo 1899.

Volume VIII.° — Fascicolo 5°

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 marzo 1899.

Volume VIII.° — Fascicolo 6°

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 9 aprile 1899.

Volume VIII.° — Fascicolo 7°

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto. è messa a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 23 aprile 1899.

Volume VIII.° — Fascicolo 8°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto. è messa a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 maggio 1899.

Volume VIII.° — Fascicolo 9°

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a)* Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b)* Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c)* Con un ringraziamento all'autore. - *d)* Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 maggio 1899.

Volume VIII.° — Fascicolo 10°

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie; se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto. è messa a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 giugno 1899.

Volume VIII.° — Fascicolo 11°

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 giugno 1899.

Volume VIII.° — Fascicolo 12°
e Indice del volume.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 25 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L' Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell' 8 gennaio 1899.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

RELAZIONI DI COMMISSIONI

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CONCORSI A PREMI

CORRISPONDENZA

(*) Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.
(**) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-99) 1° Sem. Fasc. 1°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 7°-11°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-99) 1° Sem. Fasc. 2°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 7°-11°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Gennaio 1899.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 22 gennaio 1899.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

RENDICONTI — Febbraio 1899.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 febbraio 1899.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-99) 1º Sem. Fasc. 3º.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 7º-11º.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.º — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. (1892-99) 1° Sem. Fasc. 4°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 7°-11°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 febbraio 1899.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ERRATA-CORRIGE

Le righe 9 a 12 della pag. 107, (Nota *Almansi*) debbono essere inserite a pag. 106 dopo la riga 15.

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VIII. (1892-99) 1° Sem. Fasc. 5°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 7°-11°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 marzo 1899.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

ERRATA-CORRIGE

A pag. 208 quint'ultima riga invece di *insegnamento,* leggere *l'inconveniente.*

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VIII. (1892-99) 1° Sem. Fasc. 6°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 12°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 marzo 1899.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VIII. (1892-99) 1° Sem. Fasc. 7°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VII. (1892-98) Fasc. 12°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE
AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 9 aprile 1899.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

(*) Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

(**) Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-VIII. (1892-99) 1° Sem. Fasc. 8°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-VIII. (1892-99) Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. II.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-VI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 23 aprile 1899.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ERRATA-CORRIGE

A pag. 331 lin. 11, la formula a destra $= 2H^2O + (CHO)_2 N^3 C^2 H^3$ (diformiltetrazolina) deve essere corretta nel seguente modo $= 2H^2O + (CHO)_2 N^4 C^2 H^2$ (diformiltetrazolina)

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VIII. (1892-99) 1° Sem. Fasc. 9°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VIII. (1892-99) Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 maggio 1899.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VIII. (1892-99) 1° Sem. Fasc. 10°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VIII. (1892-99) Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 maggio 1899.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ERRATA-CORRIGE

A pag. 439, alle ultime quattro linee si sostituisca:

« per i valori di $Of(x)$ eguali ai massimi o minimi di $f(x)$, cioè a $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ ... $f(x_n)$ e per i valori $f(a)$ ed $f(b)$; si devono però eccettuare fra questi valori quei due che rappresentano i valori estremi della $f(x)$ nell'intervallo (a, b) ».

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VIII. (1892-99) 1° Sem. Fasc. 11°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VIII. (1892-99) Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE
AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 giugno 1899.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

RELAZIONI DI COMMISSIONI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

ERRATA-CORRIGE

A pag. 10 nelle formole, che succedono alla segnatura (β) in margine, si ponga $a = 0$.

(*) Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.
(**) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VIII. (1892-99) 1° Sem. Fasc. 12°
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VIII. (1892-99) Fasc. 3°-4°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. II.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-VI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 giugno 1899.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.